INSTITUTIONES
ANALYTICÆ.

INSTITUTIONES ANALYTICÆ

A

VINCENTIO RICCATO

SOCIETATIS JESU

ET

HIERONYMO SALADINO

MONACHO CÆLESTINO

COLLECTÆ.

TOMUS PRIMUS.







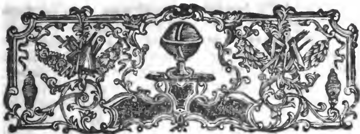
BONONIÆ MDCCLXVII.

EX TYPOGRAPHIA SANCTI THOMÆ AQUINATIS.

SUPERIORUM AUCTORITATE.







PRÆFATIO.



Eteres græci Geometræ certa quadam analytica methodo procul dubio utebantur, qua scilicet elegantissimis, multumque necessariis inventis scientiam ditârunt. Hæc tota erat: illud siquidem supponebant, quod quærebatur, & eo supposito per idoneas lineares præparationes consequentiam deducebant, donec aut ad postulatum, aut ad locum resolutum pervenirent. Loca resoluta ea vocabant problemata, quæ superiores Geometræ demonstrative resolverant. De hujusmodi methodo nitide quidem, ac breviter loquitur Pappus Alexandrinus in præfatione libri septimi collectionum mathematicarum, ubi singillatim eos omnes libros enumerat, quibus resoluta loca describebantur. Istud Analyseos genus, ut ita dicam, geometricæ, ac linearis plurimum affert utilitatis, ac sæpe sæpius elegantissimas constructiones producit. Iccirco in hisce nostris Institutionibus nonnulla identidem exempla proferre non omisimus, ut studiosi eam magni ducere, matureque ediscere assuescant.

Illud porro mihi nequaquam suadere possum, veteres Græcos eo Analyseos genere usos esse, quod nos Analysim speciosam, aut Algebram nuncupamus, quæ litteris alphabeticis, aut aliis signis quantitates exprimens, data inter & incognita æquationem componit, atque istam idonee pertractans, ac resolvens, quæsiti problematis obtinet solutionem. Licèt enim haud parum studii in veteribus Græcis perlegendis contulerim, ac præsertim Pappo, qui mira eorum inventa omnia breviter complectitur, nullum prorsus hujusce methodi vestigium reperi.

De Algebra græce unus scripsit Diophantus Alexandrinus, quem ad

unum omnes post Christum natum floruisse conveniunt; etsi de firmando anno magna disceptatio. Tempus, quo hic Analysta vixerit, prorsus ignoratur, nec ut quædam epocha firmetur, satis probabiles conjecturæ afferuntur. Tredecim libros de Algebra dicitur conscripsisse: hi latebris diu abditi fuerunt; tandem ad Gulielmum Xilandrum codex pervenit, qui sex priores libros complectebatur. Hos igitur e græco latine reddidit, & anno 1576. Basileæ typis mandavit. Tunc primum in lucem prodiit Diophantus. Mox anno 1621. eorumdem librorum editio græco-latina facta est a Bacchetro de' Mazieraco pluribus notis illustrata. Tertia demum accessit anno 1670. celeberrimi Petri Fermatii quamplurimis commentariis ditata.

De problematibus determinatis, quæ resolutis æquationibus dignoscantur, nihil omnino Diophantus: agit dumtaxat de eo problematum semideterminatorum genere, quæ respiciunt quadrata, aut cubos numerorum; quæ problemata, ut resolvantur, quantitates radicales de industria sunt evitandæ. De hisce brevem, & claram proposuimus ideam in libro primo, ubi de problematibus semideterminatis mentionem fecimus.

Antequam Diophanti opera in lucem prodirent, Arabum Algebra ad nos pervenit. F. Lucas Pacciolius a Burgo Sancti Sepulcri Ordinis Franciscani primus de Algebra typis mandavit librum, qui ita inscriptus est. *Summa Arithmeticæ & Geometriæ, proportionumque & proportionalitatum*. Venetiis, ut asserit Vallisius, editus est anno 1494, iterumque prodiit anno 1523 in Tusculano pago apud Benaci oras posito. Auctor igitur libri exordio in primæ partis summario fatetur, plurima a Leonardo Pisano, Jordano, Blasio Parmensi, Joanne a Sacrobosco, & Prosdocimo Patavino desumpsisse. Deinde ad finem quasi distinctionis quintæ, partis primæ, tres memorat consequentes Algebræ professores Venetiis, nimirum Paullum a Pergola, Dominicum Bragadinum, Antonium Cornarium, quocum F. Lucas audivit Bragadinum, quem Paullus a Pergola edocuerat. Horum scripta vel periere, vel in Bibliothecis occultantur.

F. Lucas fuse differit de arte minori, quæ est Arithmetica, & de majori, quæ est Algebra, in qua resolutionem æquationum quadraticarum usque attingit. Huc Arabes quoque pervenerant: quare F. Lucas, atque Itali Analystæ, qui illum præcesserunt, etsi simpliciores Algebræ usus, ac expeditiores reddidere; attamen nihil ultra ab illis producta est, quam quæ fuerit accepta. Quo vero nata exordio, quove progressu aucta fuerit hæc facultas inter Arabes, scitu valde difficillimum. Cardanus afferens testimonium Leonardi Pisani, inventorem dicit Mahometen filium

filium Moſis. Huic accedit Mahometes alter Bagdadinus, Geber, & alii; quorum nomina vix cognita; neque ſatis compertum eſt, utrum de Algebra diſſeruerint, an ſtudio Aſtronomiæ dumtaxat operam navaverint.

Nihil prorſus huic ſcientiæ addiderunt, qui ante editionem Artis magnæ Çardani ſcripſere, ut Michael Stifelius; immo multi ex illis, qui poſt ſcripſere, ut Robertus Ricordus Anglus, Petrus Nonnius profeſſor Coninbricenſis. Neque ultra quidquam fecit ipſe Nicolaus Tartalea Brixienſis in Algebra edita ad calcem ſuorum Operum, quamvis hujuſce ſcientiæ progreſſus, ut mox patebit, ei magna ex parte ſit tribuendus.

Anno 1545 in lucem prodiit Ars Magna Hieronymi Cardani Mediolanenſis, in qua, præter reſolutionem æquationum quadraticarum, reſolutionem quoque cubicarum edocet. Cardanus ipſe ingenue fatetur[1], cuinam hujuſmodi inventum ſit referendum, Scipioni ſcilicet Ferreo Bononienſi, qui primus æquationes cubicas reſolvit. Hoc mirum inventum celavit, nec cuiquam communicavit, niſi Antonio Florido Veneto ejus auditori. Quum porro iſte in litterarium certamen deſcendiſſet cum Nicolao Tartalea, huic nonnulla propoſuit problemata, quæ reſolutionem æquationum tertii gradus poſtulabant. Tartalea, ne primas illi concederet, adeo ſtuduit, ut ad optatam ſolutionem pervenerit. Hujus rei certiorem fecit Cardanum, eique plurimis adductus precibus regulam aperuit, ſed demonſtrationem reticuit. Cardanus his auxiliis cuncta invenit, atque perfecit, omniumque primus typis mandavit: hinc factum eſt, ut formula, in quam reſolvitur æquatio tertii gradus, formula Cardanica nuncupetur.

In hoc ipſo opere aliud continetur inventum ſane memoriâ dignum, quod multum ad Algebræ progreſſum ſpectat, reſolutio ſcilicet æquationis quarti gradus, ſive quadrato-quadraticæ, quam, teſte ipſo Cardano, Ludovico de Ferrariis ejus auditori debemus. Hanc Raphael Bombellius addidit ſuæ Algebræ editæ anno 1574. In reſolutione æquationum parum, aut nihil ad hæc uſque tempora adjectum eſt, quam quod iſti Analyſtæ Itali docuerunt, nihilque aliud repertum præter id, quod T. 1 opuſ. opuſ. 4. adinvenit Vincentius Riccatus declarans, quibus conditionibus affici debeant æquationes cujuſcumque gradus, ut a formula quadam Cardanicæ ſimili reſolvantur.

Algebra tunc temporis litteris alphabeticis, aut aliis ſignis minime utebatur, niſi ut ignotas quantitates, quæ quærebantur, indicaret; ſatiſque ei erat pro notis quantitatibus numeros adhibere; qui ſane uſus ſolutiones minus univerſales efficiebat, datiſque mutatis ad calculum o-

 mnem

mnem iterandum cogebat. Hinc solerter quidem Franciscus Vieta Gallus homo celeberrimus paullo ante annum 1600 usum denominandi quantitates cognitas, æque atque incognitas induxit, quem Arithmeticam speciosam appellavit. Nunc vero consuetudo obtinuit, ut primæ alphabeti litteræ notis dentur quantitatibus, postremæ ignotis. Licet hæc methodus pluribus non ita utilis videri posset; attamen perbrevi temporis spatio novâ quadam facie Algebram donavit. Omnibus enim arithmeticis operationibus ad species accommodatis, facilius æquationes reperiebantur, securius resolvebantur, ac universalissimæ omnino solutiones efficiebantur, quarum rerum pulchra sane exempla Vieta proponit.

Post Vietam in medium produci merentur Gulielmus Oughtredus Anglus, qui libellum *Clavis mathematica* inscriptum edidit anno 1631, Thomas Hariottus itidem Anglus, cujus Algebra eodem anno edita fuit a Waltero Warnero a morte auctoris, qui obiit anno 1621, & Renatus Cartesius Gallus, cujus Geometria, quæ citius Algebra dicenda esset, gallice scripta primum in lucem prodiit anno 1637. Vix credas, quantum facilitatis, & incrementi Algebra perceperit. Hi scilicet factoribus simplicibus multiplicatis æquationum compositionem docuerunt; radices ad quamcumque æquationem spectantes ostenderunt; quin etiam radices ipsas in positivas & negativas; in commensurabiles & radicales; in reales & imaginarias scite diviserunt. Plurimæ deinceps veritates detectæ, plurimique usus fuerunt indicati, unde postea ditata, ac mirum in modum fuit Algebra illustrata.

Hactenus de Algebra pura, minimeque ad Geometriam relata. Quot vero utilitates ab hac relatione perceptæ fuerint, a nemine ignoratur, atque ut nonnulla de hac re exempla in Vietæ operibus legas auctor sum. Attamen hæc pars nondum absoluta, ac penitus evoluta est, nisi a Marino Getaldo Ragusino in opere posthumo inscripto *De Compositione, & Resolutione Mathematica*, edito Romæ anno 1630. In ea siquidem dilucida methodus ediscitur, qua æquationes primi, & secundi gradus, postquam resolutæ fuerint, ad geometricam constructionem duci possunt, earumque radices reales determinari.

Renato Cartesio, quod Analysim curvis accommodaverit, laudi sane maximæ vertendum est. Hic enim earum proprietates ostendit, & æquationes secundo gradu superiores earum intersectione construit. Præter inventi meritum, doctissimos suorum operum illustratores habuisse, fortunæ tribuendum est, qui suis doctrinis nitidissimum quoddam lumen attulerunt. Hi fuerunt Franciscus a Schooten, Johannes Huddenius,

Flo-

Florimundus de Baune, Johannes de Witt, qui Cartesium illustrando, de natura, & constructione æquationum, de earum limitibus, de locis geometricis, de curvarum elementis, & de ratione geometricas demonstrationes concinnandi a calculo analytico differuerunt. His addatur recentior interpres, scilicet P. Rabuelius Soc. Jesu, qui de Cartesii Geometria copiosum sanç, ac pereruditum commentarium edidit.

Longum esset, omnes hìc recensere Analystas, qui post Cartesium hujusce facultatis usus faciliores reddidere, eamque plurimis inventis locupletârunt. Quidquid scitu dignius erit attingam, eosque, qui inventionis partem sibi vindicant, commendabo. Ac in primis etsi æquatio prædita sit radicibus rationalibus, in iis tamen reperiendis plurimum sæpe elaborandum est. Ad hoc plurimæ methodi ab Analystis prolatæ. Theoria hæc satis abunde a Clairautio pertractata est, rebusque a Geometra ingeniosissimo edoctis nihil addi posse videtur. Quinimo artes exposuit, quibus factores rationales secundi gradus, qui formulam dividunt, dignoscantur.

Proposito a Tayloro viro acutissimo quodam problemate omnibus Mathematicis non Anglis, Johannes Bernoullius, Jacobus Hermannus, Gabriel Manfredius, & Julius de Fagnanis methodum binomia plura, & trinomia resolvendi in factores reales secundi gradus docuerunt. Methodum hanc antea cognitam fuisse Ruggerio Cotesio, ejus opera posthuma satis indicant. Nam in his legitur elegantissimum theorema pertinens ad divisionem circumferentiæ in partes æquales, in quo inventio omnis innititur. Legendum puto, quod de hac re scripsit Leonardus Eulerus in Introductione ad Analysim infinite parvorum, quod opus satis commendari non potest. Accedit, quod quarti gradus æquationes omnes, etsi radicibus realibus careant, resolvuntur in factores reales secundi gradus, ut demonstrârunt Gabriel Manfredius, Leonardus Eulerus, & P. le Seur.

Idem Eulerus Analysi novum addidit calculum sinuum, & cosinuum, quo nedum ipse, verum cæteri pæne omnes Analystæ ejus exemplum sectantes proficue usi sunt, cum in rebus novis reperiendis, tum in jam repertis simplicitate majore, atque elegantiâ exornandis. Hujusmodi calculum auxit Vincentius Riccatus, atque utiliter eum ad sinus, & cosinus hyperbolicos transtulit, quoniam analogia, quæ inter utrosque intercedit, mirum in modum hanc materiam illustrat. Quin imo idem Scriptor eâdem methodo edocuit, quanam ratione ad elegantem, atque geometricam constructionem ducantur illæ formulæ Cardanicæ similes, in quas multæ æquationes superiorum graduum resolvuntur, quæ antea ad Arith-

rithmeticam dumtaxat, non ad Geometriam spectare videbantur:

Seriebus plurimi Scriptores usi sunt, præsertim qui de probabilitate in aleis egerunt, ut Montmortius, Jacobus Bernoullius, & Moivreus. Attamen si series algebraicas, & geometricas demas, illæ poterant numerari, quas in summam redigere, facile cuique esset. Hujusmodi theoriam abunde pertractavit, penitusque evolvit Vincentius Riccatus in libello inscripto *De Seriebus recipientibus summam algebraicam, aut exponentialem Commentarius*. Si regulis ibi edoctis, atque ostensis innitatis, secure dignosces, utrum series summam algebraicam, aut exponentialem habeat, an non; & si habeat, quænam sit, facillime comperies. Hæc quoad Algebram puram.

Eadem prout applicata Geometriæ plurimum aucta est post Cartesium. Isaacus Nevvtonus enumerationem linearum tertii gradus in lucem protulit, licet nulla edita demonstratione, regulisque, quibus usus erat, minime attractis, quippe qui magis sibi ipsi admirationem comparare, quam alios edocere cupiebat. Verùm ab acutioribus perceptum est, eam inquisitionem sitam esse in parallelogrammate analytico, quod utilitatis caussâ a Clarissimo de Gua in triangulum conversum est. Stirlinghius Nevvtoniana principia adeo feliciter cœpit extricate, ut errores, qui vel ab ipso Nevvtono exciderant, sedulus emendaverit. Deinde doctissimus Nicolas in Reg. Ac. Paris. enumerationem linearum tertii gradus edidit, ea omnia principia recensens, quæ Nevvtonus sequi potuerat. Postea Clarissimus de Bragelogne enumerationem linearum quarti gradus demonstrandam suscepit, licet minime confecerit. Diu de punctis multiplicibus disserit, de ramis autem infinitis parum, aut nihil. His accessit Clarissimus de Gua, qui in docto quodam libro usus Analyseos Cartesianæ ostendit ad detegendas proprietates linearum geometricarum cujuscumque gradus. Hujusmodi Scriptor difficilem hanc theoriam quasi perfecisset, nisi, quum de seriebus judicium proferret solo primo termino attento, in aliquem paralogismum incidisset. Hæc porro inquisitio absoluta fuit a Gabriele Cramero in egregio admodum opere edito Genevæ anno 1750, quod inscribitur *Introductio ad Analysim linearum curvarum algebraicarum*.

Hunc librum præcesserat Euleri Introductio ad Analysim quantitatum infinitesimarum, cujus operis in parte secunda de iisdem rebus agitur, de quibus Cramerus, idest de ramis infinitis, eorumque generibus, de contractibus, de osculis, de punctis singularibus, solitariis, multiplicibus &c. In consequentiis deducendis Scriptores ambo conveniunt, licet dissimili-

milibus methodis ad eas perveniant. Ambos nos magni facimus, nec uni primas defetimus. In hisce Institutionibus Euleri methodo usi fumus, tum quia tyronum facilitati, tum quia brevitati nostræ consulere videbamur.

Huc ad nostra usque tempora pervenit Algebra Cartesiana. Plurimi semper eruditi viri e multis aliorum libris inventa colligere studuerunt, nimirum ut difficilem hanc scientiam ubique protraherent, utilesque methodos discentibus ad eam facilius percipiendam suppeditarent. Antiquiores quidem minime profetam veluti Herigonium, & P. de Chales, apud quos Algebra nunc sane imperfecta reperitur. De recentioribus tantum loquar, quos in duplicem classem dividendos puto. Prima illorum est, qui aut de omni, aut de aliqua Cartesianæ Algebræ parte disseruerunt: altera eorum, qui totius Algebræ cursum perfecerunt de calculo etiam infinitesimali pertractantes, uti & nos decrevimus, huic Volumini alterum addentes, in quo inventa ad calculum differentialem, & integralem spectantia colligantur.

Inter primos recensendus est Johannes Wallisius Anglus in suo de Algebra tractatu historico practico, qui in secundo tomo suorum Operum legitur; Eques Nevvronus in Arithmetica universali, quod opus sane est tanto Geometrâ dignissimum; Marchio Hospitalius, qui in suis sectionibus conicis de æquationibus secundo gradu superioribus agit; Petrus de Martino; P. Ruggerius Boscovichius, Clairaurius, qui concinne quidem declarat, quibusnam gradibus suam Analystæ scientiam promovere potuerint; Mac-laurinus in quodam opere posthumo, cui ab interprete nonulla Euleri capita addita sunt; Saundersonius Anglus, qui duobus longiusculis libris nonnisi ad resolutionem æquationum quarti gradus pervenit. Hosce nos Auctores diligentissime evolvimus, & quidquid sciru dignius erat contulimus in hoc primum Volumen, quod ad Juvenum utilitatem typis mandamus.

Perfectum absolutumque cursum primus edidit P. Reineaus Presbyter Oratorii in Gallia anno 1708, quem inscripsit *Analysis Demonstrata*. Laudi vertendum est huic operi, quod plurimos arte analytica imbuerit, virosque effecerit. Verum quemadmodum tunc temporis frequentiora doctorum hominum erant inventa, præsertim in calculo integrali, sic brevi illud opus imperfectum evasit. Hac de caussa pleniorem tractatum scribendum judicavit Christianus Wolfius, quem inscripsit *Elementa Analyseos mathematicæ tam finitorum, quam infinitorum*. Hunc in suo cursu edidit primum Halæ Magdeburgicæ anno 1713, atque in recentioribus edi-

editionibus plurimum auxit. Hujusmodi Algebra ubique pervagabatur, quique in hanc scientiam incumbebat, eâ utebatur. Quoniam vero Wolfius nonnisi prima elementa tradenda curavit, & post illum inventa plurima in Diariis, Academiis, aliisque pertraris libellis pererrabant, Cajetana Maria Agnesia necessitate atque utilitate Italæ Juventutis commota difficillimum opus aggressa est, ut inventa omnia simul colligeret, ac dilucidâ methodo explanaret. Enimvero opus felicissime perfecit, ac duo doctissima Volumina Institutionum analyticarum anno 1748 typis mandavit. Vix credas quanto plausu hujusmodi librum exceperit Italia, cujus ope mirum in modum Analyseos studium percrevit. Longiore oratione id operis haud commendabo, quum meas omnino laudes longe præstare existimem.

Quum porro hic liber difficillime inveniatur, nec quovis pretio a studiosis emi possit, quumque quindecim annorum spatio plurima, plurimique facienda inventa huc illuc dispersa reperiantur, novum quoddam opus, quod & facilius possit acquiri, & recentiorum inventa complecteretur, nitideque explicaret, cœpit exoptari. Vincentius Riccatus Soc. Jesu diu efflagitabatur, ut hujusmodi opus omnibus sane utilissimum aggrederetur. Ipse vero quia magnis distinebatur occupationibus, quæ plurimum temporis illi furabantur, tum quia nonnulla opera perficere maxime discupiebat, novum semper onus detrectavit. Quum vero in dies petitiones urgerent, tandem respondit, se solum id oneris minime posse aggredi; si quis tamen idoneus vir auxilium ferret, aliorum voluntati libentissime morem gessurum. Hieronymus Saladinus Congregationis Cœlestinorum Monachus, qui sub ipso Riccato Algebræ cursum jam pridem perfecerat quique in veterum Analysi peculiari quadam pollet industria, ultro sese obtulit. Una igitur opus susceptum est: primum modo Volumen in lucem prodit; alterum verò omni studio, & alacritate typis evulgabitur.

Libri porro labor sic inter duos Scriptores erat dispertitus. Totius operis methodum Riccatus disposuit; conscribenda vero capita amice divisa sunt. Quæ magis subobscura, magisque erant difficilia, Riccatus magno studio clara, perceptuque reddidit facilia; quin etiam antequam in lucem proferret, ea Adolescentibus quibusdam suis auditoribus addiscenda tradidit, atque experientiâ comperit, ea perquamfacillime percipi, ac penetrari. Cætera vero Saladinus collegit, explicavit, ac multum de suo addidit. Is scripta deferebat amico socio, quibus perpensis, atque approbatis, illud tantum addebat, quod necessaria operis connexio postulabat. Stilum, vero si lector identidem mutatum cernat, plurimos hunc librum latine reddidisse sciat.

In

In hoc primo Volumine amicus Lector facillime cognoscet, nihil deesse ex iis, quæ in primo Agnesiæ volumine perleguntur, si nonullæ methodi de ducendis tangentibus ad curvas demantur, quæ in altero Volumine reperientur. Multa vero, multumque necessaria in nostro Volumine inveniet, quæ in Agnesia desiderantur. Enimvero nihil dicam de nonnullis doctrinis breviori, ac faciliori methodo explanatis, nihil de serie problematum, quæ ad instruendum plurimùm valent, tum ob diversimodas rationes, quibus solvuntur, tum ob recondita artificia, quæ adhibita fuerunt. Dicam tantum de additionibus, quas in hisce novis Institutionibus inveniet. Hæ sunt potiores: Methodus ad inveniendam solutionem problematum semideterminatorum; Principia, & usus calculi sinuum, & cosinuum tam circularium, quam hyperbolicorum; Demonstrationes proprietatum sectionum conicarum deductæ ex æquatione generali linearum secundi ordinis; Resolutio æquationum, quæ formulam Cardanicæ similem admittunt; Constructio geometrica harum formularum; Methodus ad dignoscendos in quavis æquatione factores rationales primi, & secundi gradus; Demonstratio utilissimi theorematis Ruggerii Cottesii; Solutio objectionis haud contemnendæ, quâ methodum construendi æquationes per intersectionem curvarum oppugnavit Clarissimus Rollius; Methodus determinandi curvas, quibus convenit proprietas dependens a duobus, vel pluribus punctis intersectionis; Methodus inveniendi terminos generales, & summas serierum; Methodus determinandi infinitos curvarum ramos, eorumque genera; Methodus determinandi contactus, oscula, eorumque genera, puncta singularia, conjugata, multiplicia, inflexiones, cuspides, quibus curvæ præditæ sunt. Hisce additionibus facile speramus, hasce nostras Institutiones perfectas fore, omnibusque inventis recentioribus exornatas. Non ignoramus, in hujusmodi libris non multum post temporis aliquid deesse: studio enim doctissimorum hominum sæpe fit, ut modo methodi faciliores reddantur, modo augeantur, novæ modo theoriæ feliciter reperiantur. De progressu tamen Analyseos adeo solliciti sumus, ut nostro huic Libro hujusmodi infortunium quamcitissime exoptemus.

INDEX

INDEX CAPITUM

LIBER PRIMUS

De Algorithmo, & de Æquationibus primi, & fecundi gradus.

LIBER SECUNDUS

De Lineis feu Locis fecundi gradus, & de Æquationibus tertii gradus, & quarti.

LIBER TERTIUS

De locis tertii, & superiorum graduum, & de æquationibus excedentibus gradum quartum.

Ad-

LIBER

LIBER PRIMUS

DE ALGORITHMO, ET DE ÆQUATIONIBUS PRIMI ET SECUNDI GRADUS.

CAPUT PRIMUM

Algorithmus Quantitatum Integrarum.

Quantitates integræ aliæ simplices vocantur, aliæ compositæ; Eæ sunt quæ unico termino continentur, hæ quæ pluribus. Nos hic de simplicibus prius, de compositis deinde agemus.

1. Additio quantitatum simplicium hoc signo + fit, quod apud Analyseos Scriptores idem significat ac *plus*; Quare si quantitatem a quantitati b addere velimus, hoc modo scribimus $b+a$, vel $a+b$, quod significat a plus b, vel, quod idem est, b plus a, quæ summa vocatur.

2. Si quantitates addendæ eadem littera exprimantur, veluti si quantitas a quantitati a addi debeat, scribere possumus $a+a$, sed melius, quia brevius scribimus $2a$; quod idem dictum existiment tirones, si quantitates a plures quam duæ sint, ad summam enim earum omnium habendam satis erit ipsi a numerum præponere, qui, quot vicibus accipiatur ipsa quantitas, ostendat. Hic porro numerus *Coefficiens* appellatur, cujus est in allato exemplo indicare, ita se habere $2a$ ad a, ut 2 ad unitatem; hinc cujuscumque quantitatis, quæ nullum habeat coefficientem expressum, coefficiens est unitas. Quod si quantitates, quæ addi debent, eadem littera exprimantur, & coefficientes habeant præpositos, tunc facta coefficientium summa juxta vulgaris arithmeticæ regulas, eam communi litteræ præponemus; ut si $2a$ addere velimus $3a$, erit summa $5a$.

3. Subtractio quantitatum simplicium fit hac horizontali lineola —, quæ significat minus, præponiturque subtrahendæ quantitati. Si a velis a b subtrahere, scribe $b-a$, quod valet b minus a. Si quantitates eadem littera exprimantur, sufficiet si coefficiens a coefficiente subtrahas, & si quid superest, communi litteræ præponas. Si ergo de $5a$ velis detrahere $3a$, quoniam de 5 subducto 3 remanet 2, patet reliquum esse $2a$. Manifestum est, quod si subtrahenda quantitas minor illa fuerit, unde subtrahi debet, differentia erit positiva, hoc est *nihilo* major, si æqualis, differentia erit nulla, hoc est *nihilo* æqualis, si tandem major, differentia erit negativa, hoc est *nihilo* minor. Nihilum autem vocari solet zero, & exprimitur hac nota o.

4. Ut autem harum quantitatum, quæ negativæ apellantur, rectam sibi ideam comparent tirones, diligenter animadvertant, eas licet minores quam zero, non ideo habendas esse veluti absurdas, aut impossibiles, sunt enim veræ & reales æque, ac positivæ. Nam sicuti quantitatum positivarum est, veros, & reales supra zero excessus, indicare, ita negativarum est a zero veros, & reales defectus exhibere. Igitur sive sit $o+b$, sive $o-b$, erit quantitas b in utroque casu realis. In eo positum est omne discrimen, quod quantitas b negativa in casu

casu secundo intelligi debeat ferri in partes omnino ab iis aversas, in quas tendit in primo, facto inde initio, ubi quantitas æquatur zero: hinc si $0+b$ montis altitudinem quamdam indicet supra horizontem, $0-b$ vallem indicaret tantundem infra ipsum depressam: ac si in primo casu b iter significaret Bononia Romam versus, in secundo æquale iter Bononia Mutinam versus ostenderet.

5. Ex his descendit negativarum quantitatum additionem signo $-$ fieri oportere; nam si signo $+$ uteremur, ipsæ e negativis transirent ad positivas; igitur si $-a$ addi debeat $-b$, scribendum erit $-a-b$, vel quod idem est $-b-a$; si sit addenda quantitas $-a$ quantitati $-a$ summa erit $-2a$ &c. Descendit secundo quantitatum negativarum subtractionem fieri debere signo $+$: si enim contrario signo uteremur, non subtractio, sed additio juxta superius dicta haberetur. Sit igitur subtrahenda quantitas $-a$ de $-b$, erit differentia $-b+a$; si quantitas eadem littera exprimatur, satis erit si subtrahantur coefficientes; ita si $-2a$ subtrahere debeas de $-5a$, reliquum erit $-3a$. Hic etiam animadvertere juverit, negativam fore differentiam, si cum subtrahis $-a$ de $-b$, a minor quam b fuerit, differentiam fore nullam, si $-a$ æquet $-b$; si vero $-a$ excedat $-b$, differentiam fore positivam, quod ad ea declaranda, que de quantitatibus negativis dicta sunt, plurimum valet.

6. Patet etiam quomodo positivis quantitatibus negativæ, aut negativis positivæ vel addi debeant, vel subtrahi, nempe scribendas esse aliam post aliam eodem ipso, quo præditæ sunt signo, quum de additione est sermo; si vero de subtractione agatur, mutato subtrahendarum signo. Notandum hic, quantitatem quamlibet vel solam, vel ante alias positam, quæ nullum habeat præpositum signum, eam positivo signo affectam esse intelligendam. Si quantitates, de quibus loquimur, eadem exprimantur littera, ad summam habendam satis erit subducere coefficientes, & reliquo signum illius apponere, quæ major est. Ergo summa $5a-2a$ erit $3a$: summa vero $2a-5a$ erit $-3a$, summa $2a-2a$ erit zero. Ad habendam vero differentiam satis est addere coefficientes, & summam afficere eo signo, quo prædita est quantitas, de qua fit subtractio: Ita si detrahas $-3a$ de $5a$, reliquum seu differentia erit $8a$: si detrahas $-2a$ de $2a$, erit differentia $4a$ &c. Contra si $5a$ detrahas de $-3a$, relinquetur $-8a$, si $2a$ ex $-2a$, reliquum erit $-4a$. Facillime hæc percipit is, qui ea teneat, quæ numero 4. exposuimus. Si enim quis interroget, quantum viator, qui hinc profectus Mutinam versus tria milliaria confecerit, distet ab eo, qui hinc pariter Romam versus ad quintum pervenerit lapidem, nonne statim respondeas, illum distare passuum octo millibus? Recte quidem. Ergo nulli dubium esse potest, quin $-3a$ ab $5a$ distet $8a$, quæ distantia ipsarum erit quantitatum differentia.

7. Quantitatum simplicium multiplicatio fit sola litterarum conjunctione, nullo inter ipsas interposito signo; quare si velimus a per b multiplicare, scribimus ab. Quantitates, quæ invicem multiplicantur, dicuntur *factores*, id autem, quod ex multiplicatione oritur, *factum* seu *productum* appellatur. Sicuti vero, quæ multiplicari debent quantitates, vel ambæ positivæ sunt, vel ambæ negativæ, vel earum altera positiva, altera negativa; ideo in signis producto apponendis hanc sequimur rationem, ut si quantitates eodem afficiantur signo vel positivo, vel negativo, producto signum positivum apponamus, negativum vero si contra. Hinc si multiplicemus $+a$ per $+b$, vel $-a$ per $-b$, erit in utroque casu productum $+ab$; si contra multiplicemus $-a$ per $+b$, seu $+a$ per $-b$, erit productum $-ab$.

8. Hu-

8. Hujus rei in promptu est ratio. Quoniam multiplicator nihil aliud ostendit, nisi quoties multiplicanda quantitas sit accipienda, jam si hæc positiva sit, & ille pariter positivus, erit quoque productum, ut patet, positivum, eoque majus, quo multiplicator ipse major erit; & minus, quo minor; ergo si multiplicator sit zero, erit zero etiam productum; ergo si magis decrescat multiplicator, & fiat minor quam zero, hoc est negativus, etiam productum magis decrescat necesse est, fiatque minus quam zero, seu negativum. En igitur quomodo sit manifestum, productum positivæ quantitatis per negativam multiplicatæ, esse negativum. Suppone modo quantitatem negativam per positivam multiplicari oportere. Jam ex demonstratis erit productum negativum, & eo minus in hoc ordine, hoc est tanto minus quam zero, quanto ipse multiplicator crescit, seu major est, & quanto multiplicator fiet minor, tanto productum erit minus in ordine negativorum, hoc est tanto propius accedet ad zero; ita ut crescat semper productum, si decrescat multiplicator: ergo quum hic est zero, productum erit zero: ergo si magis etiam multiplicator decrescat, nempe si negativus fiat, crescet magis productum, adeoque erit majus quam zero, ac consequenter positivum; quantitas igitur negativa per negativam multiplicata productum dabit positivum. Hinc patet regula numero præcedenti assignata.

9. Si quantitates invicem multiplicandæ plures essent quam duæ, eodem prorsus modo se res habet. Duas enim prius multiplicabis, deinde harum productum per tertiam, & sic deinceps. Quæratur ex gr. productum trium quantitatum $a, -b, c$; duarum $a, -b$ erit $-ab$, si hoc per c multiplices, habes $-abc$ productum quæsitum. Si quantitates coefficientibus præditæ sint, eorum productum producto quantitatum est præfigendum, iisdem quoad signa manentibus, quæ jam tradidimus. Igitur productum quantitatis $-3a$ in $9b$ ductæ erit $-27ab$, productum $4a$ in $3b$ erit $12ab$. Animadvertant etiam, qui hæc legunt, idem esse, & eandem exhibere quantitatem ab & ba; nam locorum diversitas, quæ in vulgari arithmetica tantum potest in numerorum valoribus immutandis, in algebra vim habet omnino nullam.

10. Quum quantitates, quæ multiplicantur, duæ sunt & æquales, iisdemque signis affectæ, ex. gr. si multiplicetur a per a, productum aa secunda dicitur ipsius a potestas, seu potentia, seu dignitas, seu quadratum, idque nihil aliud significat, nisi quod ea quantitas per se ipsam fuerit multiplicata; ipsa vero a tantum dicitur prima ejusdem a potestas. Si quantitates tres fuerint, productum aaa vocatur potestas tertia, sive cubus; $aaaa$ potestas quarta, seu quadrato quadratum, & sic in infinitum; non utimur tamen eo scribendi modo utpote nimis incommodo, præsertim si valde crescat potestas; sed hunc potius usurpamus, a^2, a^3, a^4, a^m ita ut a^2 sit idem ac aa, a^4 idem ac $aaaa$, a^n vero idem ac potestas quæcumque per ipsum n expressa. Hi porro numeri litteræ superimpositi vocantur exponentes, ea de causa, quod aliquam ipsius quantitatis exponunt, seu indicant potestatem. Magnum igitur inter coefficientem atque exponentem intercedit discrimen; atque inde longe aliud est $2a$, quam a^2; nam si a sit ex. gr. 4, $2a$ erit 8, at a^2, nempe a quadratum æquale erit 16.

11. Cum de quantitatis ejusdem potestatibus agitur, ut eas invicem multiplices, summam exponentium appones litteræ communi tamquam exponens, & potestas inde orta erit productum, quod quærebatur: omnino id planum est; nam

si a^2 per a^3 velis multiplicare, nonne productum erit $aaaaa$? atqui hoc ex num. super. idem est atque a^5, & hujus potestatis exponens 5 est summa exponentium 2 & 3, ergo &c. Patet hinc etiam ratio elevandi datam quantitatem ad quamlibet potestatem; scilicet toties sumendus erit exponens, quoties novæ potestatis index postulat, ad quam ipsa quantitas est elevanda, seu quod idem est, exponens propositæ quantitatis per novum indicem est multiplicandus, rite servatis, quæ ad signa pertinent. Ex. gr. vis b^2 elevare ad potestatem tertiam; ergo ex tradita regula ter erit sumendus, seu per 3 multiplicandus exponens 2, & scribendum b^6, quæ erit ipsius b^2 potestas tertia; ita etiam quantitatis a^3 potestas secunda, seu quadratum erit a^6, potestas tertia a^9, ita denique si a^m ad potestatem n velis perducere, fiet a^{mn}, ipsius a^m potestas n^{esima}. Valent hæc eadem, quum agitur de producto ex duorum, vel plurium factorum multiplicatione orto, quale esset ex. gr. a^2b^3; Si enim velimus ipsius potestatem aliquam, sufficiet per quæsitæ potestatis indicem singularum litterarum exponentes multiplicare. Ergo potestas illius secunda erit a^4b^6, & generatim a^mb^n ad potestatem p elatum erit $a^{mp}b^{np}$. Verum sæpe juvabit indicare tantum operationem, non perficere, apposita supra lineola, cui adjungitur index potestatis. Ita $\overline{ab}^n$ indicat ab elevatum ad potestatem n, quod idem est ac a^nb^n, & $\overline{a^2b^3}^m$ est a^2b^3 elevatum ad potestatem m, seu $a^{2m}b^{3m}$.

12. Ad divisionem quantitatum simplicium quod attinet, quoniam divisio multiplicationi est contraria, & illud, quod per hanc erat effectum, per illam destruitur, sequitur divisionem fieri, si ex dividenda quantitate divisorem ejicias; quo facto reliquum *quotiens* apellatur seu *quotus*, qui per divisorem multiplicatus dividendam quantitatem restituet. Regula igitur pro signis, huic, quem diximus, quoto præfigendis ab ea non differt, quam in multiplicatione tradidimus; nempe signa eadem positivum, diversa negativum signum pro quotiente exhibebunt. Hinc quoniam quantitas ab est productum ex a in b, si eam per a dividas, erit b quotus, qui per a iterum multiplicatus ipsam ab restituit; ita pariter quantitas $-abc$ divisa per $-ab$ dabit quotum c, divisa per c dabit quotum $-ab$. Quoniam vero quantitates omnes possunt intelligi per unitatem multiplicatæ, hinc est, quod si quantitas aliqua sit per se ipsam dividenda; ut si a dividere debeas per a, quotus erit unitas. Si quantitas habeat coefficientes, præter ea, quæ dicta sunt, quantitatis dividendæ coefficiens per divisoris coefficientem dividere oportet, adeoque si dividas $6a$ per $-2a$, erit quotus $-3a$.

13. At ea esse potest quantitas dividenda, ut in illa litteræ divisoris, aut nullæ, aut saltem non omnes reperiantur; quemadmodum si a dividi oporteat per b. Hinc enascuntur fractiones, & eo prorsus modo indicatur divisio, quo in arithmetica; idest lineola horizontalis ducitur, supra quam scribitur quantitas dividenda, infra divisor propriis utriusque retentis signis; igitur $\frac{a}{b}$ indicabit a

divisam

divisam per b, eritque ipsa fractio quotus ex divisione proveniens. Quantitas supra transversam lineolam posita dicitur *numerator*, quæ infra est, *denominator*. Ita si $3ab$ dividas per $-c$ erit quotus $\frac{3ab}{-c}$, quod idem erit etiam $\frac{-3ab}{c}$: nam fractionis valor, sive quotus ipse in utroque casu erit negativus. Eadem ratione si dividas $-5ab$ per $-3cd$, erit quotus $\frac{-5ab}{-3cd}$ sive $\frac{5ab}{3cd}$ in utroque casu positivus. Quidam fractionem indicant interpositis inter numeratorem, & denominatorem duobus punctis. Ita $a : b$ indicat numeratorem a dividi a denominatore b. Nos plerumque primum modum sequimur. Si autem aliquæ in dividenda quantitate litteræ reperiantur, quæ etiam in divisore sint, illis tunc ejectis, ea qua dictum est methodo, quod superest fractionis more scribendum: quapropter diviso ab per xb, erit quotus $\frac{a}{x}$. Ratio ex fractionum regulis deducitur, quibus docemur nihil fractionis valorem immutari, si per eandem quantitatem tum numerator, tum denominator dividatur; quod ipsum in arithmetica satis constat. At rei hujus ratio ultima ex eo pendet, quod cum divisor in quotum ductus æquare debeat productum dividendæ quantitatis in unitatem, necessario erit debeat divisor ad dividendam quantitatem, ut unitas ad quotum: idest in casu allato xb ad ab, ut unitas ad $\frac{ab}{xb}$; sed ratio xb ad ab est eadem, ac ratio x ad a, ut novimus ex proportionum regulis; ergo quam proportionem unitas habebit ad $\frac{ab}{xb}$, eandem habebit ad $\frac{a}{x}$. Ergo hæ duæ quantitates erunt prorsus æquales: quod ratiocinii genus ad alios quoscumque casus extendi, manifestum est.

14. In dividenda vero alicujus litteræ potestate per aliam ejusdem potestatem, sufficiet hujus exponentem ab illius exponente detrahere, ut quotum habeas, idest si fuerit dividendum a^4 per a^2, erit quotus a^{4-2}, seu a^2: nam sicuti exponentium additione potestates multiplicantur (num. 11.), ita eorum subtractione dividantur necesse est. Hinc si divisoris exponens minor sit quam exponens dividendi, quoti exponens erit positivus, si æqualis, quotus habebit exponentem o, si denique major habebit quotus exponentem negativum; Unde si a^4 dividas per a^2, quotus erit a^2; si per a^4, quotus erit a^0; si per a^6 quotus erit a^{-2} seu $\frac{1}{a^2}$. Etenim quotum ex a^4 divisa per a^2 scimus esse $\frac{aaaa}{aa}$ seu a^2; quotum ex a^4 divisa per a^4 esse $\frac{aaaa}{aaaa}$ seu 1; quotum denique ex a^4 divisa per a^6 esse $\frac{aaaa}{aaaaaa}$ seu $\frac{1}{a^2}$; Unde patet ratio, quare a^0 æquet unitatem, & idem sint $\frac{1}{a^2}$, ac a^{-2}. Hæ quantitates, quæ exponentes habent negativos, potestates negativæ vocantur, semperque indicant fractionem, cujus numerator est unitas, denominator vero ipsa potestas positiva: sic a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} idem

sunt

sunt prorsus ac $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$.

15. Hæc quoad quantitates simplices. Quantitatum compositarum algorithmus nullo negotio ex simplicium algorithmo profluit. Ut earum summam habeas, satis erit, si eas unam post aliam scribas retentis earum signis; ut habeas residuum, vel earum differentiam, si pariter unam post aliam scribas, mutatis signis earum, quæ subtrahendæ erunt. In summandis tamen, & in subtrahendis quantitatibus, eæ, quæ eadem littera exprimuntur, in unam simplicem quantitatem redigantur, uti num. 2, & 3 monuimus. Ex his quantitatum $a+b-c$, $3a-d+c$ summa erit $4a+b-d$, quantitatum $6x+9y$, $10x-3y$ summa erit $16x+6y$, quantitatum $ab-2ac+z^2$, $-ab+2ac+z^2$ summa erit $2z^2$. Si vero ex $4x+3b$ subtrahas $a+y$ erit residuum $4x+3b-a-y$. Si de $x+b$ subtrahas $-a-b$ erit residuum $x+2b+a$. Si ex $ab+c^2$ subtrahas $-ab+c^2$ erit residuum $2ab$.

16. Quum quantitates addendæ sunt, vel subtrahendæ, usus docuit Analystas, eas omnes, quæ eodem termino constant, in verticali columna scribere. Ita enim uno velut intuitu facile additio vel subtractio peragitur. Exempla rem efficient clarissimam. Sint addendæ quantitates A, B, C, ita terminos dispone, ut identici faciant columnam verticalem, quod factum vides. His ita positis nihil facilius quam efficere summam D.

A. $a^3-3a^2x+4ax^2-2x^3$

B. $2a^3-a^2x-2ax^2+x^3$

C. $-a^3+2ax^2+2x^3+b^3$

D. $2a^3-4a^2x+4ax^2+x^3+b^3$

Similiter si ex A sit deducenda B, hujus terminos terminis illius similibus suppono, & nullo negotio differentiam C invenio.

A. $3a^5-2a^2b^3+4a^4b+a^4y$

B. $a^5-3a^2b^3+3a^4b+b^4y$

C. $2a^5+a^2b^3+a^4b+a^4y-b^4y$.

17. Quantitatum compositarum multiplicatio fit multiplicando singulos unius factoris terminos per singulos alterius, & horum omnium productorum summa quæsitum productum dabit. Sit $a+b-c$ quantitas multiplicanda per y; per hanc igitur, tribus illis terminis juxta regulas simplicium quantitatum successive multiplicatis, habebimus productum $ay+by-cy$. Multiplicari debeat $a+b-c$ per $y-a$: productum ex y multiplicato per singulos terminos $a+b-c$ erit $ay+by-cy$, si eosdem ducas in $-a$, habemus $-a^2-ab+ac$. Summa igitur duorum productorum $ay+by-cy-a^2-ab+ac$ erit productum quæsitum. Quum duæ quantitates invicem multiplicandæ sunt, altera sub altera scribitur, tum inferioris termini singuli ducuntur in terminos superioris; producta

ea vero scribuntur infra lineolam horizontalem, ea habita cura, ut si qui termini similes proveniant, ii in verticali columna constituantur, quo facilius colligi in summam possint. Exemplum. Sit multiplicanda A per B; ductisque singulis terminis B in singulos A, oritur C, cujus termini similes, ut monuimus, in verticali columna sunt positi, qua cura adhibita facile eorum summam D conficio.

$$\begin{array}{l}
A.\ a^3+2a^2x-a^2y+2axy \\
B.\ 2a^2-ax+ay-2xy \\
\hline
C.\ 2a^5+4a^4x-2a^4y+4a^3xy-2a^3x^2-2a^2x^2y-a^3y^2+2a^2xy^2-4ax^2y^2 \\
\qquad -a^4x+a^4y+a^3xy \qquad -4a^2x^2y \qquad +2a^2xy^2 \\
\qquad\qquad +2a^3xy \\
\qquad\qquad -2a^3xy \\
\hline
D.\ 2a^5+3a^4x-a^4y+5a^3xy-2a^3x^2-6a^2x^2y-a^3y^2+4a^2xy^2-4ax^2y^2
\end{array}$$

18. Non abs re fuerit aliquo hic exemplo ea magis ostendere, quæ num. 7. & 8. dicta sunt; nempe signorum diversitatem exhibere in multiplicatione productum negativum; signa vero eadem positivum. Sit itaque multiplicandum $2a-a$ per $3a-2a$ quod cum idem sit, ac multiplicare a per a constat productum esse debere a^2: atqui hoc fieri nequit, nisi iis stantibus, quæ de signis demonstravimus: multiplicentur enim propositi factores, & signa omittantur in terminis omnibus, primo excepto, sine ulla controversia positivo. Habebimus productum $6a^2 * 4a^2 * 3a^2 * 2a^2$. Jam vero, cum primus terminus $6a^2$ sextuplus sit producti a^2, aliqui procul dubio ex terminis, qui $6a^2$ subsequuntur, negativi esse debebunt, at nunquam fiet, ut productum illud æquet a^2, nisi medii duo termini negativi sint, & quartus positivus hoc modo $6a^2 - 4a^2 - 3a^2 + 2a^2$, duo autem termini medii productum sunt earum quantitatum, quæ contraria habent signa; extremi vero productum earum, quæ signa habent eadem; ergo etiam hinc patet, certam esse regulam signorum alibi statutam.

19. Cum multiplicationem non facere volumus, sed tantum indicare, tunc supra factorum quemlibet transversam lineam ducimus, interque ipsos ponimus vel punctum, vel signum X: ita $\overline{a+b}\,.\,\overline{c-d}$ seu $\overline{a+b}\times\overline{c-d}$ significat quantitatem $a+b$ per quantitatem $c-d$ multiplicatam. Earundem quantitatum quum volumus indicare potestates, lineola eodem modo pariter ducta supra ipsas, post illam exponentem ponimus; ita $\overline{a+b}^2$ significat quantitatem $a+b$ per se ipsam multiplicatam, seu ejusdem potestatem secundam, seu quadratum; quod ne quæso tirones idem putent esse ac a^2+b^2; longe enim est aliud quadratum integræ quantitatis, aliud summa quadratorum partium ejusdem, quod in numeris etiam videre est: sic etiam $\overline{a+b}^3$ bis in se ductam, seu illius cubum, seu

ſeu poteſtatem tertiam &c.; & $\overline{a+b}^n$ indicat $a+b$ per ſe multiplicatam tot vicibus, quot exprimuntur per $n-1$, ſeu ipſius poteſtatem n.

20. Cum agitur de diviſione, duplex eſt caſus; vel enim diviſor quantatis compoſitæ & ipſe eſt compoſitus, vel ſimplex; in hoc ſecundo caſu ſufficit per diviſorem ſingulos quantitatis compoſitæ terminos dividere; Unde ſi $ab+cb-db$ dividere oporteat per b, erit quotus $a+c-d$, & omnia eo peragentur modo, quo num. 12.; hinc eadem quantitas $ab+cb-db$ per x diviſa dat pro quoto $\frac{ab+cb-db}{x}$: quantitas $ab+bc-cd$ diviſa per b dabit $\frac{ab+bc-cd}{b}$, vel $a+c-\frac{cd}{b}$ quotum partim integrum, partim fractum; quotus denique $eab+dab$ quantitatis diviſæ per abx erit $\frac{c+d}{x}$; quæ omnia ex ſimplicium regulis ſatis patent.

21. At ſi etiam diviſor fuerit compoſitus, tunc hac methodo rem conficimus. Quantitatem utramque dividendam ſcilicet, & eam, per quam dividendum eſt, ſecundum aliqnam litteram, pro ut magis expedit, ordinamus; quod fit, quum poteſtatem maximam illius litteræ ſcribimus tamquam primum terminum, deinde poteſtatem proxime minorem in termino ſecundo, & ſic deinceps: ita quantitas $y^3+xy^2+x^2y+x^3$ dicitur ordinata ſecundum litteram y; ſi vero eamdem ordinare velimus ſecundum x, ſcribendum erit $x^3+x^2y+xy^2+y^3$. Ita rebus diſpoſitis per primum diviſoris terminum primum dividendæ quantitatis terminum dividimus, & quotientem ſeorſim ſcribimus, per quem deinde integrum diviſorem multiplicamus, & quod inde oritur productum e dividendo ſubtrahimus. Subtractione facta primum reſidui terminum per primum diviſoris terminum pariter dividimus, cujus diviſionis quotum juxta quotum antea habitum ſcribimus, eo ſigno affectum, quo gaudet, per eumque diviſore multiplicato, & ſubtracto producto iterum dividimus, & hac lege procedimus uſque dum nihil dividendum ſuperſit; ſumma omnium quotorum partialium erit quotus totalis.

22. Dividere oporteat quantitatem $ba-db-da+a^2$, quam ſcribimus in A, per $b+a$, quam ſcribo in B; ordinetur utraque formula ex. gr. per a, erit prima $a^2+ba-da-db$, quam ſcribo in C, altera, quam ſcribo in E, erit $a+b$. Dividatur modo primus terminus quantitatis, quæ eſt in C nempe a^2, per primum terminum diviſoris nempe per a, & quotus a ſcribatur in D; Deinde per hunc multiplicetur diviſor, qui eſt in E, & productum a^2+ba ſubtrahatur de quantitate poſita in C, erit reſiduum $a^2+ba-da-db-a^2-ba$, ideſt, quoniam quatuor termini a^2+ba-a^2-ba invicem eliduntur, $-da-db$, quod reſiduum, jam per ſe ſecundum a ordinatum, ſcribatur in M, & illius primus terminus $-da$ per a primum diviſoris terminum dividatur; provenit quotus $-d$, quem in D juxta primum quotum ponimus, & per $-d$ multiplicato iterum diviſore, & producto $-da-db$ ſubtracto de quantitate M, reſiduum erit $-da-db+da+db$, hoc eſt zero, adeoque erit quantitas D, ideſt $a-d$ quotus totalis; & revera ſi hanc per diviſorem multiplicemus, reſtituitur integra quantitas A.

A.

$$\begin{array}{ll} A.\ ba-db-da+a^2, & B.\ b+a \\ C.\ aa+ba-da-db, & E.\ a+b \\ \quad -aa-ba & \\ \hline M.\ -da-db & D.\ a-d \\ \quad +da+db & \\ \hline \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

23. Sit dividenda formula in *A* posita per eam, quæ est in *B*. Utraque ordinata est per x: igitur divide $5x^4$ per $5x^2$, & scribe in *D* quotum x^2; per x^2 multiplica divisorem, erit productum $5x^4+x^3a-x^2ab$, quod subtrahe de quantitate *A*, & habebis residuum primum, quod est in *C*: primum ejus terminum $-15x^3a$ divide per $5x^2$, & quotum $-3ax$ scribe pariter in *D*, perque ipsum multiplica iterum divisorem *B*, & productum $-15x^3a-3x^2a^2+3xa^2b$ subtrahe de quantitate *C*, erit *E* residuum secundum. Divide hujus secundi residui terminum primum $-5x^2ab$ per $5x^2$, & quotum $-ab$ scribe in *D*, & tertio multiplica divisorem per ipsum $-ab$, & productum $-5x^2ab-xa^2b+a^2b^2$ subtrahe de quantitate *E*; quoniam residuum tertium est zero, absoluta erit divisio, cujus totalis quotiens est ipsa quantitas $x^2-3ax-ab$ posita in D.

$$\begin{array}{ll} A.\ 5x^4-14x^3a-6x^2ab-3x^2a^2+2xa^2b+a^2b^2, & \big|\ B.\ 5x^2+xa-ab \\ \quad -5x^4-x^3a+x^2ab & \\ \hline C.\ -15x^3a-5x^2ab-3x^2a^2+2xa^2b+a^2b^2 & \big|\ D.\ x^2-3ax-ab \\ \quad +15x^3a \qquad\quad +3x^2a^2-3xa^2b & \\ \hline E.\ -5x^2ab-xa^2b+a^2b^2 & \\ \quad +5x^2ab+xa^2b-a^2b^2 & \\ \hline \quad 0 \qquad 0 \qquad 0 & \end{array}$$

24. Esto tertium exemplum formula $9x^2-y^2+ab$ dividenda per $3x-y$, diviso termino $9x^2$ per $3x$ habemus quotum $3x$, per quem rite multiplicato divisore, & subtracto producto, primum residuum est $3xy-y^2+ab$, & diviso $3xy$ per $3x$, & per quotum y iterum multiplicato divisore, & subtractione facta, erit alterum residuum ab

Quantitas dividenda	$9x^2-y^2+ab$,	Divisor	$3x-y$
Primum residuum	$3xy-y^2+ab$	Quotiens	$3x+y$
Residuum alterum	ab		

Sed quoniam residuum illud ab nullo modo potest per $3x-y$ dividi, patet perfectam divisionem haberi non posse, quare quotus integer erit $3x+y$ una cum fractione $\frac{ab}{3x-y}$. In hoc, & similibus exemplis erit igitur quotus ex integris compositus, & fractis. Scribi etiam poterat quotiens unius tantum fractionis modo $\frac{9x^2-y^2+ab}{3x-y}$, vel ut alii faciunt, $\overline{9x^2-y^2+ab} : \overline{3x-y}$, vel $(9x^2-y^2+ab):(3x-y)$ quæ omnia primam quantitatem innuunt per sequentem divisam.

CAPUT SECUNDUM

Quantitatum Fractarum Algorithmus.

Mirabuntur fortasse aliqui quum viderint, nos in tradendo fractionum algorithmo a multiplicatione & divisione initium facere methodi oblitos, quam & alii in analyticis rebus sequuti sunt, nosque ipsi sequuti sumus capite præcedenti. At quum hi animadverterint, veram methodum postulare, ut a simplicioribus ad ea, quæ minus simplicia sunt, gradus fiat, & in fractionibus simpliciores longe esse multiplicationem & divisionem, quam summam & subtractionem, non erit cur nobis succenseant.

1. Unde oriantur fractiones jam supra docuimus Cap. 1. Num. 13., nunc illud est in memoriam revocandum, quod in proportione geometrica docemur, nempe exponentem rationis, quam habet antecedens ad consequens, nihil esse aliud quam fractionem, cujus numerator est antecedens, consequens denominator; ita exponens rationis a ad b erit fractio $\frac{a}{b}$. Scimus etiam quod si a, & b per eandem quantitatem multiplicentur aut dividantur, non ideo immutatur eorum ratio: atqui per multiplicationem aut divisionem ejusmodi exponentis numerator & denominator multiplicantur aut dividuntur; ergo per hoc quod numerator & denominator cujuscumque fractionis per eandem quantitatem aut multiplicentur aut dividantur, non immutatur fractio; ergo $\frac{a}{b}$, $\frac{ac}{bc}$, $\frac{ad}{bd}$ sunt fractiones æquales.

2. Patet, fractionem æquare unitatem, si numerator denominatorem æquet; superare, si numerator denominatorem superet; deficere vero ab unitate, cum numerator denominatore minor est.

3. Jam vero ut multiplicemus fractionem ex. gr. $\frac{a}{b}$ per quantitatem integram c, sufficit si per c numeratorem multiplices, idest si $\frac{ac}{b}$ scribas; nam $\frac{a}{b}$ in c nihil aliud est, quam productum ex a in c divisum per b, hinc si fractionis multiplicator denominatori esset æqualis, tunc productum erit quantitas integra, quæ numeratoris locum obtinebat; ita $\frac{a}{b}$ in b dabit $\frac{ab}{b}$ idest a.

4. Quum

4. Quum vero diviſio e regione multiplicationi opponatur, ideo ſi fractio ex. gr. $\frac{a}{b}$ dividenda ſit per c, non numeratorem, ſed denominatorem per c multiplicabimus, & erit quotus $\frac{a}{bc}$. Nam quum fractio, multiplicato per eandem quantitatem numeratore & denominatore, non immutetur, diſcimus multiplicationem numeratoris eſſe quid directe contrarium multiplicationi denominatoris. Ergo quum eadem oppoſitio ſit inter multiplicationem & diviſionem, oritur per multiplicationem denominatoris diviſio, ſicuti ex multiplicatione numeratoris orta eſt multiplicatio.

5. Quod ſi ipſam quantitatem integram c per fractionem puta $\frac{a}{b}$ dividere velis, tunc nova exurgit fractio, cujus numerator eſt c; denominator vero $\frac{a}{b}$. Multiplica per b hujus novæ fractionis numeratorem & denominatorem; fiet igitur ille cb, hic autem a (num. 1.) ergo quotiens quæſitus erit $\frac{cb}{a}$. Unde oritur regula univerſalis, quæ docet, tunc dividi quantitatem integram per fractam, quum integra quantitas ducitur in fractionis denominatorem, productumque per numeratorem dividitur.

6. Si fractio per fractionem ſit dividenda ex. gr $\frac{a}{b}$ per $\frac{y}{x}$, tunc habemus fractionem novam, cujus numerator eſt $\frac{a}{b}$, denominator $\frac{x}{y}$: multiplica utrumque per bx, erit numerator ax denominator by, ergo quotus noſter erit $\frac{ax}{by}$. Unde regula univerſalis eſt, tunc fractionem per fractionem dividi, quum numerator dividendæ ducitur in denominatorem dividentis, & denominator illius in hujus numeratorem. Quæ demonſtratio iis etiam accommodari poteſt, quæ de diviſione quantitatis integræ per fractionem dicta ſunt paulo ante, quælibet enim integra quantitas haberi poteſt tamquam fractio, cujus ipſa eſt numerator, denominator unitas.

7. Sicuti autem hæc operatio directe oppoſita eſt illi, qua quis numeratorem per numeratorem, & denominatorem per denominatorem multiplicaret, hinc eſt quod hac via fractionem per fractionis multiplicationem obtinebimus: Ergo $\frac{a}{b}$ in $\frac{y}{x}$ dabit productum $\frac{ay}{bx}$.

8. Quæ hactenus diximus, quamvis ſimplicium quantitatum exemplis earumque poſitivarum ſint declarata, valere tamen in quibuſcumque quantitatibus & fractionibus patet ex vi demonſtrationum, quæ univerſales omnino ſunt; hinc fractio $\frac{a+b}{c-d}$ æquat $\frac{ax+bx}{cx-dx}$, $\frac{yab-cab}{2xab}$ æquat $\frac{y-c}{2x}$, & $\frac{ab-ac}{-xb+xc}$ æquat $\frac{a}{-x}$ ſeu $\frac{-a}{x}$. Pariter a in $\frac{a-x}{c+d}$ dabit $\frac{a^2-ax}{c+d}$, & $\frac{a-x}{c-d}$ diviſa per a erit $\frac{a-x}{ca-ad}$, & a diviſa per $\frac{x+y}{z}$ erit $\frac{za}{x+y}$. Ita $\frac{x+y}{a-z}$ in $\frac{x-y}{a+z}$ dat productum $\frac{x^2-y^2}{a^2-z^2}$. Demum $\frac{x+z}{c}$ diviſa per $\frac{-d^2}{x+z}$ dabit quotum $\frac{\overline{x+z}^2}{-cd^2}$,

seu $\frac{x^2 + 2xz + z^2}{-cd^2}$.

9. Antequam veniamus ad summam vel subtractionem fractionum a fractionibus vel ab integris quantitatibus, regula tradenda est, qua ipsæ fractiones, & integræ quantitates in fractiones mutari possint ejusdem denominatoris, qua tradita nulla superest difficultas. Ut quantitas a in fractionem vertatur, quæ habeat denominatorem communem cum data fractione $\frac{x}{y}$, ipsa quantitas a multiplicetur & dividatur per illius fractionis denominatorem, nempe per y, fietque $\frac{ay}{y}$. Duæ pariter fractiones ad eandem denominationem reducuntur simili ratione. Sint $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}$; multiplica numeratorem, & denominatorem unius per alterius denominatorem, & vice versa; fiet igitur prima $\frac{ay}{by}$, altera $\frac{bx}{by}$, quarum est communis denomioator by.

10. Nulla major est difficultas si fractiones ad eundem denominatorem reducendæ plures sint quam duæ ex. gr. $\frac{3a}{2b}$, $\frac{8a+5c}{a-c}$, $\frac{y}{x}$, possunt enim reduci prius duæ ex. gr. $\frac{3a}{2b}$, $\frac{y}{x}$, quæ in has mutabuntur $\frac{3ax}{2bx}$, $\frac{2by}{2bx}$; Deinde ad eundem denominatorem reducantur $\frac{2by}{2bx}$, & tertia $\frac{8a+5c}{a-c}$, erunt $\frac{2bya - 2byc}{2bxa - 2bxc}$, $\frac{16abx + 10bcx}{2bax - 2bcx}$ ad quem denominatorem perveniet etiam fractio $\frac{3ax}{2bx}$, si per $a-c$ multiplicetur & dividatur, fietque $\frac{3a^2x - 3acx}{2abx - 2bcx}$. Ex his exemplis eruitur regula universalis. Tunc fractiones quotquot sint ad eandem denominationem rediguntur, si denominator communis fiat productum omnium denominatorum, & quisque numerator multiplicetur per productum reliquorum denominatorum dempto peculiari fractionis, cujus multiplicatur numerator.

11. Sint ad eandem denominationem reducendæ fractiones tres $\frac{c}{a+b}$, $\frac{y^2}{a-b}$, $\frac{x+z}{u}$; quare productum trium denominatorum erit illud $a^2u - b^2u$, hic ergo erit communis denominator; multiplica nunc c per productum $\overline{a-b}.u$ nempe $au - bu$, fiet fractio prima $\frac{cau - cbu}{a^2u - b^2u}$, multiplica y^2 per $au + bu$, erit altera fractio $\frac{y^2au + y^2bu}{a^2u - b^2u}$, multiplica $x + z$ per $a^2 - b^2$, erit denique fractio tertia $\frac{a^2x + a^2z - b^2x - b^2z}{a^2u - b^2u}$, & ita tres datæ fractiones, quarum valor idem est qui antea, ad eundem denominatorem perductæ sunt.

12. Nitidius procedit res, cum denominator fractionis alicujus est factor denominatoris

nominatoris alterius, ut contingit in duabus $\frac{a}{b}$, $\frac{cx}{yb}$, ubi b factor eſt denominatoris yb; tunc enim altero factore y adhibito, & per illum tota fractione $\frac{a}{b}$ multiplicata habemus intentum.

13. Cum fractiones ad eundem denominatorem ſcimus reducere, tunc nullo negotio fiet earum ſumma, & ſubtractio. Si quæratur ſumma fractionum $\frac{c}{b}$, $\frac{x}{a-b}$, $\frac{z+d}{u}$, reducantur ad eundem denominatorem, & in has mutentur, $\frac{cau-cbu}{bau-b^2u}$, $\frac{xbu}{bau-b^2u}$, $\frac{zab+dab-zb^2-db^2}{bau-b^2u}$, deinde fiat omnium numeratorum ſumma, ex cap. præc., eique communis denominator linea interpoſita ſupponatur, erit ita ſumma, quam quærebamus,

$$\frac{cau-cbu+bxu+zab+dab-zb^2-db^2}{bau-b^2u}.$$

Subtrahi debeat fractio $\frac{c}{b}$ de $\frac{x+z}{a+u}$. Reductæ ad eundem denominatorem erit prima $\frac{ac+uc}{ba+bu}$, altera $\frac{bx+bz}{ba+bu}$; nunc ſi primæ numerator a numeratore alterius ſubtrahatur, & reſiduo ſubſcribatur communis diviſor, facta erit ſubtractio. Erit igitur $\frac{bx+bz-ac-cu}{ba+bu}$.

14. Supereſt ut de fractionibus ad ſimpliciorem formam reducendis agamus, quod ſane non levis momenti eſt æſtimandum. Diximus initio hujus capitis fractionis valorem integrum manere, ſi per eandem quantitatem cum numerator, tum denominator dividatur. Si quando accidit, ut per communem quantitatem dividi uterque poſſit, peracta diviſione fractio in aliam vertetur ejuſdem quidem valoris, ſed terminis ſimplicioribus; ex. gr. ſi fractionis $\frac{ab}{cb}$ numerator, & denominator dividatur per b, ea vertitur in $\frac{a}{c}$, quæ ſimplicior eſt. Quo autem major erit quantitas, per quam fractio ita dividitur, eo evadet ſimplicior, ita ut ſi diviſor ſit maximus, fractio ad minimos terminos redigetur; ita fractionis $\frac{abn+cbn}{xbn}$ numerator & denominator dividi poſſunt per n adeoque ſimpliciter erit fractio $\frac{ab+cb}{xb}$; at hujus quoque numerator & denominator ſunt per b diviſibiles, ergo ſimplicior erit fractio $\frac{a+c}{x}$; quam fractionis formam initio habuiſſes, ſi datam fractionem non per n ſed per bn diviſiſſes, qui diviſor bn cum in caſu maximus ſit, $\frac{a+c}{x}$ erit maxime ſimplex fractionis forma.

15. Non tamen primo poteſt intuitu cognoſci, quinam ſit maximus quantitatum diviſor, quamvis revera formulæ ſint diviſibiles; ſed antequam de hoc agamus, ſit hujuſmodi Lemma. Si duæ quantitates A major, & B minor ſint exacte diviſibiles per quantitatem P, dico diviſa A per B, ſi quod ſupereſt reſiduum C, illud etiam fore exacte diviſibile per P.

A B
C D
P

Demon-

Demonſtratio. Quotiens ex diviſione A per B ſit m: ergo $mB+C$ æquabit A: ergo cum A dividi poſſit exacte per P, etiam $mB+C$ per eandem P exacte dividi poterit; ſed etiam B exacte dividitur per P atque adeo etiam mB: ergo per P neceſſe eſt dividatur exacte reſiduum C. Quod &c.

16. Corolarium primum. Quoniam B & C exacte dividi poſſunt per P, ſi B per C dividatur ita ut reſiduum ſit D, ſequitur ex ſuperiore demonſtratione etiam D eſſe exacte diviſibile per P. Pariter dividi exacte poterit per P reſiduum E, quod ſupereſt facta diviſione C per D; & ita porro uſque dum ad reſiduum veniamus, quod ſit zero.

17. Corolarium ſecundum. Duo hic poſſunt accidere; etenim vel ultimum reſiduum quantitati P eſt æquale vel majus; nam minus eſſe nunquam poterit, quum per P reſidua omnia exacte dividantur. In primo caſu erit P maximus communis diviſor quantitatum A, B; quandoquidem major quantitas exacte reſidua omnia dividere non poteſt, quum ultimum non poſſit. In caſu altero erit quidem P diviſor communis, quum ultimum reſiduum exacte dividat, ſed non erit maximus, nam ipſæ quantitates A, B dividi poſſent per reſiduum illud ultimum.

18. Scolium. Diviſimus hic B per C, C per D, quia ſuppoſuimus reſidua ſucceſſive decreſcere. Cœterum ſi quando accidat, ut aliquod reſiduum ex. gr. D majus eſſet quam C, tunc eſſet facienda diviſio D per C, & reſiduum æque diviſibile eſſet per P, ut ex lemmate conſtat.

19. Hoc lemmate praxis continetur, qua maximus duarum quantitatum diviſor invenitur, quæ antea ſine demonſtratione exhiberi conſueverat. Quæratur communis diviſor formularum A, B quæ ſecundum litteram x ſint ordinatæ,

		Quoti
A. $-x^3+ax^2-c^2x+ac^2$	B. $-x^2+\overline{a-y}\,.\,x+ay$,	x
M. $-x^3+ax^2-yx^2+ayx$	Q. $-x^2+ax$,	$-y$
C. $yx^2+\overline{c^2+ay}\,.-x+ac^2$	E. $-yx+ay$,	$\frac{x}{c^2+y^2}$
N. $yx^2-ayx+y^2x-ay^2$	P. $-x+a$,	
	K. $-x+a$,	$\frac{1}{c^2+y^2}$
D. $\overline{c^2+y^2}\,.-x+ac^2+ay^2$	$0 \quad 0$. ,	

Divide primum terminum formulæ A per primum formulæ B, quoniam in illo x majorem obtinet poteſtatem, & quoti x productum in diviſorem B, nempe quantitatem M ſubtrahe de A, reſiduum erit C. Hoc reſiduum C divide eodem modo per B, & ab illo ſubtrahe quantitatem N, quæ eſt productum ex B in quotum $-y$, ſic habebis alterum reſiduum D. Nunc quoniam in hoc reſiduo minor eſt x dignitas, quam in B, ideo inverte ordinem, & B divide per D, atque inde ſubtrahe Q productum ex D in quotum $\frac{x}{c^2+y^2}$, tertium reſiduum erit E, quo diviſo per y, reperitur enim in terminis omnibus, habes quantitatem P. Hanc pariter divide per D, & ex ea ſubtrahe productum ex D in quotum $\frac{1}{c^2+y^2}$ hoc eſt K, reſiduum erit zero; igitur quantitas P erit communis diviſor, quem poſtulabas. Ratio patet ex Lemmate jam demonſtrato; ſed ut magis rem teneas, ſic argumentemur. Si P diviſo per D reſiduum eſt zero: ergo P exacte dividit D:

ergo

ergo pariter exacte dividet D ductum in $\frac{x}{c^2+y^2}$ hoc est quantitatem Q; Et quoniam P dividit eodem modo E, exacte dividet etiam Q+E idest B: ergo etiam B ductum in y seu N; ergo etiam N+D seu C exacte per P dividetur; sed pariter B in x idest M exacte per P dividitur; ergo etiam M+C, quod idem est ac A; ergo & A, & B exacte dividuntur per P, adeoque P communis est earum formularum divisor; sed & maximus sit oportet; nulla enim alia quantitas perfecte residuum postremum divideret, id quod communis divisionis naturam postulare jam vidimus.

20. Reperiendus nunc sit communis divisor formularum Q, P, quæ secundum b sunt ordinatæ.

$$\text{Q}.\, ab^2 - b^2 f + ax^2 - fx^2 \qquad \text{P}.\, ab - bf + ca - cf \,\Big|\, \begin{matrix} b \\ -c \end{matrix}$$
$$\text{C}.\, -cab + cfb + ax^2 - fx^2$$
$$\text{D}.\, ax^2 - fx^2 + c^2 a - c^2 f$$

Si Q per P dividatur, erit primum residuum C, quo pariter diviso per P, prodit residuum alterum D, quod non ultra potest per P dividi ordinatum secundum b. Non ideo tamen inferi debet quantitates Q, P nullum habere communem divisorem; nam si per litteras a vel f ordinentur, communis earum divisor $a-f$ invenietur. Ratio autem est, quia ut divisor communis reperiatur, necesse est formulas secundum aliquam divisoris litteram ordinari, quod ex hoc ipso exemplo satis infertur; & quoniam nescimus, quæ litteræ in divisore contineantur, ideo antequam nullum hujusmodi esse pronunciemus, formulæ secundum litteras omnes erunt ordinandæ, quo facto si divisor communis non prodeat, tunc nullum revera esse constabit.

21. Quamvis quantitas aliqua ex. gr. c dividi non possit exacte per aliam $a+b$ & scribere cogamur $\frac{c}{a+b}$, ut quotum ex divisione indicemus, tamen in his etiam quantitatibus habere possunt locum regulæ, quæ de divisione sunt traditæ. Igitur divisa c per a, quotus est $\frac{c}{a}$, hujus productum in divisorem subtrahe ut docuimus de c, erit residuum $\frac{-cb}{a}$, quod iterum per a divisum dat quotum $\frac{-cb}{a^2}$, hic in divisorem ductus dat productum $\frac{-cb}{a}$ $\frac{-cb^2}{a^2}$, quod de more subtrahe ex $\frac{-cb}{a}$, habebisque residuum $\frac{cb^2}{a^2}$, quod si pariter dividas per a, erit quotus $\frac{cb^2}{a^3}$, & sic deinceps operatione methodo eadem producta ibit divisio in infinitum & quotus integer fractionis $\frac{c}{a+b}$, æqualis erit seriei infinitis terminis constanti $\frac{c}{a}$ $\frac{-cb}{a^2}$ $\frac{+cb^2}{a^3}$ $\frac{-cb^3}{a^4}$ $\frac{+cb^4}{a^5}$ &c.

22. Nunc si a & b æquales quantitates essent, fractio nota $\frac{c}{a+b}$ evaderet

ret $\frac{c}{2a}$, series vero in hanc mutaretur $\frac{c}{a} \frac{-c}{a} \frac{+c}{a} \frac{-c}{a} \frac{+c}{a}$ &c.; cujus si termini vel duo, vel quatuor, vel quolibet numero pares in summam colligantur, erit ea zero æqualis; at si fiat summa terminorum vel unius, vel trium, vel quorumcumque libuerit numero imparium, initio a primo facto, erit summa $\frac{c}{a}$; quæ per se clarissima nemini dubium creare possunt. Jam si utramque summam comparemus cum vero valore $\frac{c}{2a}$, statim cognoscimus, parium summam seu zero ab eo deficere per $\frac{c}{2a}$; summam vero imparium nempe $\frac{c}{a}$, eadem quantitate illum excedere, & ita rem se haberet quæcumque accipiatur vel parium, vel imparium terminorum summa. Hac de caussa dicitur hæc series paralella.

23. Quod si fingamus b majorem esse quam a, tunc seriei nostræ termini successive crescant necesse est, cum sequens terminus nihil aliud sit quam terminus antecedens ductus in $\frac{b}{a}$, quæ quantitas in hac hypotesi erit unitate major; ergo tum summa parium terminorum, tum summa imparium magis ac magis semper recedet a vero fractionis valore, illa quidem per defectum, hæc per excessum. Hujusmodi series divergens apellatur.

24. Si tertio supponamus b minorem quam a, termini successive decrescent, adeoque summæ, de quibus dictum est, quo plures terminos colligent, eo ad fractionis valorem accedent magis, cujus accessus caussa series converg ns dicitur.

25. Series igitur tum paralella tum divergens nunquam aptæ erunt valorem fractionis neque verum, neque vero proximum exhibere; at egregie id præstabit convergens, eoque exactius, quo pluribus terminis summa constabit; ita enim adeo accedet summa terminorum parium ad quæsitum valorem, ut ab illo per minimam quantitatem deficiat, & contra ita accedet summa terminorum imparium, ut illum minima quantitate superet, & utraque quantitas tum defectus tum excessus tuto contemni possit. Illud est etiam animadvertendum, quod quo majorem rationem a habet ad b, eo etiam magis termini successive decrescunt; ideoque pauciores termini requirentur, ut proximus fractionis valor obtineatur.

26. Si in fractione esset b quantitas negativa, hoc est si esset $\frac{c}{a-b}$, tunc termini seriei omnes positivo signo afficerentur, quemadmodum ex operatione constare poterit, & hoc casu quælibet terminorum summa a vero valore semper deficeret, sed quo plures sumerentur termini, eo magis ad illum accederet.

27. Quamvis autem fractio, quam in seriem redegimus, numeratorem habeat simplicem c & denominatorem binomium $a+b$, non ideo tamen hæc methodus ad hujusmodi tantum fractiones extenditur, sed æque omnes complectitur. Ratio hujus est, quia numerator quilibet ad unicum terminum, quilibet denominator ad binomium perduci nullo negotio potest. Sit enim fractio $\frac{c+d-e}{a+b+x+z}$, si ponamus numeratorem $c+d-e$ æqualem esse quantitati n, & $a+b+x$ æqualem quantitati m, fractio in hanc vertitur $\frac{n}{m+z}$. Quæ eandem omnino formam habet ac illa, de qua supra loquuti sumus; hac igitur tradita methodo in seriem redacta, & substitutis deinde valoribus m & n, habebimus seriem fractioni $\frac{c+d-e}{a+b+x+z}$ respondentem.

CA-

CAPUT TERTIUM.

Quantitatum radicalium algorithmus.

QUid sint, & quomodo oriantur alicujus quantitatis potestates, dictum est supra Cap. I. num. 10. Nunc illud est animadvertendum, quod quantitas, ex qua oritur potestas, positiva esse potest, vel negativa. Si primum, patet potestatem quamlibet fore qnantitatem positivam, veluti a^2, a^3, a^{-2}, a^{-3}, quæ sunt a positivæ quantitatis potestates, & ratio est, quia in hisce potestatibus efficiendis semper positivum ducitur in positivum. At si alterum accidat, tunc distinguendæ sunt potestates pares, nempe quarum exponens est numerus par, ab imparibus, quarnm est exponens numerus impar; nam primæ semper exhibebunt quantitatem positivam, quum in illis negativum semper ducatur in negativum, reliquæ vero dabunt quantitatem negativam, quia in illis semper quantitas negativa per positivam multiplicatur; igitur quantitatis $-a$ potestas secunda a^2 erit quantitas positiva, quia oritur ex $-a.-a$, at potestas tertia, quæ oritur ex $a^2.-a$, erit quantitas negativa idest $-a^3$. Ex hoc sequitur, quamlibet potestatem parem n quantitatis cujuslibet $a+b$ æque oriri posse ex $-a-b$, adeoqne $\overline{a+b}^n$, $(\overline{-a-b}^n$ eandem positivam quantitatem significare; impossibile igitur omnino erit, quantitatem aliquam reperire vel positivam, vel negativam, cujus potestas par sit quantitas negativa; ex quo facile est inferre, quantitatem ver. gr. $-a^2$ nullius quantitatis esse potestatem, sed tantum productum ex $-a.a$.

2. Adverte, ad designandam potestatem n quantitatis negativæ $-a-b$ usos nos fuisse lunula (, & scripsisse $(\overline{-a-b}^n$. Hoc signum introducimus ad tollendam æquivocationem, quæ illo non adhibito facile oriri posset. Etenim $-a^n$ duo posset significare, nempe aut potestatem n quantitatis a signo $-$ afficiendam, aut $-a$ elevandam esse ad potestatem n; quæ duo cum admodum sint diversa, necesse est ita scribendo distinguere, ut confundi non possint. Morem hunc itaque tenemus, cum lunulam non usurpamus, intelligimus quantitatem positivam a esse ad indicatam potestatem elevandam, & potestati signum illud præfigendum, quod scriptum legitur; ita $+a^n$, vel a^n est a elata ad potestatem n, quæ potestas afficitur signo $+$, & $-a^n$ eadem est a ad eandem elata potestatem, quæ potestas signo $-$ afficitur. Scribimus autem lunulam quoties quantitates negativæ ad potestatem sunt elevandæ; quo in casu signum $-$, quod est post lunulam, afficit ipsam quantitatem elevandam, signum vero, quod est ante lunulam respicit ejus quantitatis potestatem. Ita $+(-a^n$ indicabit potestati n quantitatis $-a$ præfigendum esse signum $+$; contra $-(-a^n$ potestati eidem præponi debere signum $-$. Hoc autem facimus vel potestates simplices sint, vel binomiæ &c.; quare $+\overline{a-b}^n$ indicabit potestatem n quantitatis $a-b$ signo $+$ afficiendam, con-

tra — $(\overline{a-b}^n$ eidem proponendum fignum —. At + $(\overline{-a-b}^n$ oftendet — a — b efferendam ad poteftatem n, cui dandum fignum +, contra eidem præponendum fignum —, fi fcribas — $(\overline{-a-b}^n$.

3. Quum itaque poteftates difpares, fi exhibeant quantitates negativas, a quantitatibus negativis ortum ducant, & fi pofitivas, a pofitivis, ideo ut fubtrahamus $(\overline{-a-b}^3$ de c^3, manifeftum eft nos poffe fcribere $c^3 + \overline{a+b}^3$; nam cum quantitas $-a-b$ ad tertiam poteftatem producta, ex dictis, habeat terminos omnes negativos, hi, quum fubtrahuntur, pofitivi efficiantur neceffe eft; ergo idem erit fubtrahere $(\overline{-a-b}^3$, ac addere $\overline{a+b}^3$. Eadem ferme de caufa fi de c^3 velimus fubtrahere $\overline{a+b}^3$, fcribere poffumus $c^3 + (\overline{-a-b}^3$, quod fatis patet. At non eadem methodo uti poffumus, quum agitur de paribus poteftatibus fubtrahendis; neque enim fi detrahenda fit poteftas $\overline{a+b}^2$, vel $(\overline{-a-b}^2$ de c^2, fas erit fcribere $c^2 + (\overline{-a-b}^2$ in primo cafu, aut $c^2 + \overline{a+b}^2$ in fecundo: nam licet mutentur figna quantitatis, unde poteftas par oritur, non ideo, ut oftenfum eft, immutatur ipfius poteftatis quantitas, quæ femper eadem perfeverat, & cum iifdem fignis; quapropter $c^2 + \overline{a+b}^2$, $c^2 + (\overline{-a-b}^2$ funt una, eademque quantitas. De fubtractione tantum fermo fuit, quia in additione, quum figna mutari non debeant, nullum erroris habetur periculum.

4. Sicuti quælibet quantitas ad quamcumque dignitatem evehi poteft, ita quælibet quantitas poteft effe dignitas, vel poteftas quæcunque relate ad diverfas quantitates: ita a^6 (Num. 10. c. 1.) eft poteftas fexta relate ad a, poteftas tertia feu cubus relate ad a^2, poteftas fecunda feu quadratum relate ad a^3, & poteftas prima ipfius a^6. Quantitas vero illa, cujus refpectu quantitas aliqua dicitur effe poteftas, vocatur ejus poteftatis radix, & quidem eo nomine quo vocatur poteftas. Exemplo res fit clarior. Diximus a^6 effe quadratum, vel fecundam poteftatem relate ad a^3; ita erit a^3 radix quadrata feu fecunda relate ad a^6; pariter a^2 erit ipfius a^6 radix tertia, feu cubica, quia a^6 eft cubus, feu poteftas tertia quantitatis a^2; fic a erit radix fexta a^6; & in genere dicitur radix n quantitas quæcunque refpectu alterius, quæ illius fit poteftas n.

5. Occurrit hic ftatim per fe, operationes directe contrarias effe, quantitatem ad poteftatem erigere, & ejus radices extrahere. Ut igitur has inveniamus, methodo utamur neceffe erit omnino illi contraria, qua illas obtinuimus; quapropter, ficuti in quantitate ad aliquam poteftatem erigenda (Cap. 1. num. 11.) exponentem quantitatis per novæ poteftatis exponentem multiplicavimus, ita per radicis indicem, feu exponentem oportebit illum dividere, ut quæfitam poteftatis radicem habeamus: igitur ficuti ut inveniremus quantitatis a poteftatem fextam fecimus $a^{1.6}$ feu a^6, ita fi agatur de extrahenda ex a^6 radice fexta fiet $a^{\frac{6}{6}}$ ideft a^1 feu a, quæ eft ejus poteftatis radix fexta; pariter ut extraha-

trahamus ex a^6 radicem tertiam, ſcribemus $a^{\frac{6}{3}}$, ſeu a^2, ut extrahamus ſecundam $a^{\frac{6}{2}}$ ſeu a^3, & ſic de cæteris.

6. Quoad ſigna radicibus præfigenda, animadvertendum eſt quantitatem, ex qua radix educitur, poſitivam eſſe poſſe, & negativam. Si primum, tunc vel radicis index impar eſt, vel par; ſi impar ſit, poſitivo ſigno affici debet radix, ſi par, tunc radicis valor non unus erit, ſed duplex alter poſitivus, negativus alter; patent omnia ex num. 5; hinc ad ambas radices indicandas utimur utroque ſigno $\pm$, ita radix ſecunda poteſtatis a^2 erit $\pm a$, quo modo indicatur duplicem eſſe radicem nempe a, & $-a$. Si vero, qui eſt caſus alter, quantitas, ex qua radix extrahi debet, fuerit negativa, iterum vel radicis index eſt impar, vel par: ſi impar, radix erit negativa, ſi par radix erit impoſſibilis, & imaginaria; talis eſſet radix ſecunda quantitatis $-a^2$, quæ neque $-a$, neque a poteſt eſſe, ut ſupra oſtendimus.

7. Ex methodo, qua radices inquirimus, ex diviſione ſcilicet exponentium poteſtatis per radicis quæſitæ indices, diſcimus quantitatis radicalis exponentem eſſe quotum ex ea diviſione ortum. Ita radix tertia $\overline{a+b}^6$, quum ſit $\overline{a+b}^{\frac{6}{3}}$, id eſt $\overline{a+b}^2$, habet exponentem 2 quotum ex diviſione 6 per 3. At quotus iſte ſæpiſſime numerus integer eſſe non poteſt; ergo tunc quantitatis radicalis exponens fractus ſit oportet; ita accidit, ſi ex. gr. quæramus radicem ſecundam $\overline{a+b}^3$; hæc enim nullo alio modo exprimi poteſt niſi hoc $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$. Scimus igitur quid ſint poteſtates exponente fracto affectæ, quæ etiam poteſtates imperfectæ appellantur; eæ nil aliud ſunt niſi radices. Juxta hæc $a^{\frac{4}{3}}$ indicabit radicem tertiam poteſtatis a^4, & in genere $\overline{b+c}^{\frac{m}{n}}$ indicabit radicem n quantitatis $b+c$ erectæ ad poteſtatem m.

8. Ad haſce radices, ſeu imperfectas poteſtates indicandas hoc etiam utimur ſigno $\surd$, quod ſignum radicale appellatur. Sub quo ſcribitur quantitas unde radix erat extrahenda, ſupra vero radicis indicem, quam extrahere volebamus; unde $\sqrt[2]{\overline{a+b}^3}$ idem eſt ac $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{a^4}$ idem ac $a^{\frac{4}{3}}$, $\sqrt[n]{\overline{b+c}^m}$ idem ac $\overline{b+c}^{\frac{m}{n}}$. In exemplo primo omittere poteram exponentem 2, quia jam uſus obtinuit, ut ubicumque reperitur ſignum radicale ſine exponente, ſubintelligatur exponens 2. Nil prohibet, quominus hiſce duobus modis indicemus etiam radices impoſſibiles & imaginarias, qualis eſſet radix quadrata $-a^2$, aut radix n (poſito n numero pari) poteſtatis $-a^m$, nil prohibet, inquam, quominus eas ita ſcribamus $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[n]{-a^m}$. At ſi has imaginarias radices velimus per exponentes fractos exprimere, artificio opus eſt, ne in æquivocas formulas incidamus. Sit extrahenda radix quadrata quantitatis $-a^2$, ſi ſcribamus $-a^{\frac{2}{2}}$ incer-

certum erit utrum hæc formula indicet $-a$, vel secundam radicem quantitatis $-a^{2}$; quare ad confusionem vitandam duplici utemur lunula ita $(\overline{-(a^{2}}^{\frac{1}{2}}$, aut spectata $-a^{2}$ tamquam producta ex $a^{2}.-1$, tum radix hoc modo extrahenda $\pm a^{\frac{2}{2}}.(-1^{\frac{1}{2}}$, aut $\pm a.(-1^{\frac{1}{2}}$. Idem de radice n pari quantitatis $-a^{m}$ dicendum est; itaque scribemus $\pm(\overline{-(a^{m}}^{\frac{1}{n}}$, seu $\pm a^{\frac{m}{n}}(-1^{\frac{1}{n}}$.

9. Quum ex supra dictis Num. 9. Cap. 2. sciamus fractiones ad eandem denominationem reducere, quin earum valor immutetur, sciemus etiam reducere ad exponentes ejusdem denominationis quascumque potestates. Etenim quum exponentes, vel fractiones sint vel numeri integri, qui in cujuscunque denominatoris fractiones nullo negotio resolvuntur, iisdem prorsus regulis, quæ pro fractionibus traditæ sunt, rem conficiemus. Sint reducendæ ad eundem denominatorem $\sqrt[3]{\overline{a+b}^{2}}$, $\sqrt{x+y}$, seu $\overline{a+b}^{\frac{2}{3}}$, $\overline{x+y}^{\frac{1}{2}}$; nil aliud agendum, quam reducere fractiones $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{2}$, quæ quum, juxta regulas traditas, vertantur in $\frac{4}{6}$ & $\frac{3}{6}$, erunt radices nostræ $\overline{a+b}^{\frac{4}{6}}$ seu $\sqrt[6]{\overline{a+b}^{4}}$, $\overline{x+y}^{\frac{3}{6}}$ seu $\sqrt[6]{\overline{x+y}^{3}}$ ad eandem denominationem, & indicem deductæ, quin ulla in ipsarum valore sit facta immutatio. Hinc discimus etiam regulam expeditissimam redigendi radices ad eundem indicem, quum ex radicalibus signis indicantur: nempe productum indicum erit index communis, & exponens quantitatis, quæ sub altero signorum est, ducendus erit in alterius indicem; sic $\sqrt[m]{x^{u}}$ & $\sqrt[n]{y^{r}}$ vertentur in has $\sqrt[mn]{x^{un}}$, & $\sqrt[mn]{y^{mr}}$. Si radices plures essent quam duæ, duabus ad eundem indicem prius deductis reliquas deinde aggrediemur, quemadmodum de fractionibus Num. 10. Cap. 2. dictum est.

10. Si vero radicalis alicujus index sit perfectus alterius divisor, ut esset in his $\sqrt[2]{\overline{a+b}^{3}}$, $\sqrt[6]{\overline{a+y}^{7}}$, tunc satis erit multiplicare indicem 2 per 3 quotum ex divisione majoris indicis per minorem, & quantitatem sub signo positam ad potestatem erigere per quotum illum 3 indicatam; erunt igitur radicales $\sqrt[6]{\overline{a+b}^{9}}$, $\sqrt[6]{\overline{a+y}^{7}}$, quæ habent indicem omnino eundem. Patet hoc si radices alio, quem diximus, modo scribantur; tunc hanc formulam habebunt $\overline{a+b}^{\frac{3}{2}}$, $\overline{a+y}^{\frac{7}{6}}$: redige exponentes ad eundem denomitorem, quod obtines multiplicando per 3 numeratorem, & denominatorem fractionis $\frac{3}{2}$; fient $\overline{a+b}^{\frac{9}{6}}$, $\overline{a+y}^{\frac{7}{6}}$, quæ si scribantur cum radicali signo, dant easdem, quas antea invenimus radices.

11. Ut summam radicum habeamus, ipsæ alia post aliam scribantur cum suis signis; ut habeamus diferentiam mutentur earum signa, quæ subtrahendæ sunt, quema-

quemadmodum in aliis quantitatibus factum est. Duo hic animadvertere oportet, primum est nos hic loqui de signis non quæ sub signo radicali posita sunt, sed de iis quæ illud afficiunt; alterum est terminos similes ad eundem esse reducendos. En exempla.

Summandæ $\sqrt[2]{ab} + c$

sint $-2\sqrt[2]{ab} - \sqrt[3]{abc}$

Summa $c - \sqrt[2]{ab} - \sqrt[3]{abc}$

Summandæ $3\sqrt[2]{ab} - \sqrt[3]{abc}$

sint $-4\sqrt[2]{ab} + 2\sqrt[3]{abc}$

Summa $-\sqrt[2]{ab} + \sqrt[3]{abc}$

Summandæ $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}} + c^{\frac{3}{2}}$

sint $\overline{a+b}^{\frac{3}{4}} - c^{\frac{3}{2}}$

Summa $2.\overline{a+b}^{\frac{3}{4}}$

Hinc subtrahi $\sqrt[2]{xy} + c$

debeat $\sqrt[3]{cx} + y$

Differentia $\sqrt[2]{xy} + c - \sqrt[3]{cx} - y$

Hinc subtrahi $4\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb}$

debeat $2\sqrt{ac} + 3\sqrt[3]{acb}$

Differentia $2\sqrt{ac} - 6\sqrt[3]{acb}$

Hinc subtrahi $-\frac{1}{3}\,(\overline{x+y}^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}$

debeat $-\,(\overline{x+y}^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}z^{\frac{1}{2}}$

Differentia $\frac{2}{3}\,(\overline{x+y}^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{4}z^{\frac{1}{2}}$.

12. Radices si potestatum more sint expressæ, eodem plane modo multiplicantur, ac reliquæ potestates Cap. 1. Num. 11.; igitur $a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}$ sive $\overline{ab}^{\frac{1}{2}}$ erit productum ex $a^{\frac{1}{2}}$ in $b^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ in $a^{\frac{2}{3}}$ dabit $a^{\frac{3}{3}}$ idest a; $x^{\frac{1}{n}}$ in $y^{\frac{1}{n}}$ dabit productum $x^{\frac{1}{n}}\,y^{\frac{1}{n}}$ seu $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$, sed $x^{\frac{1}{n}}$, $y^{\frac{1}{n}}$ sunt idem ac $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{y}$, & earum productum $\overline{xy}^{\frac{1}{n}}$, idem

idem ac $\sqrt[n]{xy}$; ergo hinc discimus, radices expressas per signum radicale, si ejusdem sint indicis, tunc multiplicari, quum retento indice eodem inter se quantitates multiplicantur, & earum productum signo subjicitur; si radices coefficientes habeant, ij quoque sunt inter se multiplicandi: ita productum radicum $a\sqrt[n]{x}$, $2\sqrt[n]{y}$ erit $2a\sqrt[n]{xy}$; $5\sqrt{a}$ in $4\sqrt{b}$ dabit $20\sqrt{ab}$. Diligenter notandum est, productum ex $\pm\sqrt{b}$ in $\pm\sqrt{b}$ esse $\pm\sqrt{b^2}$ id est $\pm b$ cum signo duplici, quod, quum de radicibus agitur, nullo modo est prætermittendum. Diximus supra si radices ejusdem sint indicis; nam si non essent tunc prius ad eundem essent reducendæ, ut docuimus Num. 9., quod etiam dictum intellige, quando radices per exponentes fractos, & litteras easdem exhibentur; tunc enim ad eundem denominatorem exponentes redigere oporteret, ut summa eorum haberi posset.

13. Quum $\sqrt[n]{x}$ in $\sqrt[n]{x}$ det $\sqrt[n]{x^2}$, quod erit ejus radicis $\sqrt[n]{x}$ quadratum, & $\sqrt[n]{x^2}$ in $\sqrt[n]{x}$ det $\sqrt[n]{x^3}$, qui est ejusdem radicis cubus &c. sequitur nil aliud requiri ad radicem erigendam ad potestatem quamcumque m, quam erigere ad dictam potestatem m quantitatem sub signo radicali positam; ita $\sqrt[n]{x}$ ad potestatem m evecta erit $\sqrt[n]{x^m}$; & sicuti $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{x^m}$ æquivalent his $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{m}{n}}$, patet multiplicandum esse exponentem fractum per m, ut radicem sub hac forma ad potestatem m perducamus. Idem omnino dicendum est, quæcunque sit ista potestas m seu integra, seu fracta. Si radices præditæ sint coefficientibus, ipsi quoque ad potestatem erigendi erunt, ad quas radices perducuntur; ergo $a\sqrt[n]{y}$ seu $a y^{\frac{1}{n}}$ erecta ad potestatem m erit $a^m\sqrt[n]{y^m}$, seu $a^m y^{\frac{m}{n}}$, quod etiam hoc modo indicatur $\overline{a y^{\frac{1}{n}}}^{m}$.

14. Ut quantitas radicalis ad potestatem attollatur, cujus exponens sit ipsius radicis index, sufficit ejicere signum radicale: ita $\sqrt[n]{x}$ erecta ad potestatem n est x. Id etiam fiet, si quando accidat, ut ex multiplicatione ad ejusmodi potestatem perveniat; ita $\sqrt[6]{a^2}$ in $\sqrt[6]{a^4}$ dat $\sqrt[6]{a^6}$ id est $a^{\frac{6}{6}}$ quod idem est ac a. At hic attente signa sunt consideranda, ut errorem omnem vitemus. Itaque ut regulam certam habeas, illud animadverte, quod alibi monuimus, id est quamlibet quantitatem intelligi multiplicatam in unitatem, quæ unitas eo signo afficiatur, quo ipsa quantitas; ergo $\sqrt[n]{a+b}$ considerabitur tamquam $1.\sqrt[n]{a+b}$, & $-\sqrt[n]{a+b}$ tanquam $-1.\sqrt[n]{a+b}$; quare productum ex $\sqrt[n]{a+b}$ in $-\sqrt[n]{a+b}$ idem erit ac productum $1.\sqrt[n]{a+b}$ in $-1.\sqrt[n]{a+b}$, quod est $-1.\overline{a+b}$, id est $-a-b$.

15. Contraria methodo uti oportet, quum de radicibus dividendis agitur. Vel ergo radices exhibentur cum exponentibus, & tunc fit earum divisio, quemadmodum fit divisio potestatum integrarum; vel exprimuntur per signum radicale, & tunc

& tunc si radices ejusdem sint indicis, dividitur quantitas existens sub signo in radice dividenda per eam, quæ est sub signo in dividente, & coefficiens illius, si adsit per hujus coefficientem; si vero habeant indices diversos, vel ad eundem reducuntur, vel indicatur divisio more reliquarum fractionum. Ex his descendit $a^{\frac{3}{4}}$ devisam per $a^{\frac{1}{4}}$ dare quotientem $a^{\frac{2}{4}}$, sive $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{3}{4}}$ per $b^{\frac{2}{3}}$ dare quantitatem $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ sive $a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}$; $\overline{bx}^{\frac{1}{n}}$ per $ax^{\frac{1}{n}}$ sive $b^{\frac{1}{n}}.x^{\frac{1}{n}}$ per $ax^{\frac{1}{n}}$ quotientem $\frac{b^{\frac{1}{n}}}{a}$; quotientem ex divisione $ab\sqrt[n]{xy}$ per $-b\sqrt[n]{x}$ esse $-a\sqrt[n]{y}$; ex $a^2\sqrt[n]{cd}$ per $a^2\sqrt[n]{fg}$ esse $\sqrt[n]{\frac{cd}{fg}}$; ex $x\sqrt[n]{a}$ per $y\sqrt[n]{b}$ esse $\frac{x}{y}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; ex $x\sqrt[n]{a}$ per $y\sqrt[n]{a}$ esse $\frac{x}{y}$; denique $a\sqrt[n]{b}$ divisam per $x\sqrt[m]{b}$ dare quotum $\frac{a\sqrt[n]{b}}{x.\sqrt[m]{b}}$ &c. Quoniam $\sqrt[n]{bx^n+cx^n}$ æquivalet producto $\sqrt[n]{b+c}\,.\,\sqrt[n]{x^n}$, & $\sqrt[n]{x^n}$ est x, erit $\sqrt[n]{bx^n+cx^n}$ æqualis $x\sqrt[n]{b+c}$; hinc quoties quantitas existens sub signo radicali erit multiplicata per potestatem, cujus exponens radicis indici sit æqualis, poterit quantitas per eam dividi, & quoto sub signo relicto scribere extra ipsum loco coefficientis radicem potestatis, quin valor immutetur: & vice versa poterit quantitas sub signo multiplicari per eam, quæ locum obtinet coefficientis, dummodo hæc ad potestatem prius erigatur, quæ per radicis indicem innuitur; adeoque $x\sqrt[n]{b+c}$ idem erit ac $\sqrt[n]{bx^n+cx^n}$.

16. Ut e quantitatibus radicalibus extrahamus radices, methodus erit illi contraria, qua usi sumus, ut eas ad potestates perduceremus. Igitur necesse erit radicem extrahere quantitatis existentis sub signo; quare radix quadrata $\sqrt[n]{a^4}$ erit $\sqrt[n]{a^2}$; radix tertia, seu cubica $\sqrt{a}$ erit $\sqrt{a^{\frac{1}{3}}}$, quam scribi etiam posse $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ satis ex supra dictis infertur; quæ scribendi forma significat radicem tertiam radicis secundæ quantitatis a. Vocantur hi radicales radicalium, & cum ipsis eodem modo agitur, atque cum aliis hactenus egimus. Si vero radices tamquam potestates exprimantur per fractos exponentes, erunt exponentes ipsi per indicem extrahendæ radicis dividendi; sic radix secunda $\overline{a+b}^{\frac{5}{3}}$ erit $\overline{a+b}^{\frac{5}{6}}$ & in genere radix m quantitatis $\overline{x-y}^{\frac{1}{n}}$ erit $\overline{x-y}^{\frac{1}{nm}}$. Ad summam patet ex traditis regulis, in multiplicandis, dividendis, erigendis ad potestatem quamcunque potestatibus exponentis fracti, earumque radicibus extrahendis, eadem habere locum, quæ potestatibus integris inserviunt.

17. Multiplicatio quantitatum radicalium compositarum eodem fit modo, quo integrarum; idest quisque terminus factoris unius per alterius singulos terminos multiplicatur. Subjicimus exemplum.

Facto-

$$\begin{array}{l} \text{Facto-} \quad 3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 4d \\ \text{res} - 3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} \\ \hline -9ab - 6a\sqrt{bc} + 12d\sqrt{ab} + 4ac - 8d\sqrt{ac} \\ \quad + 6a\sqrt{bc} \\ \hline \end{array}$$

Productum $-9ab + 12d\sqrt{ab} + 4ac - 8d\sqrt{ac}$

Idem exemplum proponitur adhibitis non signis radicalibus sed exponentibus fractis.

$$\begin{array}{l} \text{Facto-} \quad 3 . \overline{ab}^{\frac{1}{2}} + 2 . \overline{ac}^{\frac{1}{2}} - 4d \\ \text{res} - 3 . \overline{ab}^{\frac{1}{2}} + 2 . \overline{ac}^{\frac{1}{2}} \\ \hline -9ab - 6a . \overline{bc}^{\frac{1}{2}} + 12d . \overline{ab}^{\frac{1}{2}} + 4ac - 8d . \overline{ac}^{\frac{1}{2}} \\ \quad + 6a . \overline{ab}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \end{array}$$

Productum $-9ab + 12d . \overline{ab}^{\frac{1}{2}} + 4ac - 8d . \overline{ac}^{\frac{1}{2}}$

18. Regulas pariter divisionis quantitatum compositarum sequitur divisio radicalium compositarum. En exemplum.

	Dividendum	Divisor
	$-9ab + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$.	$-3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$
Productum 1. subtractum	$9ab - 6a\sqrt{ac}$.	Quoti partiales
Primum residuum	$0 - 6a\sqrt{bc} + 4ac + 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$.	$3\sqrt{ab}$
Productum 2. subtractum	$6a\sqrt{bc} - 4ac$.	$2\sqrt{ac}$
Secundum residuum	$0 \quad 0 \quad 12d\sqrt{ab} - 8d\sqrt{ac}$.	$-4d$
Productum 3. subtractum	$-12d\sqrt{ab} + 8d\sqrt{ac}$.	Quotus totalis
	$0 \quad 0$.	$3\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 4d$

quod ita se habere constat exemplo superiore.

19. Etsi num. 6. diximus, radices quascunque pares quantitatis, quæ negativa sit, impossibiles omnino esse & imaginarias; nihilominus eæ quoque summantur, subtrahuntur, multiplicantur & dividuntur eodem modo, quo reliquæ reales & veræ. Sic summa duarum $\sqrt{-a^2}$, $-3\sqrt{-a^2}$ erit $-2\sqrt{-a^2}$; summa $-\sqrt{-x^2}$, $\sqrt{-y^2}$ erit $-\sqrt{-x^2} + \sqrt{-y^2}$; summa $b + \sqrt{-a^2}$, $b - \sqrt{-a^2}$ erit $2b$. Si subtrahamus $\sqrt{-a^2}$ de $-3\sqrt{-a^2}$ est differentia $-4\sqrt{-a^2}$; si subtrahamus $b + \sqrt{-x^2}$ de $c + \sqrt{-x^2}$ differentia est $c - b$. Radices $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ multiplicentur, ut dictum est, eo modo quo radices reliquæ num. 12: at facillime hic in errorem incidimus in signis producto præfigendis; cui errori ut aditum præcludamus, scribantur factores ita $\sqrt{-1} . \sqrt{b}$, $\sqrt{-1} . \sqrt{c}$, quod fieri posse constat ex num. 8. Multiplicentur modo; erit productum $-1 . \sqrt{bc}$ seu $-\sqrt{bc}$. Nisi hanc adhibuissemus curam, fuisset productum $\sqrt{bc}$, quod fortasse

tasse aliquis positivum existimasset, quum re vera sit negativum. Nam $\sqrt{-a}$ in $\sqrt{-a}$ nonne dat $-\sqrt{a^2}$ seu $-a$ productum negativum? minime vero $\sqrt{a^2}$ seu a. Patet quia radix quadrata in se ipsam ducta id in producto dare debet, cujus est radix; rem ita se habere in hoc exemplo cognitu est facile, quia quantitates, quæ multiplicantur, identicæ sunt; at ubi sunt quantitates diversæ, veluti illæ, quas posuimus antea $\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$, quorum productum eodem pacto negativum esse debere scimus, ut errorem vitemus ad illam factorum resolutionem confugimus. Ut $\sqrt{-bc}$ per $\sqrt{-c}$ dividas, quære quotum $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{bc}$ divisa per $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{c}$, erit ille $1 \cdot \sqrt{b}$ seu $\sqrt{b}$. Hæc de imaginariis dicta sufficiant.

20. Methodum hic tantum proponimus, qua radices quadratæ & cubicæ quantitatum compositarum extrahantur; de reliquis alibi erit sermo, ubi generalem pro illarum extractione regulam assignabimus. Radicis quadratæ extrahendæ ratio innotescit ex methodo, qua ad quadratum ipsæ quantitates eriguntur. Fiat quadratum binomii $a+x$ seu $-a-x$; in utroque casu illud erit $a^2+2ax+xx$; ergo binomii quadratum complectitur simul quadrata duorum terminorum suæ radicis, & insuper duplum rectangulum ex ipsis terminis.

21. Et quum quodlibet polynomium $b-c+d$, &c. tanquam binomium accipi possit, cujus primus terminus sit b, secundus fit $-c+d$ &c. patet quomodo polynomium quodcunque ad quadratum erigatur. Nempe accipiatur quadratum primi termini b, cui addatur duplex productum ex b in secundum terminum, & hujus secundi termini quadratum. Quare quadratum polynomii $b-c+d$ erit $b^2-2bc+2bd+cc-2cd+dd$.

22. Hoc posito extrahi debeat radix quadrata quantitatis $a^2+2ax+x^2$. Considera hoc tamquam binomii alicujus quadratum, & primo extrahe radicem de a^2; ea est $\pm a$, quam habe tanquam primum binomii terminum, & ejus quadratum subtrahe de quantitate proposita; residuum erit $2ax+x^2$, in quo, ut constat ex numero superiori, quadratum alterius termini contineri debet simul cum producto ex $2a$ termino invento per illum inveniendum multiplicato. Ut igitur terminum hunc secundum invenias, divide, quem potes, residui terminum per $\pm 2a$, in casu quotiens est $\pm x$, cujus producto in $\pm 2a$, & ejus quadrato x^2 subtracto, quoniam nil superest, erit exacta radix quadrata propositæ quantitatis $\pm a \pm x$.

23. Sit extrahenda radix quadrata quantitatis $b^2-2bc+c^2+2db-2dc+d^2$. Hæc ordinetur secundum aliquam litteram ex. gr. c, & fiat $c^2 \begin{matrix} -2b \\ -2d \end{matrix} \cdot c + 2bd + b^2 + dd$. Radix primi termini est $\pm c$: subtracto hujus quadrato, & diviso primo residui termino per $\pm 2c$ est quotus $\mp b \mp d$; si detrahamus, ut supra docuimus, hujus quoti productum in $\pm 2c$, & præterea ejus quadratum, videmus nil superesse; ergo radix quæsita est $\pm c \mp b \mp d$; & revera utriusque trinomii $c-b-d$, $-c+b+d$ quadratum est quantitas proposita.

24. Si autem quantitas, cujus radix postulatur, non sineret, ut hac via posset educi, quemadmodum id non pateretur a^2+x^2, vel $b^2+2ax+xx$, in qui-

bus, dum radicem investigamus, semper novi exurgunt termini, tunc indicium est, radicem perfecte haberi non posse; quapropter utimur signo radicali, ut radicem indicemus, scribimusque $\pm\sqrt{a^2+x^2}$, $\pm\sqrt{b^2+2ax+x^2}$ cum signo duplici positivo & negativo, quando sermo est de radicibus indicis paris, inter quas est quadrata.

25. Antequam radices cubicas extrahamus, juvat animadvertere quinam sit binomii cubus. Sit binomium $a+x$; ejus cubus erit $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$; igitur cubus binomii complectitur cubos utriusque termini, & præterea productum quadrati primi termini ter accepti in secundum, & quadrati secundi pariter ter accepti in primum; quumque polynomium quodcunque pro binomio haberi possit, hæc habebuntur in cujuscunque polynomii cubo. Quæratur igitur radix cubica quantitatis $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$, quæ per a ex. gr. sit ordinata. Suppono hunc esse cubum binomii: extracta radice cubica primi termini, quæ est a, hanc considero tamquam primum binomii terminum; subtracto deinde cubo hujus termini, ut alterum habeam, quem scio reperiri in cubo multiplicatum per triplum quadrati termini primi, divido primum terminum residui $3a^2x+3ax^2+x^3$ per $3a^2$ triplum quadrati termini jam inventi: quotiens est x; hujus quadratum nempe x^2 ductum in $3a$, idest $3ax^2$, & ipsius x cubus x^3 ex supra traditis de residuo subtrahi debet; & quoniam subtractione facta nihil superest, dico $a+x$ esse quantitatis propositæ radicem cubicam.

26. Exemplum aliud: esto quantitas

$$\begin{aligned}x^3+6ax^2&+12a^2x+8a^3+12a^2b+6b^2a+b^3\\ +3bx^2&+12abx\\ &+3bbx\end{aligned}$$

ordinata secundum x; ejusque radix cubica sit extrahenda. Quæro radicem cubicam primi termini; ea est x, cujus cubum subtraho, & primum residui terminum $\overline{6a+3b}\,.\,x^2$ divido per $3x^2$; quotientis $2a+b$ productum in $3.x^2$, & $3\,.\,\overline{2a+b}^2\,.\,x$, & $\overline{2a+b}^3$ subtraho; quoniam nullum est residuum, $x+2a+b$ erit perfecta radix cubica, quæ fuit quærenda. Si hac methodo perfectæ radices cubicæ non reperiuntur, tunc illæ exacte extrahi nulla arte poterunt. Id accidit in plurimis quantitatibus ex. gr. a^3+x^3, $x^3+3ax^2+3a^2x+b^3$. Tunc ut radices tertias indicemus, utimur radicali signo, ut in quadratis fecimus, & scribimus $\sqrt[3]{a^3+x^3}$, $\sqrt[3]{x^3+3ax^2+3a^2x+b^3}$.

27. Diximus supra, quantitatis x^2+a^2 perfectam radicem quadratam extrahi non posse; at, quamvis id verum sit, possumus tamen radicem quadratam talem inde educere, quæ ad perfectam (etsi eam numquam assequamur) magis semper magisque accedat. Id obtinebimus, si producta operatione nostra habeamus radicem expressam per seriei convergentem infinitis constantem terminis. Etenim quamvis infinitæ seriei summa haberi non possit, atque adeo in casu haberi non possit perfectus radicis valor; tamen tot terminorum summa effici poterit, ut defectus vel excessus minimus prorsus sit, & tuto contemnendus.

28. Ut

28. Ut res melius pateat. Sit quantitas $x^2 + a^2$, cujus radicem quadratam postulas. Hanc de more fingo esse quadratum binomii, & extraho radicem primi termini, scilicet $\pm x$, quæ mihi est primus terminus quæsiti binomii & seriei infinitæ, de qua supra, & hujus quadratum subtraho: deinde per $2x$ divido residuum, quotiens est $\frac{a^2}{2x}$, qui erit terminus alter seriei & binomii: igitur, num. 20, subtraho de residuo a^2 quotientis hujus productum in $2x$, & ejus quadratum; erit residuum secundum $\frac{-a^4}{4x^2}$. Hoc residuum facit, ne duo termini inventi $x + \frac{a^2}{2x}$ sint perfecta radix nostræ quantitatis; at nunc $x + \frac{a^2}{2x}$, cujus jam quadratum, subtractum est, fingatur esse primus binomii terminus, & producta operatione, quæramus secundum. Divido igitur residuum per $2x$, quotiens $\frac{-a^4}{8x^3}$ erit tertius seriei terminus; subtraho ejus productum in duplum primi termini binomii, nempe in $2x + \frac{a^2}{x}$, & ejus quadratum; & habeo residuum tertium $\frac{a^6}{8x^4} - \frac{a^8}{64x^6}$. Hujus residui gratia considero nunc tamquam primum terminum binomii quantitatem $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3}$, & iterum divido primum residui terminum per $2x$, & quotientem $\frac{a^6}{16x^5}$ quartum seriei terminum duco in duplum primi termini, & efficio ejus quadratum, & hæc omnia subtraho de residuo, & iterum residui novum terminum per $2x$ divido, & sic in infinitum novi semper termini reperientur seriei infinitæ $x + \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5}$ &c. Series hæc ut convergens sit, necesse est ut terminus x^2 quantitatis propositæ sit major quam a^2; tunc enim termini seriei successive minores fient. Producta in seriem radice quadrata binomii alicujus $a^2 + x^2$, eadem methodo obtinetur series exprimens radicem similem polynomii cujuscunque, quod ut sæpius diximus tanquam binomium haberi potest.

29. Eodem pacto licet perfecta radix cubica extrahi non possit de quantitate $x^3 + a^3$, ea tamen obtineri potest proxime per seriem convergentem operatione producta. Extrahitur radix cubica primi termini, idest x; subtracto ejus cubo, residuum a^3 dividitur per $3x^2$ triplum quadrati ejusdem; quotiens $\frac{a^3}{3x^2}$ erit secundus seriei terminus, cujus productum in triplum quadrati primi termini x; una cum triplo quadrati ejus in eundem terminum primum, & cubo ipsius subtrahere oportet de residuo a^3; subtractione hac habita residuum alterum est

$-\frac{a^6}{3x^3} - \frac{a^9}{27x^6}$. Nunc quantitas $x + \frac{a^3}{3x^2}$ consideranda est tanquam primus binomii terminus, cujus cubum jam subtraximus. Procedamus igitur, & per $3x^2$ dividamus primum residui terminum; erit quotus $\frac{-a^6}{9x^5}$ tertius seriei terminus: hunc per triplum quadrati primi termini, nempe per $3\overline{x + \frac{a^3}{3x^2}}^2$ multiplicemus; & insuper triplum quadrati ejus ducamus in $x + \frac{a^3}{3x^2}$, & facto quotientis cubo hæc omnia subtrahamus de residuo illo; habebimus ita residuum tertium, cujus primum terminum eadem ratione dividamus per $3x^2$, & quotiens erit quartus seriei terminus; & sic eadem operatione repetita in infinitum terminos quotlibet inveniemus in *serie* $x + \frac{a^3}{3x^2} - \frac{a^6}{9x^5}$ &c. quæ series si convergens sit, id est si x^3 sit major quam a^3, ad numerum aliquem terminorum deveniemus, quorum summa adeo proxime ad quæsitæ radicis valorem accedat, ut ea sine erroris periculo pro radice vera accipi possit. Et quoniam polynomia quæcunque pro binomiis haberi possunt, patet ratio, qua radices cubicæ polynomiorum per series queant obtineri. Hæc sunt, quæ modo de radicum extractione e quantitatibus compositis tradenda erant. Cæterum alibi generalem methodum ostendemus, qua radix quælibet ex hujusmodi quantitatibus extrahi possit, & tunc expeditior etiam patebit via ad quadratas & cubicas, de quibus hic egimus, extrahendas.

CAPUT QUARTUM.

De resolutione æquationum primi gradus.

1. Ratio æqualitatis, quæ inter duas quantitates intercedit, æquatio dicitur, & signo $=$ indicatur, quod signum æqualitatis appellamus: ita $ax + bx = c^2$ significat quantitatem $ax + bx$ æqualem esse quantitati c^2. Quantitas, quæ ante signum est, dicitur primum æquationis membrum, ea, quæ est post signum, dicitur membrum alterum, & homogeneum comparationis. Litteris alphabeti primis indicari solent quantitates cognitæ, incognitæ postremis; sic $ax + bx = c^2$ indicat quadratum notum c^2 producto incognitæ x in cognitam $a + b$ æquari.

2. Si quantitas $ax + bx$ non æqualis esset, sed major, quam c^2, hoc modo id exprimeretur $ax + bx > c^2$; si vero esset minor ita, $ax + bx < c^2$. Hæc scribendi forma $a : b :: x : y$ ostendit quantitates illas esse in proportione geometrica,

trica, nempe ita geometrice se habere a ad b, quemadmodum x se habet ad y; seu geometricam rationem a ad b eandem esse ac rationem x ad y; quæ quidem ratio duobus illis punctis etiam hac de causa indicatur, quia & plures illis utuntur tamquam divisionis signo, & rationem duarum quantitatum nihil aliud esse jam scimus, quam antecedentem divisum per consequentem. Hic juvat animadvertere, quantitatem quamlibet finitam divisam per o ut $\frac{a}{o}$ esse quantitatem infinitam, est enim o ad a, ut 1, ad infinitum. Infinitum autem hoc signo ∞ solet exprimi. Si ratio a ad b major sit ratione x ad y, scribimus $a:b:>:x:y$; si vero minor $a:b:<:x:y$. Cum tres ex. gr. a, x, y, vel plures quantitates proportionem habent continuam, eam indicamus ita $a::x::y$; aliqui utuntur etiam hoc signo $\div a:x:y$, quod idem significat, idest a esse ad x quemadmodum eadem x ad y.

3. Iisdem signis, quibus proportio geometrica, indicantur etiam aliæ proportiones arithmetica, harmonica &c., sed tunc semper additur illius proportionis nomen, de qua agitur; quod nisi fiat, intellige sermonem esse de geometrica. Quoties proportio habetur, semper haberi potest æquatio; namque in prorportione geometrica, ut notum est, productum extremorum æquat productum mediorum, aut si proportio continua sit, quadratum termini intermedii; unde si sit $a:b::x:y$, erit $ay=bx$, & si $a::x::y$, erit $ay=x^2$.

4. In arithmetica vero proportione summa extremorum æquat mediorum summam, vel duplum termini medii, si sit continua; ita si arithmetice sit $a:b::x:y$ erit $a+y=b+x$, vel posita $a::x::y$, erit $a+y=2x$.

5. Proportio harmonica in geometricam resolvitur, namque tunc tres quantitates in harmonica proportione esse dicuntur; cum prima ad tertiam ita geometrice se habet, ut differentia inter primam, & secundam est ad differentiam inter secundam, & tertiam; quapropter si harmonice sit $a::x::y$, erit geometrice $a:y::a-x:x-y$, vel $a:y::x-a:y-x$, adeoque æquatio erit $ay-xy=ax-ay$, vel $yx-ay=ay-ax$, quæ eadem est ac alia signis mutatis.

6. Æquationes, quæ unam tantum habent incognitam, dicuntur *determinatæ*; talis esset $ax+bx=c^2$, in qua x tantum est quantitas ignota. *Indeterminatæ* vocantur illæ, quæ incognitas plures continent. Ejusmodi esset æquatio $2xy+cy=4bc+a^2$, in qua duæ sunt quantitates incognitæ x, y. De his alibi agemus. Æquatio appellatur *primi gradus*, vel *simplex*, vel *linearis*, quum incognita primam dimensionem, vel potestatem non excedit, uti esset $x+c=a$, $a^2x+b^3=c^3$. Dicitur *secundi gradus*, *quadrata*, *plana*, quum in æquatione maxima potestas incognitæ est quadratum. *Tertii gradus*, *solida*, vel *cubica* æquatio est, in qua incognita reperitur evecta ad dimensionem tertiam, & in genere dicitur æquatio gradus n, si in ipsa incognita ad potestatem n ascendat.

7. Ideo præcipue æquationes instituuntur, ut incognitæ quantitatis valor inveniatur. Si enim operationum auxilio ita utramque æquationis partem (salva tamen æqualite) versare possimus, ut in una sola supersit incognita quantitas, in altera tantum cognitæ quantitates habeantur, tunc incognitæ valor est inventus; quod vocatur *æquationem resolvere*; valor inventus dicitur *æquationis radix*, quæ modo est positiva, modo negativa, modo imaginaria, prout diversæ ferunt circunstantiæ.

8. Dixi-

8. Diximus, eas debere esse operationes, quæ æqualitatem non turbent; hujusmodi autem erunt, utrique membro addere, vel demere partes æquales, vel quantitatem eandem, verbi gratia si posita æquatione $ax+cx=b^2$ addas utrique parti quantitatem f^2, patet fore $ax+cx+f^2=b^2+f^2$, vel $ax+cx-f^2=b^2-f^2$, si illam subtrahas. Est pariter manifestum, esse æqualitatem omnino salvam, si membrum utrumque æquationis per eandem quantitatem, vel per quantitates æquales multiplices, vel dividas. Igitur si vera sit æquatio, quam supra attulimus, erit etiam $fax+fcx=fb^2$; $\frac{ax+cx}{f}=\frac{b^2}{f}$. Neque æqualitas ammittitur, si duo æquationis membra ad eandem potestatem n attollantur, vel si eorum quæcunque radix n extrahatur; patet enim, quantitatum æqualium potestates inter se æquales esse debere, sicuti & æqualium potestatum radices; ergo erit $\overline{ax+cx}^{n}=b^{2n}$, & $\overline{ax+cx}^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{2}{n}}$. Possumus etiam loco unius quantitatis aliam substituere, quæ illi sit æqualis; ita data æquatione $ax+cx=b^2$, si sciam esse $cx=\frac{n^2x}{m}$, nemo non videt futurum $ax+\frac{n^2x}{m}=b^2$, & si habeatur $x=a+b$, & sit $b=c+d$ erit $x=a+c+d$. Hac operatione sæpissime utuntur Analistæ, ut infra videbimus.

9. Hæ ferme operationes sunt, quarum ope ad æquationum solutionem venimus. Omnis in eo posita res est, ut ea inter cæteras operatio eligatur, quæ ad intentum finem maxime conducat, quod quidem non adeo facile est existimandum; sæpe non minimam habet difficultatem, eoque majorem, quo major est gradus æquationis solvendæ. Ideo nihil intentatum reliquerunt Analystæ, ut hanc difficultatem minuerent, certasque methodos traderent, quibus propositum finem assequeremur. Ut hos addiscamus, incipere oportet ab æquationibus primi gradus, ab iis scilicet, in quibus incognita dimensionem primam non excedit.

10. In his æquationibus, ut incognitæ valorem inveniamus, primo curandum est, ut termini omnes, qui incognitam ipsam continent ex una signi æqualitatis parte reperiantur, ex altera vero reliqui omnes, qui illa carent, hoc facillime obtinebitur transferendo, cum opus fuerit, terminos ex una parte ad aliam signis mutatis; quod idem esse atque demere, vel addere quantitatem eandem utrique æquationis membro, ex algorithmo satis constare potest. Hoc posito si incognita vel sit multiplicata, vel divisa per aliquam quantitatem, per eam tota æquatio erit vel dividenda, vel multiplicanda: ita procul dubio efficiemus, ut unum membrum solum habeat incognitam, alterum quantitates notas, quæ incognitæ valorem ostendent. Exempla aliquot afferamus.

11. Resolvere oporteat æquationem $x-b+c=a$. Juxta ea, quæ modo diximus, necesse erit deducere a primo membro quantitatem $-b+c$, ut incognita sola remaneat; ut stet æqualitas, eandem oportebit subtrahere etiam de secundo; erit igitur $x-b+c+b-c$ id est $x=a+b-c$, quod idem habuissemus transferendo ex altera parte $-b+c$ signis mutatis.

12. Sit æquatio $ax+bc=mx+na$. Transfer mx in primum membrum, bc in secundum signis mutatis, habebis $ax-mx=na-bc$, in qua æqua-

æquatione termini continentes incognitam ex una signi parte omnes reperiuntur. Nunc quoniam x reperitur ducta in $a-m$, per hanc quantitatem divide æquationem totam, erit $x=\frac{na-bc}{a-m}$. Sit æquatio $\frac{x}{b}-\frac{d}{m}=\frac{a}{c}$; translato termino $-\frac{d}{m}$ fit $\frac{x}{b}=\frac{a}{c}+\frac{d}{m}$, & æquatione hac multiplicata per b fit $x=\frac{ab}{c}+\frac{db}{m}$.

13. Proponatur æquatio $\frac{ay}{c}-b=\frac{dy}{f}+\frac{mn}{g}$, in qua incognita est y. Æquationem a divisoribus libera, successive per omnes facta multiplicatione. Multiplica primum per c, ut habeas $ay-bc=\frac{cdy}{f}+\frac{mnc}{g}$; tum per f, ut fit $afy-bcf=cdy+\frac{mncf}{g}$; demum per g, ut oriatur $afgy-bcfg=cdgy+mncf$. Jam vero translatis de more terminis, erit $afgy-cdgy=bcfg+mnfc$, seu $y.\overline{afg-cdg}=bcfg+mnfc$. Quare facta divisione per $afg-cdg$ erit $y=\frac{bcfg+mnfc}{afg-cdg}$. Sit æquatio $\frac{a}{x}-\frac{m}{n}=\frac{c}{b}$. Multiplicetur per x, n, b, ut omnes divisores arceantur, & fiet $abn-bmx=cnx$, sive $abn=x.\overline{bm+cn}$, sive $\frac{abn}{bm+cn}=x$.

14. Hoc pacto valor incognitæ reperitur in æquationibus, quæ unam habent incognitam dictam ideo solitariam. Quod si æquatio plures incognitas complectatur, tunc dumodo quot incognitas tot etiam æquationes habeamus, methodis, quas tradituri sumus id assequemur, ut eam ad præcedentium formam reducamus. Prima methodus postulat, ut assumpta qualibet ex datis æquationibus, in illa incognitas omnes veluti cognitas consideremus una dempta, cujus valorem expressum per cognitas, aliasque incognitas juxta regulas supra traditas inquiramus. Hic valor in reliquis æquationibus loco suæ incognitæ substitutus efficiet, ut incognitarum numerus, & æquationum unitate minuatur; quare hac eadem operatione respectu aliarum incognitarum, quoties opus fuerit, repetita, ad æquationem tandem perveniemus, quæ unam dumtaxat continebit incognitam, quamque jam solvere didicimus.

15. Datæ sint duæ æquationes $ax+by=a^2$, $\frac{ay}{c}=b-\frac{fx}{a}$, quæ duas habent incognitas x, y, quarum valor inquiritur. In prima æquatione tractemus ex. gr. y tanquam notam; erit igitur $x=\frac{a^2-by}{a}$; Si hunc valorem loco x in secunda æquatione substituamus, habemus æquationem $\frac{ay}{c}=b-\frac{f}{a}$. $\frac{a^2-by}{a}=b-\frac{fa^2+fby}{aa}$, in qua incognita una y est in prima dimensione; ergo ejus solutio num. 13. dat $y=\frac{bca^2-fca^2}{a^3-fcb}$; quo pacto notam habemus y. Hac autem habita nullius negotii res est scire etiam x; nam si valorem y substi-

substituamus in æquatione $x = \frac{a^2 - by}{a}$ erit $x = -\frac{b^2 ca + bfca}{a^3 - fcb} + a$, seu terminis ad eandem denominationem productis, $x = \frac{a^4 - b^2 ca}{a^3 - fcb}$. Sicuti in prima ex datis æquationibus y ut cognitam consideravimus, x ut incognitam; ita poteramus eodem modo supponere x cognitam, y incognitam, ejusque valorem in secundam transferre; imo neque necessarium fuit a prima potius, quam a secunda æquatione operationis initium facere, quod ratio, & experientia satis possunt ostendere.

16. Si tres fuerint incognitæ, & tres æquationes, ex. gr. $x + y = b + z$, $y + z = d$, $z + x = c$ ut valores x, y, z obtineas in prima æquatione ex. gr. quære valorem z, suppositis x, y cognitis; erit $z = x + y - b$; hic loco z substitutus in reliquis æquationibus dabit, $2y + x - b = d$, $2x + y - b = c$; in secunda pone valorem x, quem prima exhibet, & invenies $y = 2d + c - b$.

17. Si quatuor fuerint æquationes, & quatuor incognitæ, imo si multo plures, longior quidem erit operatio, sed non diversa methodus, quæ est procul dubio universalis, & nullis terminis circumscribitur.

18. Alia methodus eaque non inelegans est, quærere in omnibus datis æquationibus unius incognitæ valores expressos per cognitas simul, & incognitas reliquas, ex iisque novas instituere æquationes, quæ una certe carebunt incognita. Si ex his novis æquationibus alterius incognitæ valor investigetur, ex his iterum aliæ poterunt exurgere æquationes, quæ duabus incognitis carebunt; quare patet repetita iterum atque iterum, si necesse fuerit, operatione eo nos perventuros, ut unicam incognitam in æquatione habeamus.

19. Sint tres æquationes $x + z + y = b$, $x - z - y = c$, $x + z - y = a$; ex omnibus quære valorem incognitæ x, habes $x = b - z - y$ ex prima; $x = c + z + y$ ex secunda; $x = a - z + y$ ex tertia. At cum hi omnes sint ejusdem x valores, nonne inter se æquales esse debent? Ergo poterunt ex iis æquationes fieri, quæ tres in casu esse possunt, nempe $b - z - y = c + z + y$, $b - z - y = a - z + y$, $c + z + y = a - z + y$, in quibus deest incognita x; ex his æquationibus duas quascumque elige, tot nempe, quot supersunt incognitæ, quarum ope quære duos valores ex. gr. incognitæ z; patet æquationem ex his duobus valoribus ortam nullam habituram incognitam præter y; ergo hoc pacto ad æquationem pervenies, cujus solutionem jam nosti.

20. Hoc autem in peculiari exemplo nota, non posse te ex æquatione $b - z - y = a + y - z$ habere valorem z, neque valorem y ex $c + z + y = a - z + y$; nam terminos transferendo in prima evanescit z, & notus fit valor y, nempe $y = \frac{b - a}{2}$, in altera evanescit y, & determinatur valor $z = \frac{a - c}{2}$, quare $x = \frac{b + c}{2}$ invenitur substitutis cognitis y, z valoribus, vel in aliqua datarum æquationum, vel in aliquo ex valoribus ipsius x, quin alia æquatione sit opus. Si tot quidem æquationes haberemus, quot incognitæ, verum non omnes incognitæ essent in singulis æquationibus, tunc expeditior aliquanto erit operatio, sed methodus eadem.

21. Ter-

21. Tertiam methodum nunc tradimus, quæ sane nullo modo est prætermittenda, quoniam universalis est, licet primo intuitu non ea esse videatur, & nos illa sæpissime utemur. Utilis est hæc methodus primo; quum duæ sunt incognitæ, & duæ æquationes, in quibus termini eandem incognitam continentes identici sint, & termini, qui continent unam incognitam, habeant eadem signa in utraque æquatione, qui vero aliam, contraria. Si hæc habeantur, summa æquationum unam incognitam determinabit, differentia determinabit secundam. Æquationes $ax+by=c^2$, $ax-by=n^2$ habent propositas conditiones; sunt enim identici termini, qui continent unamquamque incognitam, & signa sunt eadem relate ad terminos continentes x, diversa relate ad terminos continentes y. Jam vero si fiat æquationum summa, habemus $2ax=c^2+n^2$, ergo nota erit $x=\frac{c^2+n^2}{2a}$: si vero sumatur earundem differentia, ea est $2by=c^2-n^2$, ergo nota erit $y=\frac{c^2-n^2}{2b}$; Hinc habemus duas quantitates statim notas fieri, si earum summam, & differentiam cognoscamus; quod bene tenendum est, nam hujus theorematis frequentissimus erit usus.

22. At censerine debet methodum non valere, si desit identitas terminorum? nequaquam; nam semper identicos habere terminos possumus quoad unam incognitam. Si per quantitatem eam multiplicantem in secunda æquatione multiplices primam, & secundam per quantitatem eam multiplicantem in prima. Sint $ax+by=c^2$, $nx-my=n^2$, in quibus nulla incognitarum habeat terminos identicos. Multiplica jam primam æquationem per m, secundam per b, fient $max+mby=mc^2$, $bnx-mby=bn^2$, in quibus identici sunt termini continentes y; nunc si harum summam facias, habes $max-nbx=mc^2+bn^2$, ergo $x=\frac{mc^2+bn^2}{ma-bn}$; adeoque nota est x. Quod si velis aliam y, fac eodem modo, ut evadant identici termini continentes x, quod præstabis, si primam æquationem ducas in n, & secundam in a; ita erunt $nax+nby=nc^2$, $nax-amy=an^2$, earumque differentia $nby+amy=nc^2-an^2$; ergo erit nota $y=\frac{nc^2-an^2}{nb+am}$.

23. Quod si præter identitatem terminorum desit etiam conditio, quam in signis postulavimus num. 21, hoc est si termini ejusdem incognitæ in utraque æquatione habeant signa vel eadem, vel contraria, quemadmodum esset in his æquationibus $ax+by=c^2$, $nx+my=n^2$; tunc pariter dabit methodus valorem incognitarum, si per num. præcedentem reducantur termini ad identicitatem, & non summa, & subtractio deinde æquationum fiat, sed duplex subtractio in casu signorum eorundem, duplex vero summa in casu contrariorum; hoc enim pacto alia incognitarum successive eliminabitur, in quo vis tota hujus methodi sita est.

24. Extenditur hæc methodus ad tres etiam incognitas, & æquationes, imo

ad quemcumque incognitarum, & æquationum numerum, sed operatio longior evadit, ac molesta. Sint $3x+2y-z=7a$, $2x-y+3z=5a$, $x+y-z=2a$; Si primæ multiplicatæ per 3 addatur secunda oritur quarta æquatio $11x+5y=26a$, in qua z non est; si deinde a prima tertiam subtrahamus; erit $2x+y=5a$ quinta æquatio, in qua pariter z deest. Jam vero postremæ hæ duæ æquationes per num. præcedentem solvuntur.

25. Hanc præstantissimam methodum difficiliori etiam exemplo juverit illustrare. Sint igitur tres æquationes:

1. $ax-by+cz=ac$
2. $cx+ay-bz=bc$
3. $-bx+cy+az=ab$

Primæ multiplicatæ per b addatur secunda multiplicata per c, habetur quarta.

4. $\overline{ab+c^2}.x+\overline{ac-b^2}.y=acb+bc^2.$

Deinde secundæ multiplicatæ per a addatur tertia multiplicata per b, oritur quinta.

5. $\overline{ac-b^2}.x+\overline{a^2+bc}.y=abc+ab^2.$

E quarta ducta in a^2+bc deme quintam ductam in $ac-bb$; erit æquatio sexta.

$$6.\ \overline{\overline{a^2+bc}.\overline{ab+c^2}-\overline{ac-b^2}^2}.x=\overline{a^2+bc}.\overline{acb+bc^2}-\overline{ac-bb}.\overline{abc+ab^2};$$

ex qua habes valorem $x=\dfrac{\overline{a^2+bc}.\overline{acb+bc^2}-\overline{ac-b^2}.\overline{abc+ab^2}}{\overline{a^2+bc}.\overline{ab+c^2}-\overline{ac-b^2}^2}$. En igitur methodus facta universalis, quæ antea angustis conclusa finibus videbatur.

CAPUT QUINTUM

De resolutione æquationum secundi gradus.

Ea, quæ ad solvendas primi gradus æquationes spectant, satis esse non possunt, ubi agatur de solvendis æquationibus gradus secundi; iis nempe, in quibus incognita ad potestatem secundam assurgit: quapropter ad alia confugere necesse est.

1. In posterum, nisi aliter peculiaris ferat occasio, æquationes proponemus cum zero comparatas, id est terminis omnibus in unam partem translatis, ita ut ex alia tantum supersit zero. Pariter terminus exhibens maximam incognitæ potestatem neque multiplicatus erit, neque divisus per quantitatem ullam; quum omnes æquationes, si tales non sint, nullo negotio ejusmodi fieri possint, reliquis terminis divisis, vel multiplicatis per quantitatem, quæ maximam incognitæ potestatem vel multiplicat, vel dividit. Hæc maxima incognitæ potestas erit semper primus æquationis terminus, secundus erit summa terminorum, in quibus est potestas incognitæ proxime minor, & ita deinceps, donec ultimus terminus summam contineat terminorum, qui noti sunt.

2. His

2. His præmissis distinguere oportet puras æquationes & incompletas, a completis & affectis; primæ continent solam quadraticam potestatem incognitæ, ut esset $ax^2+bx^2-ab=o$; aliæ præter secundam continent etiam dimensionem primam, ut æquatio $x^2+ax-bb=o$. Priorum solutio postulat, ut in unam partem transferantur termini continentes quadratum incognitæ, in alia vero reliqui omnes remaneant, atque ita multiplicare, vel dividere æquationem, ut solum in uno membro habeamus quadratum supradictum positivum; quo facto omnes hujusmodi æquationes hac generali formula exprimi poterunt $x^2=aA$, in qua x^2 est quadratum, a est quantitas nota positiva quæcunque, A vero quantitas positiva, vel negativa peculiaribus circunstantiis determinanda. Nunc si ex utraque parte radicem quadratam extrahamus est $x=\pm\sqrt{aA}$, adeoque soluta æquatio. Consideremus jam æquationem $ax^2-bx^2-cn^2=o$, translato termino cn^2, & facta divisione per $a-b$ est $x^2=\frac{cn^2}{a-b}$, & extracta radice $x=\pm\sqrt{\frac{cn^2}{a-b}}$. Si comparatio fieret inter æquationem $x^2=\frac{cn^2}{a-b}$; & formulam generalem $x^2=aA$, esset $aA=\frac{cn^2}{a-b}$, & quoniam a in primo membro, ut monuimus, ad arbitrium sumi potest, si eam supponamus $=n$, erit $nA=\frac{cn^2}{a-b}$; adeoque $A=\frac{cn}{a-b}$. Si supposuissemus $a=c$ tunc patet futuram fuisse $A=\frac{n^2}{a-b}$; En igitur quid sibi velit illud, quod diximus, nempe in formula illa generali a esse quantitatem notam ad arbitrium sumendam, & A quantitatem ex variis casibus determinandam. Revocare hic oportet in mentem, quod etiam demonstratum est in algorithmo radicalium num.6. valorem $\sqrt{aA}$ duplicem esse, id est positivum, & negativum; quare præpositæ æquationis radix duplex erit, nempe $x=+\sqrt{aA}$, $x=-\sqrt{aA}$.

3. Quum radicem generalis æquationis extraximus, fieri debuisset $\pm x=\pm\sqrt{aA}$, unde quatuor haberi potuissent combinationes $x=+\sqrt{aA}$, $-x=-\sqrt{aA}$, $x=-\sqrt{aA}$, $-x=+\sqrt{aA}$; sed quoniam primæ duæ non sunt inter se diversæ, si enim unius mutentur signa, (quod fieri potest salva æqualitate) eadem est ac altera, & id ipsum de duabus aliis dici potest; ideo duæ tantum sunt diversæ conbinationes, idest $x=+\sqrt{aA}$, $x=-\sqrt{aA}$, seu $x=\pm\sqrt{aA}$.

4. Si duo incognitæ valores in partem, in qua ipsa est, transferantur, oriuntur statim duæ æquationes zero æquales $x-\sqrt{aA}=o$, $x+\sqrt{aA}=o$, qui factores appellantur æquationis secundi gradus propositæ, quia æquationem illam restituunt, si inter se multiplicentur, eorum enim productum est $x^2 \begin{matrix}+\sqrt{aA}\\-\sqrt{aA}\end{matrix}.\, x-aA=o$ id est $x^2-aA=o$. Hinc tamquam corollarium in-

 fer-

fertur, summam valorum incognitæ $-\sqrt{aA}+\sqrt{aA}$ esse quantitatem multiplicantem incognitam ipsam in secundo termino, quæ cum in casu sit zero, secundus terminus evanescat oportet. Infertur terminum æquationis ultimum æquare productum valorum incognitæ.

5. Si in æquatione $xx=aA$ quantitas A esset negativa, idest si esset $x^2=-aA$, tunc duo valores incognitæ $x=\sqrt{-aA}$, $x=-\sqrt{-aA}$ essent imaginarii Cap. 3. num. 6., & terminis translatis $x-\sqrt{-aA}=0$, $x+\sqrt{-aA}=0$ factores imaginarii, qui inter se multiplicati dant productum $x^2 \begin{array}{l}+\sqrt{-aA}\\-\sqrt{-aA}\end{array} .\, x+aA=0$, seu $x^2=-aA$, quæ est æquatio proposita. Hinc habemus quantitates reales posse ex summa, vel ex producto imaginariarum consurgere.

6. Hac methodo possunt æquationes puræ quæcunque graduum superiorum ad inferiorem gradum redigi, si earum exponens possit per 2 exacte dividi; sit æquatio sexti gradus $x^6-a^5A=0$, transfer terminum cognitum, ut sit $x^6=a^5A$; extrahe radicem quadratam, habes $x^3=\pm\sqrt{a^5A}$ æquationem tertii gradus. Sit $x^4-a^3A=0$, fac $x^4=a^2A$, & extracta radice quadrata $x^2=\pm\sqrt{a^3A}$; radicem quadratam iterum extrahe, & erit $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{a^3A}}$ æquatio primi gradus. Quatuor valores x in ea sunt, $+\sqrt{+\sqrt{a^3A}}$, $+\sqrt{-\sqrt{a^3A}}$, $-\sqrt{+\sqrt{a^5A}}$, $-\sqrt{-\sqrt{a^5A}}$ ex varia signorum combinatione, ut facile cognosci potest. Nunc considerandum est, quod si a^3A sit quantitas positiva, primus & tertius nempe ij, in quibus signum radicale secundum afficiatur signo $+$, erunt reales, contra secundus, & quartus imaginarii; si vero a^3A sit quantitas negativa, tunc valores omnes erunt imaginarii. Quoad hanc partem res est omnino manifesta: quoad aliam vero tyronum gratia sic potest clarius ostendi. Nonne $\sqrt{+\sqrt{a^4}}$ idem est ac $\sqrt{a^2}$? ergo si radicale signum secundum habuisset signum $-$, esset $\sqrt{-a^2}$ quantitas imaginaria; ideo enim in primo casu provenit $\sqrt{a^2}$, quia radicale secundum intelligitur multiplicatum per unitatem positivam; at in secundo casu intelligitur multiplicatum per unitatem negativam; ergo esse debet $\sqrt{-a^2}$. Nunc si rem accomodes æquationi nostræ patebit, cur in secunda, & quarta combinatione valor sit imaginarius, licet quantitas sit positiva a^3A.

7. Sit denique $x^8=a^7A$; ergo $x^4=\pm\sqrt{a^7A}$, & $x^2=\pm\sqrt{\pm\sqrt{a^7A}}$, & $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{a^7A}}}$, ubi octo sunt radices æquationis, seu valores x, qui posita a^7A quantitate positiva, duo sunt reales, reliqui imaginarii, ut ex signorum combinatione unusquisque potest facile conjicere; posita eadem negativa, omnes sunt imaginarii.

8. Nunc

8. Nunc ad æquationes secundi gradus completas transeamus. Hæ omnes hac generali formula possunt exprimi $x^2+Ax+aB=0$, in qua cum x^2 sit quadratum x, Ax duplum producti $\frac{A}{2}.x$, esset $x+\frac{A}{2}$ radix quadrata quantitatis $x^2+Ax+aB$, si aB esset quadratum quantitatis $\frac{A}{2}$; at cum non sit, ideo diversa erit quantitas $x^2+Ax+aB$ a quadrato $x^2+Ax+\frac{AA}{4}$, sed differentia omnis erit in ultimis terminis cognitis; quare posito quadrato $x^2+Ax+\frac{AA}{4}=z^2$, erit $x^2+Ax=z^2-\frac{AA}{4}$, hoc est termini duo incogniti æquationis nostræ æquales termino uni incognito, & alteri cognito; his igitur in æquatione generali pro illis substitutis, habebimus $z^2-\frac{AA}{4}+aB=0$, quæ æquatio ad genus pertinet incompletarum, de quibus jam egimus.

9. Solvenda sit æquatio $y^2 \begin{array}{l}-cy\\+by\end{array} \begin{array}{l}-n^2\\+cm\end{array}=0$. Accipe dimidium coefficientis secundi termini, id est $\frac{-c+b}{2}$, cui in formula generali respondet $\frac{A}{2}$, dimidio hoc incognitæ addito, fac $y\frac{-c+b}{2}=z$ & elevato utroque membro ad quadratum $y^2 \begin{array}{l}-cy\\+by\end{array}+\left(\frac{-c+b}{2}\right)^2=z^2$, seu $y^2 \begin{array}{l}-cy\\+by\end{array}+\frac{\overline{b-c}^2}{4}=z^2$. Unde erit $y^2 \begin{array}{l}-cy\\+by\end{array}=z^2-\frac{\overline{b-c}^2}{4}$, & pro primo hujus membro, altero surrogato in æquatione nostra, habes eam $z^2-\frac{\overline{b-c}^2}{4}-n^2+cm=0$. Ergo erit $z^2=\frac{\overline{b-c}^2}{4}+n^2-cm$; adeoque $z=\pm\sqrt{\frac{\overline{b-c}^2}{4}+n^2-cm}$; atqui initio factum est $y\frac{-c+b}{2}=z$, ergo erit tandem $y=\frac{c-b}{2}\pm\sqrt{\frac{\overline{b-c}^2}{2}+n^2-cm}$; adeoque soluta æquatio.

10. Methodus tamen communior est hæc. Formulæ generali $x^2+Ax=-aB$ addatur in parte utraque $\frac{AA}{4}$, id est quadratum dimidii coefficientis termini secundi, quo fiet, ut primum membrum æquationis sit quadratum perfectum: erit igitur $x^2+Ax+\frac{AA}{4}=\frac{AA}{4}-aB$. Nunc si extrahatur radix quadrata, habemus $x+\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{A^2}{4}-aB}$, & $x=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{\frac{AA}{4}-aB}$, quod idem ex superiori methodo descendit.

11. Habeamus nunc æquationem $x^2 \begin{array}{l}-nx\\-cx\end{array}+n^2=0$, erit $x^2 \begin{array}{l}-nx\\-cx\end{array}=-n^2$,

&

& addito quadrato dimidii coefficientis $-n-c$, $x^2 \begin{smallmatrix}-nx\\-cx\end{smallmatrix} + \frac{\overline{n+c}^2}{4} = -n^2 + \frac{\overline{n+c}^2}{4}$, & radice extracta erit $x - \frac{n-c}{2} = \pm\sqrt{-n^2 + \frac{\overline{n+c}^2}{4}}$; denique $x = +\frac{n+c}{2} \pm \sqrt{-n^2 + \frac{\overline{n+c}^2}{4}}$; hoc est facta actualiter potestate $\overline{n+c}^2$, quae est $n^2 + 2cn + c^2$, erit $x = \frac{n+c}{2} \pm \sqrt{\frac{-3n^2 + 2cn + c^2}{4}}$.

12. Solent etiam aequationes solvi, earum comparatione facta cum formula generali, per quam eae quantitates determinantur A, B, quae indeterminatae assumptae fuerant. Sit aequatio $x^2 \begin{smallmatrix}+bx-nb\\+cx+bc\end{smallmatrix} = o$; hac comparata cum formula $x^2 + Ax + aB = o$ habemus $Ax = \overline{b+c}\,.\,x$, $aB = bc - nb$; ergo $A = b + c$, & $B = \frac{bc - nb}{a}$, & quoniam a ad arbitrium accipi potest, si faciam $a = b$, erit $B = c - n$; ita determinatis valoribus A, a, B, si eos in radice aequationis generalis $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$ ipsarum loco substituamus, habebimus $x = \frac{-b-c}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 2bc + c^2 + 4bn}{4}}$, quod solitis operationibus aeque inventum esset.

13. Nunc ad aequationis aecomenicae radices $-\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, $-\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$ revertentes, atque iis translatis in partem incognitae, ut aequationis factores habeamus $x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, facile cognoscimus terminorum cognitorum summam, hoc est radicum, signis mutatis, esse A, qui est coefficiens secundi termini aequationis nostrae $x^2 + Ax + aB = o$, eorum vero productum aB esse tertium ejusdem formulae terminum. Quum autem haec sit propietas quaedam universalis, juvat hic in ejus principia diligenter inquirere, ut alibi deinde & illam extendere commodius accidat, & in proximum usum deducere.

14. Sint duo quicunque factores $x + a$, $x + b$; multiplicentur inter se; erit productum $x^2 \begin{smallmatrix}+bx\\+ax\end{smallmatrix} + ab$. Si hujus producti naturam consideres, statim deprehendis, summam extremorum terminorum a, b esse coefficientem termini secundi in producto, & ultimum ab esse eorum productum. Quotiescunque igitur duas habeas quantitates, quae simul additae secundi termini producti alicujus exhibeant coefficientem, & invicem multiplicatae dent ultimum illius terminum, statim ambos producti factores obtinuisti, si earum utramque ea quantitate angeas per quam pro-

productum fuerat ordinatum; sic in allato exemplo, quia a, & b simul sumptæ dant coefficientem termini secundi, & invicem ductæ dant tertium terminum, recte inferes, illius formulæ factores esse a, & b auctos quantitate x, per quam formula est ordinata, nempe esse $x + a$, $x + b$. Id autem verum est, quicunque, ut initio dixi, sint factores, quodcunque productum, seu hoc, sive illi omnes, seu eorum alter zero æqualis sit, aut cuilibet quantitati.

15. Si vero alter factorum $x + a$, $x + b$, vel ambo essent æquales zero (quod alterum non accidit nisi a, & b sint æquales) tunc etiam ex iis ortum productum esset zero; quod patet, quia quantitas per zero multiplicata, vel zero per zero semper zero esse debet: haberemus igitur æquationem secundi gradus $x^2 \begin{array}{l} +ax \\ +bx \end{array} + ab = o$, in qua æquatione ea omnia, quæ supra dicta sunt verificantur. Imo ea verificari debent in æquationibus quibuscunque, quum nihil aliud sit æquatio nisi productum, quod est æquale zero, quia unum, aut omnes factores sunt zero. Igitur in æquatione $x^2 \begin{array}{l} +ax \\ +bx \end{array} + ab = o$ necessario unus saltem ex factoribus $x + a$, $x + b$, quicunque tandem sit, zero æquabitur, per quem valor x obtinetur; unde infertur illum esse valorem x, qui loco x positus in æquatione efficit, ut termini omnes elidantur, & illum esse æquationis factorem, per quem perfecte dividi æquatio poterit.

16. At quamvis, uti diximus, ex eo quod æquatio sit æqualis zero, rectissime sequatur aliquem factorum zero æqualem esse, non tamen erui potest quinam sit hujusmodi factor; etenim si quum canonicæ æquationis factores sint $x + \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{AA}{4} + aB}$, $x + \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{AA}{4} + aB}$ eorum alter erit zero, at quinam ille sit, hactenus ignotum est. Hujus autem rei ratio manifesta est hæc, quia æquatio duas (idem dicendum si plures quam duas) exhibens diversas radices, seu incognitæ valores diversos, indifferens quidem est de se, & potest per alterutrum verificari; at eodem tempore per utrumque verificari impossibile est omnino, & absurdum. Ergo uno incognitæ valore determinato, si hic ex eadem incognita subtrahatur, factorem dabit æqualem zero, at subtracto altero fiet secundus factor necessario major, vel minor. Est igitur manifestum nescire nos, qui factor zero æquetur, si solam æquationem spectemus, adeoque nescire per quam ex inventis radicibus æquatio verificetur. Quod si quæras, quid tandem illud sit, quod hanc veluti æquationis indifferentiam tollat, vel valorem incognitæ potius hunc, quam illum determinet, id ex casuum peculiarium circumstantiis pendere dicimus, ex iis nempe, quas secum trahunt peculiaria problemata, quæque in Analysim introduci non possunt; sed hæc clarius etiam ex problematum solutione suo loco patebunt.

17. Methodi, quæ his æquationibus secundi gradus inserviunt, valent etiam ad alias quascunque solvendas, vel ad inferiorem gradum reducendas, dummodo in iis hæc tria habeantur, primo ut incognita non nisi in duobus terminis reperiatur, deinde ut illius exponens utrobique sit numerus par, tertio, ut exponens illius in uno termino sit duplus exponentis in alio. Sit $x^4 + aAx^2 + a^3 B = o$, quarti gradus æquatio, in qua requisitæ adsunt conditiones; Transfer terminum cognitum, & adde utrique parti quadratum dimidii coefficientis secundi termini, erit

erit $x^4 + aAx^2 + \frac{a^2AA}{4} = \frac{a^2AA}{4} - a^3B$, extracta radice quadrata $x^2 + \frac{aA}{2} = \pm\sqrt{\frac{a^2AA}{4} - a^3B}$, adeoque $x^2 = -\frac{aA}{2} \pm a\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$; & radice iterum extracta $x = \pm\sqrt{-\frac{aA}{2} \pm a\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}}$.

18. Si alia methodo uti voluissemus, faciendum erat $x^2 + \frac{Aa}{2} = z^2$, unde esset quadrando $x^4 + aAx^2 + \frac{a^2AA}{4} = z^4$, & $x^4 + aAx^2 = z^4 - \frac{a^2AA}{4}$, & secundo hoc membro in æquatione substituto, erit $z^4 = \frac{a^2AA}{4} - a^3B$, adeoque $z^2 = \pm a\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, & revocato valore z^2, $x^2 + \frac{aA}{2} = \pm a\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, denique $x = \pm\sqrt{\frac{-aA}{2} \pm a\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}}$, ut supra.

19. Sit $x^6 + a^2Ax^3 + a^5B = 0$, erit $x^6 + a^2Ax^3 + \frac{a^4AA}{4} = \frac{a^4AA}{4} - a^5B$, $x^3 + \frac{a^2A}{2} = \pm a^2\sqrt{\frac{AA}{4} - aB}$, æquatione e gradu sexto ad tertium producta.

20. Neque hic alia methodus est prætermittenda, quæ ad ea intelligenda, quæ in solutione æquationum superiorum tradituri sumus, plurimum juvat. Hanc æquationi generali simplicissimæ $x^2 + aA = 0$ applicemus. Fiat $A = \pm 2C - B$, & quantitas C sit positiva, B ad libitum vel positiva, vel negativa; erit igitur $x^2 \pm 2aC - aB = 0$; nunc incognita x in duas inæquales partes scindatur, sitque $x = m + n$, & quadrando $x^2 = m^2 + 2mn + n^2$; translatis terminis $x^2 - 2mn - m^2 - n^2 = 0$. Hanc æquationem fingamus identicam æquationi $x^2 \pm 2aC - aB = 0$, ita ut terminus termino æqualis sit; hoc supposito erit $\pm 2aC = -2mn$, & $aB = m^2 + n^2$; ex prima harum æquationum habemus $a^2C^2 = m^2n^2$, adeoque $n^2 = \frac{a^2C^2}{m^2}$, & substituto valore n^2 in alia æquatione $aB = m^2 + n^2$, fiet illa $aB = m^2 + \frac{a^2C^2}{m^2}$, & $m^4 - aBm^2 = -a^2C^2$; ergo $m^4 - aBm^2 + \frac{a^2B^2}{4} = \frac{a^2B^2}{4} - a^2C^2$; denique $m^2 = \frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}$, &

$m =$

$m = \pm \sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$.

21. Eodem pacto ex æquatione, quam primo consideravimus, descendit etiam $m^2 = \frac{a^2C^2}{n^2}$, quo valore m^2 substituto in secunda, est $aB = n^2 + \frac{a^2C^2}{n^2}$, & $n^4 - aBn^2 = -a^2C^2$, adeoque $n^4 - aBn^2 + \frac{a^2BB}{4} = \frac{a^2B^2}{4} - a^2C^2$, $n^2 = \frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}$, & $n = \pm\sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$.

22. Duo sunt valores m, & n, ut ex signis positis ante primam radicem colligitur; ergo quatuor erunt combinationes valorem x exprimentes; nempe

valores m — valores n

1. $\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} + \sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$

2. $-\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} - \sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$

3. $\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}} - \sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$

4. $-\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}} + \sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$

Ut ex his quatuor valoribus sciamus, quinam sint ii duo, qui æquationi nostræ $x^2 \pm 2aC - aB = 0$ inserviunt; adverte productum $mn = \mp aC$, ergo pro signo superiore ii valores m, n erunt conjungendi, quorum producta dant $-aC$; pro signo autem inferiore, illi, quorum producta præbent $+aC$. Hoc criterio usurpato videbimus valores primæ, & secundæ combinationis æquationi $x^2 - 2aC - aB = 0$ inservire, reliquos vero æquationi $x^2 + 2aC - aB = 0$. Hinc ut proprie magis loquamur, cum hæc solutio quatuor det valores x, erit solutio æquationis quarti gradus ortæ ex duabus secundi in se ductis $x^2 - 2aC - aB$. $x^2 + 2aC - aB = 0$, idest $x^4 - 2aBx^2 - 4a^2C^2 + a^2B^2 = 0$. At sicuti hæc in duas secundi resolvi potest, ideo de his agentes, congruum erat hujus solutionis usum indicare. Resolutio autem æquationis per ea, quæ nuper dicta sunt, hoc modo obtinetur. Transfer in partem alteram terminum $4a^2C^2$, habebis $x^4 - 2aBx^2 + a^2B^2 = 4a^2C^2$; extrahe radicem modo, oritur $x^2 - aB = \pm 2aC$, seu $x^2 \mp 2aC - aB = 0$.

23. Si forte poneretur $C^2 > \frac{B^2}{4}$, tunc $\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}$ esset imaginaria; sed non ideo

ideo dicendum esset, omnes imaginarios esse quatuor x valores. Nam hoc etiam posito primi duo reales sunt. Sufficiet id demonstrare de primo. Sit igitur $x = \sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} + \sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$, & quadrando $x^2 = \frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2} + 2\sqrt{\frac{a^2B^2}{4} - \frac{a^2B^2}{4} + a^2C^2} + \frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}$, hoc est $x^2 = aB + 2aC$, & $x = \pm\sqrt{aB + 2aC}$; ergo valor ille primus x, licet facta $C > \frac{B}{2}$, sub imaginarii forma appareat, revera imaginarius non est, sed reali quantitati $\sqrt{aB + 2aC}$ æqualis, quod ostendit imaginaria omnia se mutuo elisisse. Reliqui duo valores x in eadem hypothesi $C > \frac{B}{2}$ sunt imaginarii; eadem enim operatione facta invenitur $x = \sqrt{aB - 2aC}$ in utroque casu.

24. Adnota formulas tertiæ, & quartæ combinationis reales fieri, si dividantur, vel multiplicentur per $\sqrt{-1}$; satis erit hoc demonstrare de formula $\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}} - \sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$ divisa per $\sqrt{-1}$; Hæc autem ita divisa sit $= x$; ergo quadrando erit

$$x^2 = \frac{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2} - 2\sqrt{\frac{a^2B^2}{4} - \frac{a^2B^2}{4} + a^2C^2} + \frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}{-1} = \frac{aB - 2aC}{-1}$$

adeoque $x^2 = 2aC - aB$, & radice extracta $x = \pm\sqrt{2aC - aB}$ quantitati reali in hypothesi $C > \frac{B}{2}$; idem accidisset, si non divisio, sed multiplicatio per $\sqrt{-1}$ facta fuisset. Hic tamen ita inventus valor differt a tertio illo, quem quatuor nostræ combinationes ferunt; id tantum animadvertendum duximus, ut pateret, qua ratione per imaginarium $\sqrt{-1}$ expressiones quadraticæ imaginariæ in reales mutari possint, quod scivisse aliquando juvabit.

25. Si post inventum valorem $m = \pm\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$ illum in æquatione $nm = -aC$ substituissemus, inventa esset $n = \frac{-aC}{\pm\sqrt{\frac{aB}{2} + a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}}$

& secundi membri numeratore, & denominatore multiplicato per $\sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{B^2}{4} - C^2}}$ fierit $n = \pm\sqrt{\frac{aB}{2} - a\sqrt{\frac{BB}{4} - C^2}}$, ut supra.

26. Vi-

26\. Videtur hic esse locus ostendendi, qua methodo fieri possit habitis duabus æquationibus, ut una incognita quamvis ad quadratum elevata fine extractione radicum evanescat. Methodus ita generaliter demonstrabitur. Sint duæ secundi gradus æquationes $y^2+Ay+B=o$, $y^2+Cy+D=o$; quantitates A, B, C, D sunt determinatæ per cognitas, & incognitam aliam; una æquatio ex alia subtrahatur ex. gr. prima ex secunda, ut fit $\overline{C-A}\,.\,y+D-B=o$, vel $y+\frac{D-B}{C-A}=o$, & posita $\frac{D-B}{C-A}=E$, $y+E=o$; hæc multiplicetur per y, erit $y^2+Ey=o$, quæ subtracta e prima dat $\overline{A-E}\,.\,y+B=o$, & $y\frac{+B}{A-E}=o$, & facta $\frac{B}{A-E}=F$, $y+F=o$; si hanc ab $y+E=o$ subducas, fiet tandem $E-F=o$. In qua y non habetur.

27\. Proponantur modo ex. gr. duæ æquationes $y^2+2xy+2ax-a^2+by+bx-b^2=o$, $y^2+2xy-ay+by+bx-b^2=o$, in quibus duæ sunt incognitæ x, y, & earum una eliminari oporteat, quin radix extrahatur. Subtrahe secundam e prima, habes $2ax+ay-a^2=o$, & facta divisione per a, $y+2x-a=o$, in qua æquatione y habet dimensionem linearem; multiplica eam per y, ut fit $y^2+2xy-ay=o$, & hanc subtrahe de secunda datarum æquationum; erit $by+bx-b^2=o$, & $y+x-b=o$, æquatio alia habens y in prima dimensione; istam nunc si subtrahas ab inventa prius $y+2x-a=o$, fiet tandem $x-a+b=o$, in qua deest y, quod erat propositum.

28\. Vis methodi nullo modo requirebat, ut primam potius de altera, quam secundam de prima subtraheremus, neque ut secunda subtractio ex hac potius, quam ex illa fieret; juvabit tamen plurimum, ut finalis æquatio simplicior obtineatur & expeditior, his potius uti subtractionibus, quam illis, at certa nequit assignari regula: quare prudentis erit Analystæ eas in peculiaribus casibus eligere, quæ aptiores esse videbuntur: eadem de causa juvat potius hanc, quam illam incognitam eliminandam suscipere; si enim in æquatione supra posita non y, sed x voluissemus eliminare, implicatior fuisset operatio; sed aliud hujus rei afferamus exemplum.

29\. Sint æquationes duæ $y^2-xy+x^2=o$, $y^2-cx+c^2=o$, & velimus eliminare y; e prima secunda detracta habemus $x^2-xy+cx-c^2=o$, & divisione facta per x, mutatisque omnium terminorum signis, erit $y-x-c+\frac{cc}{x}=o$, ubi y in prima est dimensione; æquatio ista ducta in y erit $y^2-xy-cy+\frac{c^2y}{x}=o$, quam a prima subtrahimus, & habemus $x^2+\frac{cxy-c^2y}{x}=o$, adeoque $y+\frac{x^3}{cx-c^2}=o$, æquatio secunda, in qua y unam obtinet dimensio-

fionem; hanc igitur si ab alia prius inventa detrahamus, y evanescet omnino, erit $\frac{-x^2 - cx + c^2}{x} \quad \frac{-x^3}{cx - c^2} = o$, seu $x^4 + cx^3 - 2c^3x + c^4 = o$, quæ est quarti gradus æquatio.

30. Si incognita eliminanda in una ex datis æquationibus ad primam tantum potestatem elevata esset, sicuti accidit in æquationibus ex. gr. $x^2 - y^2 - c^2 = o$, $xy - a^2 = o$, patet secundam esse per eam incognitam multiplicandam, quam ejicere volumus, nisi enim in utraque æquatione habeant termini illius incognitæ potestatem eandem, numquam per subtractionem elidi poterunt, in quo tota methodi vis consistit.

31. Hujus artificii naturam diligenter consideranti facile patebit, illud non in æquationibus secundi gradus tantum, sed in superioribus valere, dummodo incognita eliminanda ad æqualem assurgat potestatem; quod semper obtineri posse ex numero præcedenti potest inferri; sufficiet multiplicare æquationem, in qua minor est incognitæ potestas per talem ipsius potestatem, quæ sit differentia maximorum incognitæ exponentium: ita in his $x^5 + y^2x^3 - a^5 = o$, $x^2 + xy - y^2 = o$, habebis x ad eandem maximam potestatem in utraque elevatam, si secundam per x^3 multiplices, cujus x^3 exponens est differentia 5, 2 maximorum x exponentium in propositis æquationibus.

32. Sint igitur cujuscunque gradus sed ejusdem æquationes duæ I. $y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \ldots D = o$: II. $y^m + Ly^{m-1} + My^{m-2} \ldots R = o$: Subtrahatur secunda e prima erit $\overline{A-L}.y^{m-1} + \overline{B-M}.y^{m-2} \ldots D - R = o$, & $y^{m-1} + \frac{B-M}{A-L}.y^{m-2} \ldots \frac{D-R}{A-L} = o$; &, ut expeditius agamus facto coefficiente secundi termini $= P$, & ultimo termino $= Q$, erit III. $y^{m-1} + Py^{m-2} \ldots Q = o$, in qua æquatione y est in gradu unitate inferiori respectu æquationum, quæ fuerunt propositæ. Hæc multiplicetur per y, ut sit $y^m + Py^{m-1} \ldots Qy = o$, quæ si de prima subtrahatur, prodibit $\overline{A-P}.y^{m-1} + By^{m-2} \ldots Qy + D = o$, seu $y^{m-1} + \frac{B}{A-P} y^{m-2} \ldots \frac{Q}{A-P}.y + \frac{D}{A-P} = o$, & facto coefficiente secundi termini $= S$, penultimi $= T$, & ultimo termino $= U$, erit IV. $y^{m-1} + Sy^{m-2} \ldots Ty + U = o$, æquatio alia, in qua pariter y est in gradu unitate inferiori, quam si subtrahamus de tertia, habemus hanc aliam $\overline{P-S}.y^{m-2} \ldots - Ty + Q - U = o$, ubi gradus y duabus dimensionibus est imminutus. Hæc satis, superque sunt, ut methodus appareat, qua operationem ita producere possimus, ut y tandem evanescat.

33. Si plures essent æquationes v. gr. tres, pariter incognitæ tres, harum unam prius eliminabimus applicantes hanc methodum duabus æquationibus, puta primæ, & secundæ; eandem deinde incognitam eliminabimus combinatione alia adhibita ex. gr. primæ æquationis cum tertia. Hac via duas obtinebimus æqua-

æquationes, in quibus una ex tribus propositis incognitis desiderabitur; quarum ope aliam incognitam ejiciemus, & denique ad unius incognitæ æquationem perveniemus.

CAPUT SEXTUM.

De resolutione Problematum Arithmeticorum, quæ determinata sunt.

1. PRoblema nihil est aliud, quam propositio, in qua ex quantitatibus aliquibus notis nonnullæ ignotæ quantitates investigandæ proponuntur. Ita problema esset, datis duobus numeris, eorum ex. ca. summam vel differentiam vel productum &c. postulare. Cum vero quantitates ignotæ detectæ sunt, & determinatæ, tunc problema dicitur resolutum.

2. Triplex est problematum genus, alia sunt determinata, alia indeterminata, alia plusquam determinata. Antequam horum problematum naturam explicemus, illud in memoriam revocare oportet, nimirum ignotas quantitates tamquam cognitas spectari, & extremis alphabetti litteris exprimi, notas vero reliquis. His præmissis, ex problematis conditionibus, & ex relationibus, quas incognitæ habent ad cognitas, æquationes constituendæ sunt, quarum numerus si æqualis fuerit numero incognitarum, tunc problema dicitur determinatum, & per regulas supra traditas ad æquationem deveniemus, quæ contineat unam incognitam. Si æquatio, quæ sese offert, primi aut alterius gradus fuerit, valorem incognitæ inveniemus, & solutionem problematis exhibebimus.

3. Problema determinatum hoc esset: invenire duos numeros quorum summa sit 6, & differentia 2. Vocentur numeri quæsiti x, y; ergo ex conditionibus allatis habebimus $x+y=6$, & $x-y=2$. Addamus primæ æquationi secundam, erit $2x=8$. & $x=\frac{8}{2}=4$; e prima deinde alteram subtrahamus, erit $2y=6-2=4$; & $y=\frac{4}{2}=2$; ergo duo quæsiti numeri sunt 4, & 2. Et revera $4+2=6$, $4-2=2$, ut conditiones problematis postulant.

4. Si vero conditionibus problematis omnibus rite observatis æquationum numerus minor est numero incognitarum, tunc problema dicitur indeterminatum, quia numquam fiet, ut ad æquationem veniamus, quæ unam tantum habeat incognitam. Idcirco ut hujusmodi problemata solvantur, in ultima æquatione opus est ad arbitrium unam vel plures determinare incognitas, ut in æquatione illa una incognita supersit. Hoc esset problema indeterminatum: Quæruntur duo numeri quorum summa sit 6. Vocatis his numeris x, y, quacunque utamur industria, nullam aliam obtinebimus æquationem præter hanc $x+y=6$; ut igitur solvatur problema, supponamus x æqualem numero cuilibet ex. gr. 5; tunc erit $5+y=6$, adeoque $y=6-5=1$, solutumque erit problema; cujus manifestum est infinitas esse solutiones, tot nempe, quot valores x ad arbitrium sumi possunt. At si problemati huic alia adderetur conditio, nempe ut numeri positivi esse debeant, & integri, patet multo minorem fore numerum solutionum, quinque enim essent dumtaxat; hoc in casu problema dicitur semideterminatum.

5. Si

5. Si denique numerus æquationum major sit, quam numerus incognitarum, problema vocatur plusquam determinatum, cujus solutio plerumque est impossibilis; hujusmodi esset quærere duos numeros x, y, quorum summa sit 6, secundo e primo subtracto, differentia 2, & invicem multiplicatis productum 15. Ex tribus his conditionibus tres oriuntur æquationes $x+y=6$, $x-y=2$, $xy=15$, quæ impossibilem reddunt solutionem, quia primæ duæ pugnant cum tertia; ex primis enim, ut supra vidimus, est $x=4$, $y=2$, quorum productum æquale est 8. Si tertia conditio esset, ut productum fuisset $xy=8$, tunc solutio problematis possibilis quidem fuisset, sed casu, quia tertia conditio addita fuisset, quæ jam necessario ex præcedentibus sequebatur, adeoque erat superflua. Superfluas conditiones hujusmodi in proposito problemate certo reperiri cognoscimus, quotiescunque identicam æquationem habeamus, idest, cum termini unius membri iidem sunt ac termini alterius; uti accidit in casu nostro; nam positis tribus illis æquationibus $x+y=6$, $x-y=2$, $xy=8$, habemus ex primis duabus $x=4$, $y=2$, qui valores in tertia substituti dant $8=8$ æquationem identicam. Ratio autem patet, quia sicuti diversæ expressiones non possunt haberi nisi ex conditionibus diversis; ita expressiones identicæ ex identicis conditionibus descendant necesse est: propterea si conditiones, ex quibus hæ oriuntur, diversæ illæ videntur, differentia hæc erit apparens tantum, non vera.

6. Ex hac æquationis identitate discimus etiam cognoscere theoremata, quæ problematum specie sæpe proponuntur; nam si inclusis conditionibus omnibus in identicam æquationem incurramus, indicium id erit manifestum, quantitates quascunque ejus generis, de quibus sermo est, præditas esse conditionibus requisitis. Clarius id fiet exemplo. In serie numerorum naturalium 1, 2, 3, &c. quatuor quæruntur numeri successivi, qui tales sint ut extremorum summa æquet summam mediorum. Sint hi numeri x, y, z, u. Ex natura seriei habemus $x+1=y$, $y+1=z$, $z+1=u$; ex alia vero conditione est $x+u=y+z$: ex primis duabus æquationibus habemus $x+2=z$, ex hac, & tertia $x+3=u$: tunc substitutis in quarta valoribus y, z, u, oritur $2x+3=2x+3$ æquatio identica; ex qua palam fit, conditionem illam in quatuor successivis numeris seriei naturalis requisitam superfluam esse, quippe quæ ex ipsa serie descendit, & est propria quatuor numerorum illius, quicunque sint dummodo successivi; unde non problema est, sed theorema.

7. Quod si identitas hæc habeatur, licet non omnibus problematis conditionibus inclusis, hoc vel errorem indicat, vel assumpsisse nos conditionem aliquam superfluam, ea omissa, quæ assumi debebat; quare iterum attente conditiones perpendere opportebit. Illud est etiam hic addendum has conditiones superfluas aliquando efficere, ut determinatum videatur problema, quod revera est indeterminatum. Quærimus ex. gr. numeros quatuor x, y, z, u, in quibus summa extremorum sit æqualis summæ mediorum, & præterea summa mediorum sit $=7$. Igitur ex prima conditione est $x+u=y+z$, ex alia, & prima $y+z=7$, $x+u=7$; adeoque tot æquationes habemus, quot incognitas, ut problemata determinata requirunt num. 3; at si in prima æquatione loco membrorum $x+u$, $y+z$ eorum valores substituimus datos per æquationes alias, fit $7=7$; ergo superfluam conditionem admisimus, & ad problema determinandum inutilem. Etenim vero nonne est inutilis hæc $x+u=7$, quæ manifestissime in aliis includitur, in quibus volumus $x+u=y+z$, & $y+z=7$? Quia autem diligenter problemate iterum considerato, ejusque conditionibus, nulla reperitur via, qua ad tertiam æquationem veniamus, ideo problema erit indeterminatum.

8. Ex

8. Ex dictis hactenus facile inferri potest, quanta opus sit diligentia, quam attente omnia animadvertenda, quæ problemata respiciunt, ut necessarias inde æquationes eliciamus; quæ cura eo major esse debet, quo nullæ certæ tradi possunt regulæ, quarum ope ex conditionibus ad æquationes perveniamus, quas aliquando eruere maxime difficile, & arduum est. Ingenio hæc aperienda est via, & exercitatione, cujus gratia multa hic problematum addimus exempla initio ab arithmeticis facto. Sit itaque.

9. Problema primum. Quum quis Cajum interrogaret, quota esset hora, respondit ille, horas a media nocte ad horas, quæ ante meridiem tunc supererant, esse ut $2:3$. Quæritur quænam sit hora a Cajo indicata? Sint horæ a media nocte transactæ $=x$; erunt reliquæ ante meridiem $=12-x$; ergo ex Caji responsione $2:3::x:12-x$, adeoque $3x=24-2x$, seu $5x=24$, & $x=\frac{24}{5}$. Est igitur indicata a Cajo hora quarta cum scrupulis primis 48 post mediam noctem. Quod si velis problema hoc terminis generalibus expressum, & resolutum, sit x ut antea numerus horarum a media nocte, numerus horarum a media nocte ad meridiem $=a$, & proportio, quam supra exprimebat $2:3$, sit proportio quælibet $m:n$. Habebimus igitur $x:a-x::m:n$, & componendo $x:a::m:n+m$; ergo $x=\frac{am}{m+n}$. Sit nunc $m=2$, $n=3$, & $a=12$, erit $x=\frac{24}{5}$, & hora eadem, quæ supra est inventa. Fac $m=5$, $n=1$, $a=12$, erit $x=\frac{60}{6}=10$; erat igitur in hac hypothesi hora decima post mediam noctem.

10. Problema secundum. Canis a lepore, quem insequitur, initio motus passuum numero $=a$ distat, suntque velocitates canis, & leporis, seu spatia a cane, & lepore eodem tempore percursa ut $m:n$. Quæritur post quot passus leporem sit canis assecuturus? Vocetur spatium a lepore percursum antequam canis illum assequatur $=x$; ergo spatium eodem tempore a cane peractum erit $a+x$: igitur, quoniam horum spatiorum data est proportio, erit $a+x:x::m:n$ seu dividendo $a:x::m-n:n$; unde $x=\frac{an}{m-n}$. Manifestum est problema requirere, ut m major sit quam n: suppone igitur $a=100$, $m=3$, $n=2$, erit $x=\frac{200}{1}=200$, & $a+x=300$, hoc est 300. percursis passibus canis perveniet ad leporem. Ita alias quascunque hypoteses ad libitum finge, dummodo numquam facias $m=n$, aut $n>m$, in quibus casibus aut canis æque semper, aut semper magis a lepore distaret.

11. Problema tertium. Sempronius volens quandam nummorum summam determinato pauperum numero distribuere, animadvertit octo nummos deesse sibi, ut singuli pauperes ternos accipiant, & tres superesse, si singulis duos tantum det nummos. Quæritur numerus pauperum, & nummorum? Sit numerus pauperum ignotus $=x$; igitur, quoniam si singulis tres dentur, desunt octo nummi, erit eorum numerus $=3x-8$; at iidem ob secundam problematis conditionem debent esse $=2x+3$: ergo $3x-8=2x+3$, seu $x=11$. Pauperes itaque undecim sunt, & quia $3x-8$, vel $2x+3$ sunt nummi, substituto 11 loco x, erit eorum numerus $=25$. Ut generalibus terminis utamur, problema sic

ſic proponatur. Ut ſinguli pauperes accipiant nummorum numerum m, deſunt nummi n, ſi autem ſingulis dentur nummi p, ſuperſunt nummi $= q$: quæritur, ut antea, numerus & pauperum, & nummorum. Ex conditione prima eſt $mx - n$ nummorum numerus, idem ex ſecunda eſt $px + q$; ergo $mx - n = px + q$, ſeu $mx - px = q + n$, & $x = \frac{q+n}{m-p} =$ numero pauperum; $\frac{qp + pn}{m-p} + q = \frac{mq + mn}{m-p} - n = \frac{pn + qm}{m-p} =$ numero nummorum.

12. Problema quartum. Quum a Titio quidam peteret, quot annos natus eſſet, reſpondit ipſe: ſi annorum meorum numerum in 4 ducas, & producto 15 addas, numerum habebis tanto majorem quam 150, quanto numerus 100 annorum meorum numerum ſuperat. Quæritur annorum Titii numerus. Sit hic numerus $= x$, ex propoſita conditione habemus arithmeticam hanc proportionem $4x + 15 : 150 :: 100 : x$; ergo $5x + 15 = 150 + 100 = 250$, & $x = \frac{250 - 15}{5} = 47$, qui ſunt anni quæſiti. Generaliter: numerus multiplicans x ſit m, a numerus producto addendus, & $mx + a$ æque ſuperet b, ac c ſuperat x. Erit arithmetice $mx + a : b :: c : x$; ergo $\overline{m+1} \cdot x + a = b + c$, & $x = \frac{b + c - a}{m + 1}$.

13. Problema quintum. Interrogatus quota eſſet hora, dixi: ſi horis a media nocte elapſis diviſis per 2 addatur $\frac{3}{4}$ earum, quæ ad mediam noctem proximam ſuperſunt, quæſitus prodibit horarum numerus. Numerus horarum, quæ poſt mediam noctem elapſæ jam ſunt, ponatur $= x$; erit igitur numerus earum, quæ ad proximam mediam noctem ſuperſunt $= 24 - x$: quare ex conditione allata erit æquatio $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cdot \overline{24 - x} = x$, ideſt $\frac{x}{2} + 18 - \frac{3x}{4} = x$, & $18 = x + \frac{3x}{4} - \frac{x}{2} = \frac{5x}{4}$ ſeu $x = \frac{72}{5} = 14 + \frac{2}{5}$; erat igitur tunc hora 14 cum 24 minutis a media nocte, ſeu 2 hora cum 24 minutis poſt meridiem.

14. Problema ſextum. Dominus cuidam famulo daturum ſe julios ſeptem in dies ſingulos promittit hac lege, ut ſi quo die juſtum opus non expleverit, ipſe ſibi julios quinque debeat: poſt dies triginta inventum eſt neque Dominum famulo, neque famulum domino quidquam debere. Quæritur quot diebus famulus opus perſolverit, quot otioſus fuerit? Dies laboris vocentur $= x$, adeoque reliqui $= 30 - x$: ex problematis conditione erit $7x = 5 \cdot \overline{30 - x}$; ergo $12x = 150$, & $x = \frac{150}{12} = 12\frac{1}{2}$; igitur conſtat famulum dies $12\frac{1}{2}$ in debito opere inſumpſiſſe, reliquis nempe $17\frac{1}{2}$ fuiſſe otioſum.

15. Problema ſeptimum. Cajus paterfamilias in ſuis alendis quotannis nummos aureos impendit 380, & quod reliquum eſt ex annuis reditibus fænori dat, eſtque ex eo perceptus fructus quarta ipſius reſidui pars annis ſingulis; anno ſequenti pariter 380 aureos nummos impendit, & reſiduum dat fænori ut antea: idem accidit anno tertio, poſt quem invenit, reditum annuum ſexta primi anni reditus parte eſſe auctum. Quæritur quinam ſit primi anni reditus? Reditus primi anni eſto $= x$, nummi aurei $380 = a$; erit igitur primi anni reſiduum $x - a$, & fructus perceptus ex fænore $= \frac{x - a}{4}$; ergo reditus ſecundi anni $= x$ +

$+\frac{x-a}{4}$, & residuum $=x+\frac{x-a}{4}-a=\frac{5x-5a}{4}$, cujus fructus $=\frac{5x-5a}{16}$ dabit tertii anni reditum $=x+\frac{x-a}{4}+\frac{5x-5a}{16}=x+\frac{x}{6}$ ex ipsa problematis conditione; ergo $\frac{16x+4x-4a+5x-5a}{16}$ idest $\frac{25x-9a}{16}=\frac{7x}{6}$ seu $38x=54a$, $x=\frac{54a}{38}=\frac{27a}{19}=\frac{10160}{19}=540$. Igitur primi anni reditus fuerunt nummi aurei 540, secundi anni $540+\frac{160}{4}=580$, tertii denique $580+\frac{200}{4}=630$, qui numerus est $540+\frac{540}{6}$: quemadmodum initio fuerat in conditione propositum. Ut rem terminis generalibus conficiamus, sit fructus ex fænore pars n^{esima} sortis, & primi anni reditus ad suum augmentum rationem habeat $1:m$: erit primi anni reditus x, secundi $x+\frac{x-a}{n}$, tertii $x+\frac{x-a}{n}+\frac{nx+x-a-na}{n^2}=x+mx$; quare $\frac{n^2x+nx-na+nx+x-a-na}{n^2}=x+mx$, & $2nx+x-2na-a=mn^2x$, $2nx+x-mn^2x=2na+a$, $x=\frac{2n+1.a}{2n+1-mn^2}$.

16. Problema octavum. Data duorum numerorum proportione, & summa, numeros ipsos invenire. Summa sit $=a$, proportio ut $m:n$, & duo quæsiti numeri vocentur x, y. Juxta conditiones erit $x+y=a$, & $x:y::m:n$, aut componendo $x+y=a:y::m+n:n$, seu $x:x+y=a::m:m+n$; ergo $y=\frac{an}{m+n}$, $x=\frac{am}{m+n}$. Nunc ex. gr. finge summam esse 100, & proportionem ut $3:2$; igitur $100=a$, $m=3$, $n=2$, & $x=\frac{300}{5}=60$, $y=\frac{200}{5}=40$. Eadem uti possumus methodo, si loco summæ data esset numerorum differentia; ita ut sit $x-y=a$: etenim ex proportione erit dividendo $x-y=a:y::m-n:n$, seu $x:x-y=a::m:m-n$; ergo $y=\frac{an}{m-n}$, & $x=\frac{am}{m-n}$.

17. Problema nonum. Nonnulli homines conveniunt, ut simul cænent, & in cæna scutata 12 impenduntur: quum duo ex convivis solvendo non sint, reliqui scutatum unum solvere debent præter id, quod singulis solvendum fuisset, si sumptus per convivarum omnium numerum fuisset divisus. Quæritur quinam sit convivarum numerus? Quæsitus numerus sit $=x$. Erit igitur numerus eorum, qui symbolam contulerunt $x-2$, & symbola ipsa $\frac{12}{x-2}$; at si omnes solvissent pro cæna, fuisset $\frac{12}{x}$; ergo ex conditione $\frac{12}{x-2}-\frac{12}{x}=1$, seu $\frac{12x-12x+24}{x^2-2x}=1$, & $x^2-2x=24$, $x^2-2x+1=25$, $x-1=\pm 5$, $x=6$, $x=-4$. Hoc in casu radix negativa usum habere non potest; ergo 6 fuere convivæ. Cæterum

terum etiam negativa radix -4 requisitis ab analysi conditionibus est prædita, quoniam $\frac{12}{-4-2} - \frac{12}{-4} = 1$.

18. Si quis ita problema proposuisset, ut radices ambæ positivæ essent, nonnihil in ipso indeterminatum remaneret. Ex. gr. fac sumptum cœnæ fuisse $=75$, unum e sociis dedisse 19, residuum per capita æque divisum, & ita horum symbolam fuisse unitate minorem, quam revera esse debuisset, si sumptus integer per sociorum numerum divisus esset. Sit x ut antea numerus sociorum. Nisi fuisset qui daret 19, symbola uniuscujusque esset $\frac{75}{x}$; at in casu proposito est $\frac{75-19}{x-1} = \frac{56}{x-1}$, sed hæc debet esse unitate minor quam prima; ergo $\frac{56}{x-1} + 1 = \frac{75}{x}$, id est $56x + x^2 - x = 75x - 75$, $x^2 - 20x = -75$; ergo $x^2 - 20x + 100 = 25$, seu $x - 10 = \pm 5$, $x = 15$, si radicem positivam accipias, $x = 5$, si negativam. Habet igitur x valores duos positivos, adeoque post problematis solutionem aliquid indeterminati remanet; & nihil aliud respondere potes, nisi aut sociorum numerum fuisse 15, aut 5.

19. Problema decimum. Duos numeros invenire quorum summa $= a$, & summa quadratorum $= bb$. Fingamus numeros esse x, y; ergo $x + y = a$, & $x^2 + y^2 = bb$. Prima æquatio quadrando est $x^2 + 2xy + y^2 = a^2$; hinc si æquationem secundam subtrahamus, residuum erit $2xy = a^2 - b^2$; quod e secunda subtractum, dat $x^2 - 2xy + y^2 = 2b^2 - a^2$; ergo $x - y = \sqrt{2b^2 - a^2}$; quæ si addatur & deinde a prima subtrahatur, fiet $x = \frac{a + \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$, & $y = \frac{a - \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$.

20. Problema undecimum. Tres invenire numeros continue proportionales, quorum data sit summa, & summa quadratorum. Esto summa numerorum $x + y + z = a$, & summa quadratorum $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$. Eleva primam æquationem ad quadratum, quod est $x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2xz = a^2$, & hinc secundam subtrahe; habes $2xy + 2yz + 2xz = a^2 - b^2$: at numeri continue proportionales esse debent; ergo $xz = y^2$; adeoque $2y \cdot \overline{x + y + z} = a^2 - b^2$; sed summa est $= a$; igitur $2y \cdot a = a^2 - b^2$, seu $y = \frac{a^2 - b^2}{2a}$. Numero y invento erit jam $x + z = a - y$, & $x^2 + z^2 = b^2 - y^2$; ergo problema ad antecedens redactum est.

21. Problema duodecimum. Tres numeros invenire, quorum summa $= a$, summa quadratorum $= b^2$, & summa rectangulorum, quot fieri possunt diversa, $= cc$. Hæ sunt æquationes, 1^a. $x + y + z = a$, 2^a. $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, 3^a. $xy + xz + yz$

$+yz=c^2$. Prima ad quadratum perducta, est $x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2=a^2$, & ex hac subtracta secunda superest $2xy+2yz+2xz=a^2-b^2$, unde si deducatur tertia multiplicata per 2 erit residuum $o=a^2-b^2-2c^2$, seu $c^2=\frac{a^2-b^2}{2}$: ostenditur hoc pacto problema non esse possibile, nisi in hypotesi, in qua sit $c^2=\frac{a^2-b^2}{2}$; imo hinc theorema infertur, quo docemur, summam rectangulorum, quotquot ex tribus numeris fieri possunt, esse semper $\frac{a^2-b^2}{2}$, si summa numerorum sit a, & summa quadratorum bb; adeoque problema nostrum est plusquam determinatum; cujus problematum speciei natura est alibi indicata.

22. Problema decimumtertium. Invenire duos numeros, quorum productum sit $=a^2$, & quorum summæ quadratum ad quadratum differentiæ sit in ratione $b:c$. Sit numerorum summa $=2x$, & differentia $=2y$; ergo major numerus $=x+y$, minor $=x-y$. Ex conditione prima debet esse $x^2-y^2=aa$, ex altera $4x^2:4y^2$, seu $x^2:y^2::b:c$; ergo dividendo $x^2-y^2=aa:y^2::b-c:c$, seu $x^2:x^2-y^2=a^2::b:b-c$; ergo $y^2=\frac{ca^2}{b-c}$, $x^2=\frac{ba^2}{b-c}$, & extracta radice $y=\frac{a\sqrt{c}}{\sqrt{b-c}}$, $x=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b-c}}$.

23. Problema decimumquartum. Quæruntur duo numeri, in quibus hæc tria nempe summa, productum, & differentia quadratorum æqualia sint. Sit numerus major $=x$, minor $=y$; habemus æqnationes $x^2-y^2=xy$, & $x+y=xy$, & divisa prima per secundam fit $x-y=1$; ergo $x=1+y$; quo x valore in secunda substituto, erit illa $2y+1=y^2+y$, unde $y^2-y=1$, $\overline{y-\frac{1}{2}}^2=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$, $y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$; quo valore posito loco y in æquatione $x-y=1$, erit $x=1+\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Et revera duo numeri $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, & duo etiam $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ problema perfecte solvunt; primi enim duo exhibent summam, productum, & quadratorum differentiam $=2+\sqrt{5}$, duo alii $=2-\sqrt{5}$.

24. Si ad x inveniendam substituissemus valorem y inventum in prima æquatione, fuisset $x=y.\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; unde quatuor exur-

gunt valores x, scilicet $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, -1, -1. Duos primos valores cum valoribus y problema solvere jam vidimus: at alii duo id præstare non possunt, neque ullo pacto problemati inserviunt. Id autem mirum accidere non debet, ut alibi monuimus. Namque æquationes id tantum indicant, inter exhibitos valores aliquos esse, qui problema solvant; neque tuto affirmare possumus valores omnes hujusmodi esse, nisi cum æquatio simpliciori methodo fuerit pertractata. Cum enim illam per implexas vias circumducimus, aliæ tacitæ conditiones involvuntur, quæ radicum numerum necessario augent. At superfluas radices a veris facile secernes, si valores omnes in æquationibus omnibus successive colloces. Ita in casu nostro cum valorem y in secundam æquationem inducimus, solvenda nobis est æquatio primi gradus, ut valorem x eruamus; at si eundem valorem substituamus in prima, æquatio gradus secundi solvenda est, quæ via quum implexior sit, mirum non est, si cum veris radices superfluæ misceantur.

25. Problema decimumquintum. Datum numerum $=2a$ ita in duas partes dividere, ut earum quadrata invicem multiplicata dent numerum $=a^3b$. Partium differentia vocetur $=2x$, major numerus $=a+x$, minor $=a-x$; ergo $\overline{a+x}^2 \cdot \overline{a-x}^2 = a^3b$, seu $\overline{a^2-x^2}^2 = a^3b$, & radice extracta $a^2-x^2 = \pm a\sqrt{ab}$; ergo $x = \sqrt{a^2 \mp a\sqrt{ab}}$: major itaque numerus erit $a+\sqrt{a^2 \mp a\sqrt{ab}}$, & minor $a-\sqrt{a^2 \mp a\sqrt{ab}}$. Si radicis interioris superius signum accipias, erit $\sqrt{a^2 - a\sqrt{ab}}$ quantitas minor quam a, adeoque erit numerus $2a$ in partes positivas divisus, solutumque problema; at si accipias inferius signum, cum sit $\sqrt{a^2 + a\sqrt{ab}} > a$, necessario erit major numerus $> a$, & minor negativus. Sit enim $2a=14$, & $a^3b=2304$; ergo $a\sqrt{ab}=48$, unde $x=\sqrt{49 \mp 48}$. Accepto signo superiori, fiet $x=1$, & duo numeri quæsiti $7+1=8$, $7-1=6$. At accepto signo inferiori, est $x=\sqrt{97}$; ergo major numerus $=7+\sqrt{97}$, minor $=7-\sqrt{97}$, idest primus major quam 14, alter negativus.

26. Problema decimumsextum. Quælibet auri libra valet a, argenti b: ut metallum habeam ex his mixtum, cujus valor in libras singulas sit c, quota pars auri, & quota argenti est accipienda? Sit auri pars $=x$, argenti $=y$. A regula aurea, quæ etiam trium appellatur, discimus, quod si una auri libra valet a, pars auri x valebit ax; quia $1:a::x:ax$; pariter quia $1:b::y:by$, erit by valor portionis argenti. Igitur quia partes x, y unam libram simul debent efficere, erit $x+y=1$, & quia valores x, y debent æquare c, erit æquatio alia $ax+by=c$. Jam vero si æquationem primam per b multiplices, & ex altera subtrahas, erit $ax-bx=c-b$; ergo $x=\frac{c-b}{a-b}$: si deinde e prima multiplicata per a secundam subducas, habes $ay-by=a-c$, unde $y=\frac{a-c}{a-b}$. Est igitur $x:y::c-b:a-c$; quapropter si libra in hac ratione dividatur, habebis auri partes atque argenti, quæ ad unam mixti quæsiti libram necessario requiruntur. Ex. gr. sit $a=21$, $b=11$, $c=15$, erit $c-b=4$, & $a-c=6$; divide unam libram in par-

in partes, quæ sint ut $4:6$, seu ut $2:3$; hæ partes sunt $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$: igitur $\frac{2}{5}$ libræ auri, cum $\frac{3}{5}$ libræ argenti libram metalli mixti efficient, cujus valor erit 15. Si plures quam duæ essent res permiscendæ, patet plures etiam requiri conditiones, ut problema determinetur.

27. Problema decimumseptimum. Duo dolia habemus, in quibus vinum est aqua mixtum: in uno vinum est ad aquam ut $a:b$; in alio ut $c:f$; quæritur quænam liquoris pars e primo dolio sit extrahenda, quænam e secundo, ut tertium impleamus dolium, in quo vinum ad aquam sit ut $m:n$. Aquam & vinum indicent initiales litteræ A, V; ergo in primo dolio habemus $aV+bA$, & in secundo $cV+fA$. Liquor e primo extrahendus sit $=x$, qui debet extrahi ex altero $=y$; erit igitur $axV+bxA+cyV+fyA=mV+nA$; at esse debet $axV+cyV=mV$, & $lxA+fyA=nA$; ergo $ax+cy=m$, & $bx+fy=n$, unde $x=\frac{fm-cn}{af-cb}$, & $y=\frac{an-mb}{af-cb}$. Si ponas $a=7$, $b=3$; $c=4$, $f=6$, $m=n=6$ invenies $x=\frac{2}{5}$, $y=\frac{4}{5}$.

28. Methodus non hisce tantum finibus continetur. Sint enim plura simul permixta v. gr. A, B, C, in ea ratione, quam sequentes indicant formulæ $aA+bB+cC$, $eA+fB+gC$, $bA+iB+kC$: ex prima combinatione accipiatur x, y ex secunda, ex tertia z, & in nova mixtione debeant esse A, B, C in proportione m, n, p. Igitur erit

$$\begin{array}{l} axA+bxB+cxC \\ eyA+fyB+gyC=mA+nB+pC. \\ bzA+izB+kzC \end{array}$$

Hinc tres enascentur æquationes, quæ problema solvent, scilicet $axA+eyA+bzA=mA$, $bxB+fyB+izB=nB$, $cxC+gyC+kzC=pC$, unde valores x, y, z erui poterunt. Facile est dignoscere hujusmodi methodum esse universalem, & ad quemcunque miscendarum rerum numerum protendi posse.

29. Problema decimumoctavum. Vas habes plenum vino $=a$, extrahis mensuram vini $=b$, & aquæ tantundem infundis: extrahis deinde liquoris sic mixti aliam mensuram $=b$, & iterum vas aqua infusa imples; idem tertio facis &c. Scire velles quantum vini in vase supersit post datum quemcunque harum extractionum numerum. Manifestum est post primam extractionem vinum in vase contentum esse $=a-b$; at in secunda quum vinum aqua permixtum fuerit, ut scias quantum extraxeris vini, fac $a:a-b::b:\frac{b}{a}.\overline{a-b}$; igitur vinum extractum secunda vice erit $\frac{b}{a}.\overline{a-b}$; at jam antea vinum erat $a-b$; ergo post secundam extractionem vinum, quod superest in vase, erit $a-b-\frac{b}{a}.\overline{a-b}=\frac{\overline{a-b}^2}{a}$. Ita invenies vinum extractum in tertia extractione esse $\frac{b}{a^2}.\overline{a-b}^2$; namque $a:\frac{\overline{a-b}^2}{a}::b:\frac{b}{a^2}.\overline{a-b}^2$; ergo post extractionem

Numerus extractionum	Vinum quo superest.
1	$a-b$
2	$\frac{\overline{a-b}^2}{a}$
3	$\frac{\overline{a-b}^3}{a^2}$
4	$\frac{\overline{a-b}^4}{a^3}$
⋮	⋮
n	$\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}}$

tertiam

tertiam superest vini $\frac{\overline{a-b}^2}{a} - \frac{b}{a^2} . \overline{a-b}^2 = \frac{\overline{a-b}^3}{a^2}$. Eadem methodo invenies, vinum post extractionem quartam esse $\frac{\overline{a-b}^4}{a^3}$. Potes igitur tabulam efformare, in qua videbis seriem geometrice decrescentem, & exponentem numeratoris $a-b$ æquare extractionum numerum, exponentem vero denominatoris a esse eundem extractionum numerum unitate imminutum; ergo inferre etiam potes vinum residuum in tuo vase post quemlibet numerum n extractionum esse $\frac{\overline{a-b}^n}{a^{n-1}}$.

30. Problema decimumnonum. Titus post certum annorum numerum numerare Cajo debet pecuniam $= a$; facta hypotesi, quod fructus pecuniæ annuus sit ejusdem pars m^{esima}, quæritur, si nunc se velit onere liberare, quid Cajo debeat dare? Vocemus $= x$ id, quod nunc debet Titus persolvere. Fructus hujus pecuniæ x post primum annum est $\frac{x}{m}$; ergo summa pecuniæ $x + \frac{x}{m}$. Si pecunia esset post primum annnm solvenda, esset $x + \frac{x}{m} = a$, idest $x = \frac{ma}{m+1}$. At si tempus nondum advenerit; quoniam pecunia est post finem primi anni $x + \frac{x}{m}$, erit fructus secundi anni $\frac{x}{m} + \frac{x}{m^2}$; ergo aucta est pecunia usque ad summam $x + \frac{2x}{m} + \frac{x}{m^2} = x . \frac{\overline{m+1}^2}{m^2}$, quæ, si pecunia post secundum annum sit Cajo enumeranda, erit $= a$; igitur in hac hypotesi $x = \frac{m^2 a}{\overline{m+1}^2}$. Sed neque hic est annus, quo Titus solvere teneatur; igitur quum fructus

Si pecunia fit danda post annos	debet nunc
1	$\frac{ma}{m+1}$
2	$\frac{m^2 a}{\overline{m+1}^2}$
3	$\frac{m^3 a}{\overline{m+1}^3}$
⋮	⋮
n	$\frac{m^n a}{\overline{m+1}^n}$

pecuniæ $x . \frac{\overline{m+1}^2}{m^2}$ sit $x . \frac{\overline{m+1}^2}{m^3}$, pecuniæ summa post annum tertium erit $x . \frac{\overline{m+1}^2}{m^2} + x . \frac{\overline{m+1}^2}{m^3} = x . \frac{\overline{m+1}^3}{m^3} = a$ si tres fuerint anni constituti, & tunc erit $x = \frac{m^3 a}{\overline{m+1}^3}$. Hac methodo si prosequamur, seriem habebimus geometricam

triam, in qua duo exponentes numerum æquant annorum; recte igitur inferre possumus debere nunc Titum pecuniam $= \frac{m^n a}{\overline{m+1}^n}$ posito n pro quolibet annorum numero, quo elapso pecuniam $= a$ solvere debuisset.

CAPUT SEPTIMUM

De resolutione problematum semideterminatorum.

1. PRoblemata semideterminata proprie ad indeterminatorum classem pertinent, quum in ipsis impossibile sit æquationes tot instituere, quot sunt incognitæ: at aliquibus additis conditionibus, ita solutionum numerus imminuitur, ut sæpissime determinatus fiat, aliquando etiam nullus. Etsi vero instituti nostri ratio non postulet, ut de hoc problematum genere loquamur, ne tamen rei analyticæ studiosis novi accidant prorsus, hoc capite aliquod eorum specimen tradere duximus opportunum. Duas itaque hic additarum conditionum species considerabimus: prima erit, ut numeri integri sint, & positivi; altera, ut sint quadrati, vel cubi &c.

2. Quoad primam: æquationibus omnibus ad unam redactis, in qua duas esse incognitas supponimus, limites primo determinare oportet, quibus transgressis, aut una quantitas, aut plures fierent negativæ; ita enim tentaminum numerus valde minuetur. Deinde uni ex incognitis diversi successive assignandi valores, qui tamen hujusmodi sint, ut altera non sit fractio. Ita solutiones omnes possibiles obtinebimus. Methodus tribus exemplis, quæ sequuntur, declarabitur.

3. Problema primum. Quæruntur duo numeri x, y tales, ut sint $3x - 5y = 9$; ergo $y = \frac{3x - 9}{5}$. Ut numerum negativum fugiamus, debebit esse $3x > 9$, idest $x > 3$; atque, ut vitentur fractiones, oportebit, ut $3x - 9$ perfecte dividi possit per 5. Jam vero ii numeri tantum sunt divisibiles per 5, qui desinunt vel in zero, vel in 5; ut autem $3x - 9$ desinat in zero, necesse est, $3x$ desinere in 9; utque $3x - 9$ desinat in 5, debet $3x$ terminare in 4; ergo nulli alii numeri possunt valorem x exhibere, nisi, qui per 3 multiplicati, vel in 9 desinunt, vel in 4. Omnium igitur minimus est 8, sequitur 13, deinde 18, quibus respondet $y = 3, 6, 9$ &c. ut in tabula vides. Notandum cum valores x, tum valores y duas crescentes arithmeticas series efformare; primæ differentia est 5, alterius 3; ex quo discimus, tabulam in infinitum nullo negotio produci posse, & numeros omnes, sibi in ipsis respondentes, problemati satisfacere, ac illius infinitas esse solutiones.

$x = 8$	$y = 3$
13	6
18	9
23	12

4. Problema secundum. Quæruntur duo numeri x, y, ita ut sit $3x + 2y = 20$, vel $x = \frac{20 - 2y}{3}$. Statim apparet, debere esse $y < 10$, secus x esset negativa. Eodem pacto probabimus esse debere $x < 7$. Quoniam vero

vero $\frac{20}{3}$ non est pura fractio, sic æquationem exponemus $x = 6 + \frac{2-2y}{3}$ $= 6 + 2 \cdot \frac{1-y}{3}$. Ut fractio det numerum integrum, stante $y < 10$, facile est cognoscere, y alium valorem habere non posse, nisi 7, 4, 1, quibus respondent valores $x = 2, 4, 6$; neque præter has alia invenitur solutio. Animadvertendum primo est, non referre, quod numerus integer ex fractione ortus sit negativus, dummodo y præscriptos limites non excedat; secundo valores y inventos esse in arithmetica serie decrescente, cujus differentia 3, & valores x in crescente, cujus differentia est 2.

$y = 7$	$x = 2$
4	4
1	6

5. Problema tertium. Invenire duos numeros x, y tales, ut, subtracto 5 de $3x$, reliquum sit $7y$. Igitur erit $3x - 5 = 7y$, aut $y = \frac{3x-5}{7}$. Patet esse debere $3x > 5$, adeoque $x > 1$. Æquationem ita disponamus $y = x - \frac{4x-5}{7}$. Ut fractio $\frac{4x+5}{7}$ det numerum integrum, vides minimum valorem, qui possit assignari x, esse 4, quo in casu est fractio $\frac{16+5}{7} = \frac{21}{7} = 3$; ergo $y = 1$. Inveniemus deinde valorem $x = 11$, cui respondet $y = 4$. Tandem duæ series arithmeticæ crescentes oriuntur, quarum prima habet differentiam 7, alia 3, in quibus numeri quicumque analogi problema solvunt; adeoque infinitæ sunt solutiones. Fortasse melius erat æquationem ita disponere $x = \frac{7y+5}{3}$, aut $x = 2y + 1 + \frac{y+2}{3}$; multo enim facilius erat, dignoscere y æqualem numeris 1, 4, 7 dare fractionis numeratorem per 3 perfecte divisibilem.

$x = 4$	$y = 1$
11	4
18	7
25	10
32	13

6. Etsi omnia, quæ attulimus exempla, viam ostendunt, quam in hujusmodi problematum solutione sequamur; tamen fateri oportet, esse hoc iter densissimis tenebris circumfusum, & incerto nos ferri gressu, quum incognitæ valorem quærimus, quo posito sit fractio numerus integer. Exercitatio tamen, & industria quantum ad depellendas tenebras juvent, satis compertum. Ut melius res cedat, opportunum erit ad sequentia animum advertere. Si sit $x = a + by$ ita, ut nulla habeatur fractio, perspicuum est, quemcumque valorem positivum y, initio ab unitate facto, daturum respondentem valorem x; quapropter in infinitum abit numerus solutionum. In æquatione $x = a - by$ quicunque valor y, qui minor sit quam $\frac{a}{b}$, dabit valorem x positivum, & integrum; & quemadmodum finitus est numerus numerorum integrorum, qui inter zero, & $\frac{a}{b}$ continentur, ita finitus erit numerus solutionum. Tandem in formula $x = by - a$, quicumque sit y, dummodo major quam $\frac{a}{b}$, dabit problematis solutionem, adeoque in hoc casu solutiones obtinebimus infinitas. Quapropter si absint fractiones, cum iis abest difficultas.

7. Sit modo $x = \frac{a+by}{c}$, & primo supponamus $\frac{a}{c}$ numerum integrum, quem vocemus $= m$, unde sit $x = m + \frac{by}{c}$. Fractio $\frac{b}{c}$ ad minimos ter-

terminos reducatur, quod semper fieri potest. Nunc eam ita esse supponentes, videmus, si fiat $y = c, 2c, 3c$, aut cuicumque multiplo c, fractionem integrum numerum exhibere, & problema solvi. Si vero sit $x = \frac{a - by}{c}$, eodem pacto disposita æquatione $x = m - \frac{by}{c}$, patet, eos tantum numeros multiplos c prodesse, qui dent $y < \frac{a}{b}$, adeoque finitum esse numerum solutionum, aut nullum, si nullus sit ejusmodi numerus, quo in casu problema est impossibile. Tandem in æquatione $x = -m + \frac{by}{c}$ ii numeri multipli c juvant, per quos est $y > \frac{a}{b}$.

8. Quum hæ non verificantur simpliciores hypotheses, res tota est in talibus valoribus y inveniendis, qui dent fractionem $\frac{a+by}{c}$ numerum integrum, sive a, & b sint numeri ambo positivi, sive alter positivus, alter negativus. Certam hic methodum ad eos inveniendos tradere oportet, quæ, ut sit clarior, opportunum est operationem totam exemplo aliquo ante oculos ponere; quoniam ita facilius deinde erit, universaliter illius rationem ostendere.

9. Exemplum esto $\frac{76+59y}{33}$, & valores y quærantur, qui hanc fractionem reddant numerum integrum. Quoniam uterque terminus dat impuram fractionem, eam, divisione facta per 33, purificemus, & scribamus $2+y+\frac{10+26y}{33}$. Patet obtinuisse nos intentum, quotiescumque sit numerus integer fractio $\frac{10+26y}{33}$. Hanc igitur inspiciamus, scrutemurque, an termini factorem aliquem habeant communem. Invenimus habere quidem, & hunc esse 2, quem præmittimus fractioni ita $2.\frac{5+13y}{33}$. Hic etiam facile est agnoscere, quod si numerus integer sit fractio $\frac{5+13y}{33}$, erit pariter si multiplicetur per 2; adeoque eo redactam rem esse, ut inveniamus valorem y ita, ut $\frac{5+13y}{33}$ sit numerus integer.

10. Puras fractiones, in quibus termini numeratoris inter se sunt numeri primi, vocamus fractiones reductas. Supponamus p numerum quemcumque integrum. Esse igitur debebit $\frac{5+13y}{33} = p$; ergo $y = \frac{33p-5}{13}$. Reducamus fractionem, & fit $y = 2p + \frac{7p-5}{13}$. Faciamus iterum $\frac{7p-5}{13} = q$; ergo $p = \frac{13q+5}{7}$, & fractione reducta $p = q + \frac{6q+5}{7}$. Ponimus tertio, ut supra, $\frac{6q+5}{7} = r$; unde $q = \frac{7r-5}{6} = r + \frac{r-5}{6}$. Sit denique $\frac{r-5}{6} = s$; ergo $r = 6s+5$, ex qua scimus r fore numerum integrum, quicumque sit valor s. Hic considerantes s tanquam numerum integrum, retro revertimur, & invenimus

mus $q=7t+5$, $p=13t+10$, $y=33t+25$; qui valor, positus in prima nostra fractione $\frac{76+59y}{33}$, dabit $47+59t$, in qua t quilibet integer numerus potest esse.

11. Si quis paullo attentius operationis seriem consideret, facile inferet, quando nam in fractione $\frac{a+by}{c}$ valores y haberi possint, per quos illa numerus integer evadat, & quando obtineri nullo modo possint. Videlicet tunc ad optatum finem perveniri posse intelliget, quum in fractione reducta numeri b, c sunt inter se primi. Etenim in nova fractione, quæ oritur, dividitur c per b, & residuum dat fractionem aliam reductam; iterum in nova fractione c dividitur per primum residuum, hoc deinde per residuum secundum; in qua operatione, quum b, c sint numeri primi, necesse omnino est, ut ad residuum perveniamus unitati æquale. Quod ubi obtinemus, voti compotes efficimur; nam si fractio ultima novæ incognitæ æqualis fiat, huic quilibet valor integer poterit assignari.

12. At, si b, c non essent inter se primi, tunc res impossibilis prorsus fit; quum impossibile sit obtinere residuum æquale unitati; quod sic potest nullo negotio demonstrari. Sit reducta fractio $\frac{a+by}{c}$, in qua a, b sunt numeri inter se primi. Quoniam supponimus b, c primos inter se non esse, habebunt communem aliquem factorem, qui vocetur n, & sit $b=nf$, $c=ng$. Patet a habere non posse factorem n. Fiat hoc posito $\frac{a+nfy}{ng}=p$; ergo $\frac{a}{n}+fy=gp$; ergo si gp esset numerus integer, numerus integer esset etiam $\frac{a}{n}+fy$: atqui hoc est impossibile; quia quum sit fy integer, etiam $\frac{a}{n}$ integrum numerum esse oporteret, quod est contra hypothesim.

13. Et revera si in reducta fractione esset $\frac{5+11y}{33}$, in qua numeri 11, 33 non sunt primi, nostra operatio esset $\frac{5+11y}{33}=p$; ergo $\frac{33p-5}{11}=y=3p-\frac{5}{11}$, quæ, quum p numerus integer esse debeat, numerum integrum æquare nunquam poterit. Hac generali methodo docemur, utrum $\frac{a+by}{c}$ numerus integer esse possit nec ne, & quotiescunque id fieri potest, quinam sint valores y, qui id præstent. Non desunt tamen artificia exercitatione addiscenda, quæ valde laborem imminuant, & a longioribus sæpe calculis liberent. Addemus hic tria alia problemata, ut theoria magis etiam, si fieri potest, exemplis illustretur.

14. Problema quartum. Coturnices nummis duobus veneunt, Turdi 1, Passeres $\frac{1}{2}$, non habes nisi nummos 70: attamen vis emere 100 harum avium capita, quæritur quot ex singulis speciebus emere debeas? Numerus Coturnicum sit x, Turdorum y, Passerum z. Habentur statim hæ duæ æquationes

nes $x+y+z=100$, $2x+y+\frac{1}{2}z=70$. E secunda multiplicata per 2 primam detrahe; oritur $3x+y=40$, ex qua potes inferre, esse debere $x<\frac{40}{3}$, seu $x<14$, & $y<40$. Nunc formulam $y=40-3x$ considera. Si facis $x=13$, erit $y=1$, $z=86$; si $x=12$, erit $y=4$, & $z=84$, atque ita deinceps, ut in tabula potes animadvertere. Tredecim igitur solutiones admittit problema, non plures, neque pauciores; nam extra præscriptos limites statim occurrent negativi. Nota valores trium incognitarum tres efficere series arithmeticas: prima decrescit, & habet differentiam 1; altera crescit, ejusque differentia est 3; tertia decrescit cum differentia 2.

$x=13$,	$y=1$,	$z=86$
12	4	84
11	7	82
10	10	80
9	13	78
8	16	76
7	19	74
6	22	72
5	25	70
4	28	68
3	31	66
2	34	64
1	37	62

15. Problema quintum. Triginta partim viri, partim mulieres, partim pueri simul manducaverunt; sumptus integer 75, sed viri solverunt 5, mulieres 3, pueri vero 2. Quæritur virorum numerus, mulierum, & puerorum? Vocato virorum numero x, mulierum y, puerorum z, unusquisque intelliget duas ex propositis conditionibus æquationes descendere; nempe $5x+3y+2z=75$, $x+y+z=30$. Secunda multiplicata per 2, & ita subtracta e prima dat $3x+y=15$; ergo $x<5$, $y<15$. Multiplicemus jam secundam æquationem per 3, & ex producto primam subtrahamus; erit $-2x+z=15$: ergo $z=15+2x$; sed $2x<10$: ergo $z<25$. Quia vero limites x sunt omnium arctissimi, ideo his utimur æquationibus $y=15-3x$, $z=15+2x$. Si ponimus $x=4$, invenimus $y=3$, $z=23$. Quatuor solutiones, quas admittit problema ostendit tabella, in qua etiam valorum series, & serierum differentias facile est deprehendere.

$x=4$,	$y=3$,	$z=23$
3	6	21
2	9	19
1	12	17

16. Problema sextum. Invenire quot modis possit quis solvere 500 Julios, aureis partim adhibitis (vulgo Zecchini) quorum valor 21 Juliorum est, partim (mezze doppie) quorum valor 17. Primæ speciei numerus esto x, alterius y. Orietur igitur æquatio $21x+17y=500$; unde habemus debere esse $x<\frac{500}{21}$, idest $x<24$. Ex æquatione est $y=\frac{500-21x}{17}=29-x+\frac{7-4x}{17}$.

Faciamus juxta traditam methodum $-\frac{7+4x}{17}=p$; ergo $x=\frac{17p+7}{4}=4p+1+\frac{p+3}{4}$. Faciamus iterum $\frac{p+3}{4}=q$; ergo $p=4q-3$; in qua constat fore semper p numerum integrum, quicumque sit integer numerus q. Revertentes itaque inveniemus valorem $x=\frac{17\cdot 4q-17\cdot 3+7}{4}=17q-11$, & valorem $y=\frac{500-21\cdot 17q+21\cdot 11}{17}=43-21q$; quare habebimus x, y numeris integris expressos. At opus etiam est vitare numeros negativos. Si $q=1$, erit $x=6$, $y=22$; si $q=2$, tunc invenitur $x=23$, $y=1$; ergo, exclusis

 nega-

negativis, hæ solæ inveniuntur solutiones. At hoc problematum genus negativa omnino non excludit, quæ indicant non me creditori, sed illum mihi dare, quidquid illis exprimitur, debere. Igitur facto $q = 3$ erit $x = 40$, $y = -20$; quod ostendit illum mihi debere 20 aureos minoris pretii, cui ego 40 aureos pretii majoris dederim. Si facimus $q = 0$, est $x = -11$, $y = 43$, unde discimus restituendos nobis aureos majoris pretii 11 post solutos 43 pretii minoris. Consule tabellam, quæ hinc inde in infinitum produci potest. Atque hæc satis superque sunt quoad ea problemata semideterminata, quæ negativos, & fractos numeros excludunt.

-45	85
-28	64
-11	43
$x = 6$,	$y = 22$
23	1
40	-20
57	-41
74	-62

17. Ad eam problematum speciem veniamus, quæ secundam conditionem postulant num. 1., nempe, ut numeri sint quadrati, cubi &c., in quo celebre Diophanti opus versatur. Plures, atque plurimum inter se diversæ sunt methodi, quibus in horum problematum solutione auctores usi sunt; ita ut, si de singulis vellemus hic agere, nimis longa res esset, & quæ una sibi volumen integrum postularet. Labor esset præterea in re positus curiosa magis, quam utili, & ab instituto nostro aliena. Non enim hæc funditus perscrutari volumus, sed tantum analyseos hujus specimen exhibere; cujus rei gratia problemata nonnulla hic solvimus, quæ methodos, & artificia patefaciant, quibus ejusdem generis alia pariter solvi possint. Hæc autem numeros fractos non excludunt, sed irrationales, quapropter in eo ars omnis est sita, ut ita incognitas quantitates nominemus, ut radicum extractiones fugiantur, & arceantur quantitates surdæ, a quibus problematis natura abhorret.

18. Problema primum. Duos invenire numeros, quorum quadrata in summam collecta dent numerum pariter quadratum. In solutione utimur hac simplicissima methodo. Si quadrato $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$ addatur quadratum aliud $4m^2n^2$, summa est $m^4 + 2m^2n^2 + n^4$, qui numerus est quadratus; ergo duo quæsiti numeri sunt $m^2 - n^2$, $2mn$, quorum quadrata simul sumpta æquant quadratum numeri $m^2 + n^2$.

19. Eadem arte solvemus problema. Invenire duos numeros ita, ut, quadrato unius a quadrato alterius subducto, differentia sit numerus quadratus. Etenim numeri erunt $m^2 + n^2$, $m^2 - n^2$, quorum quadratorum differentia est $4m^2n^2$ numerus quadratus, cujus radix $2mn$; aut numeri duo erunt $m^2 + n^2$, $2mn$, qui ad quadratum elevati interse distant per quadratum numerum $m^4 - 2m^2n^2 + n^4$, cujus est radix $m^2 - n^2$.

20. Si unus e tribus numeris detur $= a$, v. g. ille, cujus quadratum æquale est quadratis reliquorum, multiplicabimus tres numeros inventos per $\frac{a}{m^2 + n^2}$, unde orientur numeri $\frac{m^2 - n^2 \cdot a}{m^2 + n^2}$, $\frac{2mna}{m^2 + n^2}$, a. Primorum quadrata quadratum æquant tertii dati. Alia etiam via inveniri possunt duo ii numeri, quorum quadrata simul æquent quadratum dati $= a$. Sit unus e numeris quæ-

quæsitis nx, alter $mx-a$; igitur ex conditionibus erit æquatio $n^2x^2+m^2x^2-2max+aa=a^2$, seu $x=\frac{2ma}{m^2+n^2}$; ergo quæsiti numeri sunt $\frac{2mna}{m^2+n^2}$, $\frac{2m^2a}{m^2+n^2}-a=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\cdot a$, uti supra.

21. Problema secundum. Invenire duos numeros ita, ut eorum quadrata simul sumpta duorum aliorum quadratorum summam æquent. Accipimus duos hosce numeros $m^2a+2mnb-n^2a$, $-m^2b+2mna+n^2b$ utrumque ad quadratum elevamus, alias sub aliis scribentes potestates analogas m, n, & invenimus

$$m^4a^2+4m^3nab-2m^2n^2a^2-4mn^3ab+n^4a^2$$
$$+4m^2n^2b^2$$
$$m^4b^2-4m^3nab-2m^2n^2b^2+4mn^3ab+n^4b^2$$
$$+4m^2n^2a^2$$

Accipimus quadratorum summam, in qua termini omnes, ubi reperitur ab, eliduntur, quo consilio numeri electi fuerunt. Summa est $m^4a^2+2m^2n^2a^2+n^4a^2$
$m^4b^2+2m^2n^2b^2+n^4b^2$; qui sunt duo numeri quadrati; adeoque numeri assumpti dant summam quadratorum æqualem quadratis duobus numerorum $\overline{m^2+n^2}\cdot a$, $\overline{m^2+n^2}\cdot b$. Q. E. F.

22. Nonnulla animadvertere oportet, ut harum formularum rectus sit usus. Si fieret $m=n$, numeri inventi iidem essent, atque assumpti; adeoque nugatoria solutio. Pariter si facimus $m:n::a:b$, primus ex assumptis æquabit primum inventorum, & secundus secundum.

23. Si quis optaret numeros duos esse datos, e. g. a, b, tunc quatuor numeri dividendi erunt per m^2+n^2, quo posito fient $\frac{m^2a+2mnb-n^2a}{m^2+n^2}$, $\frac{-m^2b+2mna+n^2b}{m^2+n^2}$, a, b, & extremorum quadrata simul quadrata æquabunt priorum. Solutionem eamdem habemus etiam ita. Fingamus quæsitos numeros, quorum quadrata esse debent $=a^2+b^2$, esse $mx-a$, $nx-b$. Ergo ex ea conditione fiet $m^2x^2-2max+a^2+n^2x^2-2nbx+b^2=a^2+b^2$, seu $x=\frac{2ma+2nb}{m^2+n^2}$; hoc igitur in numeris valore substituto erunt $\frac{2m^2a+2mnb}{m^2+n^2}-a$, $\frac{2mna+2n^2b}{m^2+n^2}-b$, seu $\frac{m^2a+2mnb-n^2a}{m^2+n^2}$, $\frac{-m^2b+2mna+n^2b}{m^2+n^2}$, quemadmodum antea. Neque est prætermittendum

nume-

numeros accipi ad libitum posse, vel positivos, vel negativos, quum quadrata semper positiva sint.

24. Quamvis in formulis numeris applicandis tempus nolimus terere, quum id facillimum unicuique sit, tamen hic nobis liceat duos numeros quærere ab unitate diversos, quorum quadrata simul efficiant 2. Faciamus igitur $a = b = 1$, quo in casu erunt formulæ nostræ $\frac{m^2 + 2mn - n^2}{m^2 + n^2}$, $\frac{-m^2 + 2mn + n^2}{m^2 + n^2}$.

Nunc si ponimus		erunt numeri	
$n = 1$, $m = 2$	— —	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$
$m = 3$	— —	$\frac{14}{10}$	$\frac{2}{10}$, vel $\frac{7}{5}$, $\frac{1}{5}$, ut primi
$m = 4$	— —	$\frac{23}{17}$	$\frac{7}{17}$
$m = 5$	— —	$\frac{34}{26}$	$\frac{14}{26}$, idest $\frac{17}{13}$, $\frac{7}{13}$

atque ita deinceps.

25. Problema tertium. Invenire duos numeros ita, ut data sit differentia inter eorum quadrata. Duos numeros esse supponamus $mx + n$, $mx - n$, quorum sunt quadrata $m^2x^2 + 2mnx + n^2$, $m^2x^2 - 2mnx + n^2$, & horum differentia $4mnx = a$ ex problematis conditione; ergo $x = \frac{a}{4mn}$; adeoque numeri nostri fient $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$, qui, uti etiam numero superiore monuimus, nihil interest, utrum positivi sint, an negativi.

26. Videamus etiam hic, quomodo formulis numeri respondeant, & quæramus duo quadrata, inter quæ differentia sit $= 2$. Igitur $a = 2$, adeoque numeri ad quadratum erigendi $\frac{1}{2n} + n$, $\frac{1}{2n} - n$.

Si fiat ergo		numeri sunt	
$n = 1$	— —	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$n = 2$	— —	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$
$n = 3$	— —	$\frac{19}{6}$	$\frac{17}{6}$
$n = 4$	— —	$\frac{33}{8}$	$\frac{31}{8}$;

potest facile tabula in infinitum produci.

27. Invenire primo numerum, qui additus quadrato suo aliud quadratum exhibeat: secundo numerum pariter invenire, quem inter & quadratum ipsius differentia quadratum sit. Esto numerus x, ejus quadratum x^2; ergo $x^2 + x$ quadratum erit, quod vocetur $= p^2x^2$; ergo $x^2 + x = p^2x^2$, vel $x = \frac{1}{p^2 - 1}$. Simili ra-

ratione ſi agamus de differentia, erit $x^2 - x =$ quadrato, quod ſit $q^2 x^2$; ergo $x = \frac{1}{1-q^2}$. Sed quia ſolutio hujuſmodi ſupponit $x > 1$, cum ſupponatur quadratum $x^2 > x$, ſi quando eſſet $x < 1$, tunc fiat $x - x^2 = q^2 x^2$; unde $x = \frac{1}{q^2+1}$, *Q. E. F.*

28. Si quæratur numerus, qui, cum additus, tum ſubductus de ſuo quadrato, ſemper det numerum quadratum, neceſſe erit, ut $\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{1-q^2}$; ergo $1 - q^2 = p^2 - 1$, & $p^2 + q^2 = 2$; ergo p, q numeri eſſe debent, quorum quadrata ſimul ſumpta $= 2$, quos jam in ſecundo problemate invenimus; ergo illis ſubſtitutis $x = \frac{(m^2+2mn-n^2)^2}{(m^2+n^2)^2} - 1 = \frac{(m^2+n^2)^2}{4mn\cdot(m^2-n^2)}$, qui valor ex alia etiam formula habetur, ſi valor alter q ejus loco ſubſtituatur.

29. At ſi velimus $x < 1$, tunc ſit oportet $\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{q^2+1}$, aut $q^2 + 1 = p^2 - 1$; ergo $2 = p^2 - q^2$. Hinc diſcimus quadratorum p, q debere eſſe differentiam $= 2$; igitur, ſi loco p utamur formula $\frac{1}{2n} + n$ problemate præcedenti inventa, reperiemus $x = \frac{1}{\left(\frac{1}{2n}+n\right)^2 - 1} = \frac{4n^2}{1+4n^4}$.

30. Problema quintum. Numerum invenire, quo in duas partes diviſo, quadratum unius partis in a ductæ, & addita parte alia ducta in b, quadratum efficiat. Numerus ſit x, ipſius partes y, $x - y$; ergo $a^2 y^2 + bx - by$, aut $y^2 - \frac{by}{a^2} + \frac{bx}{a^4}$ quadratum eſſe debet; quod habebimus, ſi $\frac{bx}{a^2} = \frac{b^2}{4a^4}$, ſeu $x = \frac{b}{4a^2}$. *Q. E. I.*

31. Problema ſextum. Tres numeros invenire ita, ut ſumma omnium, & ſumma duorum ex ipſis, quicumque ſint, det numerum quadratum. Tres numeri ſint $4x$, $x^2 - 4x$, $2x + 1$; ſumma omnium, ut patet, eſt $x^2 + 2x + 1$, x^2 ſumma primi & ſecundi, $x^2 - 2x + 1$ ſumma ſecundi & tertii, qui omnes numeri quadrati ſunt; ergo, ut problemati perfecte ſatisfiat, nihil ſupereſt aliud, niſi talem x valorem determinare, ut etiam $6x + 1$, quæ eſt ſum-

ma

ma primi, & tertii sit numerus quadratus. Fiat $6x+1=m^2$; ergo $x=\frac{m^2-1}{6}$; ergo tres numeri nostri sunt $\frac{2m^2-2}{3}$, $\frac{m^4-26m^2+25}{36}$, $\frac{m^2+2}{3}$.

32. Problema septimum. Invenire tres numeros x, y, z tales, ut, si productis, quæ ex duobus eorum haberi possunt, addatur numerus constans a, quadratum semper prodeat. Tres igitur quantitates $xy+a$, $xz+a$, $yz+a$ quadrati numeri sint, oportet. Nunc primæ tantum rationem habeamus, eaque sit $=r^2$; seu $xy=r^2-a$. Hoc posito, faciamus $x=r+m$, $y=r-n$; ergo $xy=r^2+rm-rn-mn=r^2-a$; ergo $r=\frac{mn-a}{m-n}$. Itaque $x=\frac{mn-a}{m-n}+m$ $=\frac{m^2-a}{m-n}$, & $y=\frac{mn-a}{m-n}-n=\frac{n^2-a}{m-n}$. Si igitur x, y inventos valores habeant $xy+a$ procul dubio quadratum erit. Qui valores x, y si perpendantur, in oculos statim incurrit, eos per $m-n$ multiplicatos, quantitate a deinde addita, quadrata exhibere m^2, n^2; ergo si fiat $z=m-n$, patet $xz+a$, $yz+a$ fore duo quadrata. *Q. E. F.*

33. Problema octavum. Duos invenire numeros, quorum summa sit quadratum, cujus radix esse debeat quadratum primi numeri auctum numero altero. Sint numeri x, y; ergo $x+y=\overline{x^2+y}^2$. Utrumque æquationis membrum fiat $=n^2x^2$, unde fit $x+y=n^2x^2$, $\overline{x^2+y}^2=n^2x^2$. Ex hac æquatione ultima, extracta radice, $y=nx-x^2$; ergo $x+nx-x^2=n^2x^2$, seu x $=\frac{n+1}{n^2+1}$; adeoque $y=\frac{n+1}{n^2+1}.n-\frac{\overline{n+1}^2}{\overline{n^2+1}^2}=\frac{n^2+1.\overline{n+1}.n-(\overline{n+1}^2}{\overline{n^2+1}^2}$ $=\frac{n^4+n^3-n-1}{\overline{n^2+1}^2}=\frac{\overline{n^3-1}.\overline{n+1}}{\overline{n^2+1}^2}$.

34. Problema nonum. Duos numeros invenire ita, ut quadratum primi, altero addito, æquet quadratum secundi, addito primo. Duo quæsiti numeri sint x, y; ergo $x^2+y=y^2+x$, seu $y-x=y^2-x^2$, & divisione facta per $y-x$, est $1=y+x$, quæ æquatio nos monet, unitate in duas partes quascumque divisa, eas partes problemati satisfacere.

35. Problema decimum. Tres quæruntur numeri ita, ut uniuscujusque quadratum cum reliquorum summa quadratum efficiat. Quoniam x^2+2x+1 quadratum est, si tres numeros constituamus x, $2x$, 1, primus problemati respondebit. At, ut reliqui etiam respondeant, necesse est, ut $4x^2+x+1$, $3x+1$ sint duo numeri quadrati. Id ut obtineamus, lemmate utimur quam-

ma-

maxime simplici. Sint duo quadrata a^2, b^2, minor v. gr. b^2 subtrahatur de majori a^2, erit $a^2 - b^2$, vel $\overline{a+b} \cdot \overline{a-b}$. Duorum factorum semisumma æquat radicem quadrati majoris a^2; eorumdem semidifferentia æquat radicem quadrati minoris b^2. Hac ergo via incedentes subtrahamus e quadrato $4x^2 + x + 1$ quadratum $3x + 1$; habemus $4x^2 - 2x = \overline{4x - 2} \cdot x$. Factorum semisumma est $\frac{5x}{2} - 1$, semidifferentia $\frac{3x}{2} - 1$. Prima itaque radix esse debebit quadrati $4x^2 + x + 1$; ergo $\frac{25x^2}{4} - 5x + 1 = 4x^2 + x + 1$; alia debebit esse radix quadrati $3x + 1$, adeoque $\frac{9x^2}{4} - 3x + 1 = 3x + 1$. Videamus modo utrum hæc sibi constent. Ex prima æquatione est $\frac{9x^2}{4} = 6x$, seu $x = \frac{8}{3}$; ex altera pari modo $\frac{9x^2}{4} = 6x$, & $x = \frac{8}{3}$, ut antea; ergo numeri quæsiti sunt $\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, 1$.

36. Problema undecimum. Sempronius duas emit vini species; unius speciei pretium sunt 8 Julii in singulas mensuras, alterius speciei 5. Summa expensi est numerus quadratus, cui si addideris 60, alius exsurgit numerus quadratus, cujus radix est numerus mensurarum utriusque speciei. Quæritur quinam sit numerus mensurarum? Hic numerus sit x; ergo ex conditione problematis $x^2 - 60$ erit numerus Juliorum, quibus vinum omne emptum est. Problema postulat, hunc numerum esse quadratum; ut id præstemus, limites x circumscribere oportet. Si hac pecunia $x^2 - 60$ usus fuisset Sempronius in ea emenda vini specie, quæ valet 5, numerus mensurarum esset $\frac{x^2 - 60}{5}$, qui numerus certe major est, quam x; ergo $x^2 - 60 > 5x$. Eodem ratiocinio ostenditur etiam $x^2 - 60 < 8x$; ergo erunt $x^2 - 5x > 60$, $x^2 - 8x < 60$, atque additis quadratis dimidii coefficientis $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 76$. Supponamus nunc radicum gratia, quadratum primum majus esse quam $\frac{289}{4}$, secundum minus, quam 64, & habebimus $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{289}{4}$, $x^2 - 8x + 16 < 64$; extractisque radicibus $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$, aut $x > \frac{22}{2} = 11$, $x < 12$. Potuissent equidem minus angusti limites reperiri; sed hi ad problematis solutionem sufficiant.

37. Intra hos limites igitur retenta x, demus operam, ut $x^2 - 60$ quadratum sit. Scimus x unum esse debere e terminis radicis quadrati hujus; terminus alter sit y; unde habeamus $x^2 - 60 = \overline{x - y}^2$, aut $x^2 - 60 = x^2 - 2xy$ +

$+y^2$; ergo $x=\frac{y^2+60}{2y}$; at x major esse debet, quam 11, & minor quam 12; ergo is debet esse valor $\frac{y^2+60}{2y}$, ut intra 11, & 12 contineatur. Ex prima conditione quum sit $\overline{y-11}^2 > 121-60=61$, ponam $\overline{y-11}^2 > 64$; ergo $y-11>8$, & $y>19$; ex secunda quum sit $\overline{y-12}^2 < 144-60=84$, ponam $\overline{y-12}^2 < 81$; ergo $y-12<9$, & $y<21$. Quoniam y potest excurrere intra 19, 21, videamus, utrum supposito $y=20$ problema solvatur. Igitur esse debebit $x^2-60 = \overline{x-20}^2 = x^2-40x+400$, seu $x=\frac{460}{40}=11\frac{1}{2}$. Oportet itaque, ut numerus mensurarum sit $11\frac{1}{2}=\frac{23}{2}$, ejus quadratum $\frac{529}{4}$, ex quo dempto $60=\frac{240}{4}$, supererit $\frac{289}{4}$ numerus quadratus, cujus radix $\frac{17}{2}$; ergo numerus Juliorum antea ignotus, est $\frac{289}{4}=72\frac{1}{4}$.

38. Supereſt inveniendus numerus menſurarum ſpeciei utriuſque. Numerus earum, quarum pretium 5, ſit z, adeoque pretium $5z$; reliquarum numerus neceſſario erit $11\frac{1}{2}-z$, & reſpondens prætium $92-8z$, adeoque pretium omnium ſimul $92-3z$; at hoc æquare debet $72\frac{1}{4}$; ergo $92-3z=72\frac{1}{4}$, unde $3z=19\frac{3}{4}$, & $z=6\frac{7}{12}$ numerus menſurarum, quarum ſingulæ valent 5. Hic ſi ſubtrahatur de $11\frac{1}{2}$, reſiduum $4\frac{11}{12}$ erit numerus aliarum. *Q. E. I.* Hæc problemata ſolviſſe ſufficit, ut addiſcant ſtudioſi juvenes, quid in ſimilibus præſtandum ſit. Si quis autem pleniorem harum rerum tractationem deſideraret, præter Diophantum, eoſque, qui Diophanti opus illuſtrarunt, Xilandrum videlicet, Bacchetum, & Fermatium, conſulere etiam poterit Preſtetum, Ozanamium, & Saunderſonium initio libri ſecundi Algebræ elementorum.

CAPUT OCTAVUM.

De conſtructione Problematum Geometricorum primi, & ſecundi gradus.

1. UT algebraicæ operationes geometricorum problematum ſolutioni inſerviant, primo quidem geometricæ quantitates litteris ſunt exprimendæ eadem ratione, qua alibi uſi ſumus, nempe ut incognitæ poſtremis, cognitæ aliis litteris indicentur. Deinde ad æquationes veniendum ductas ex problematis conditionibus. Hæ autem æquationes aliquando ſponte veluti occurrunt, aliquando vero magna opus eſt arte ut inveniantur, & multa ſunt antea paranda, ex. gra. parallelæ ducendæ, perpendiculares erigendæ, efficiendi anguli, circuli deſcribendi, & hujuſmodi alia geometrica inſtituenda, quæ apte ſelecta viam

viam sternent, qua ad æquationes perveniamus. Monere tamen juvat, similia triangula, angulos constantes, & celebre Pythagoricum theorema plurimum in hac re valere. Cæterum, quum omnia a variis problematum circumstantiis pendeant, nullas a nobis assignari posse constantes regulas, certum est. Præstabimus tamen quæcumque possumus, curabimus scilicet, ut exemplis, & problematum solutionibus rem omnem quam maxime illustremus.

2. Æquationibus inventis, iisque per traditas methodos resolutis, dummodo gradum secundum non excedant, incognitarum valor per cognitas expressus determinatur. At hoc valore habito non omnis confecta res est, quum de problemate geometrico agitur. Oportet namque insuper, ut problema geometrice solutum dicatur, valorem illum in lineis, aut aliis geometricis quantitatibus exhibere. Quod quidem quum difficultate non careat, ideo ab Analyseos præceptoribus nonnullæ traduntur regulæ, quas constructionum, aut locorum geometricorum nomine appellant. Nos itaque hic methodum nostram sequentes constructiones docebimus, quæ problemata geometrica primi, & secundi gradus respiciunt.

3. Quod spectat ad æquationes primi gradus, quum in iis analyticus valor incognitæ subtractione vel additione, multiplicatione vel divisione terminorum inveniatur, geometricus pariter valor linearum additione vel subtractione obtinebitur, vel ad summum tertiæ, aut quartæ proportionalis inventione. Sit $x=a-b+c$, facta rectarum a, & c summa, ab eaque detracta b, quod superest erit x. Si fuerit $x=\frac{ab}{c}$, fiat ut recta c ad rectam a, ita recta b ad quartam, hoc est methodo ab Euclide tradita post rectas c, a, b quarta proportionalis inveniatur, ea erit x. Sit $x=\frac{c^2-b^2}{c-d}$, fiat $c-d : c-b :: c+b$ ad quartam, quæ erit x. Sit $x=\frac{ab}{c}+\frac{bd}{n}$. Si fiat $\frac{ab}{c}=f$, $\frac{bd}{n}=g$ patet fore $x=f+g$; quæ duæ rectæ f, g nihil aliud sunt, nisi duæ quartæ proportionales, prima post c, a, b, altera post n, b, d, easque in figura ex geometria invenire jam didicimus.

4. Sit $x=\frac{ab+cd}{m+n}$. Tota ars, ut ex superioribus exemplis conjici potest, in eo est sita, ut numeratorem in factores duos lineares resolvamus ad instituendam proportionem, in qua denominator sit primus terminus, secundus & tertius duo illi factores, quartus vero quantitas invenienda. Nunc autem quum $ab+cd$ resolvi ita nequeat, ad substitutionem confugimus, qua id obtineamus. Animadvertimus rem egregie procedere si loco unius termini, v. gr. ab alius æqualis adhibeatur, in quo una ex litteris sit secundi termini ex. gr. c, ut autem hunc terminum habeamus nihil aliud opus est, quam facere $c:a::b$ ad quartam proportionalem, quæ vocetur f; ergo $cf=ab$; ergo erit nostra $x=\frac{cf+cd}{m+n}$; adeoque facto $m+n : f+d :: c$ ad quartam, inventa erit incognita.

5. Sit $x=\frac{fdcn}{abm}$. Fractio illa idem est ac productum duarum quantitatum $\frac{fd}{a}$, $\frac{cn}{b}$, quod productum dividitur per m. Voca igitur duas illas quantitates, quæ sunt duæ quartæ proportionales, primam p, q alteram, & habebis

 $x=$

$x=\frac{pq}{m}$; ergo $m:p::q$ ad quartam ipsi x æqualem. Si habeas $x=\frac{a^2+b^2}{c}$, fac $a^2=bn$; ergo $x=\frac{bn+b^2}{c}$, & $c:b::n+b$ ad quartam x. Sit $x=\frac{abc-def}{gb+ki}$. Fac $ef=am$, $gb=an$, $ki=ap$, ut fit $x=\frac{abc-adm}{an+ap}$, five $x=\frac{bc-dm}{n+p}$. Fac iterum $dm=bq$, ut fit $x=\frac{bc-bq}{n+p}$. Ergo x erit quarta proportionalis post $n+p$, b, $c-q$. Quantitates m, n, p, q inventa quarta proportionali determinantur. Harum fubftitutionum ratio eft manifeftiffima. Hifce methodis procul dubio fiet femper in æquationibus primi gradus, ut lineæ reperiantur analyticis valoribus refpondentes.

6. Quoad æquationes autem fecundi gradus, quum eæ per radicum quadratarum extractionem folvantur, adeoque ipfe incognitæ valor quadraticas radices involvat; hinc neceffe eft docere quomodo hæ quantitates geometrice exprimantur. Sit $x=\sqrt{ab}$, eleva ad quadratum $x^2=ab$, ergo $a:x::x:b$. Eft igitur x, feu $\sqrt{ab}$ media proportionalis inter a, b, quæ invenienda eft, ut docet geometria. Hinc difce radicem producti ex duobus factoribus nihil effe aliud, quam mediam proportionalem inter factores eofdem.

7. Sit $x=\sqrt{a^2+b^2}$. Statue duas rectas (*Fig.* 1.) $AB=a$, $BC=b$, quæ efficiant angulum in B rectum, & duc AC. Per prop. 47. lib. 1. Euclid. erit $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$; ergo $\overline{AC}^2=a^2+b^2$, & $\sqrt{\overline{AC}^2}$, feu $AC=\sqrt{a^2+b^2}$; erit igitur $x=AC$, fcilicet æqualis hypothenufæ trianguli rectanguli, cujus duo latera funt a & b.

8. Sit $x=\sqrt{c^2-a^2}$. Defcribatur femicirculus (*Fig.* 2.) ACB, cujus diameter fit $AB=c$, & centro facto in B, intervallo $CB=a$ defcribatur arcus fecans femicirculum in C, deinde jungatur CA. Ex 31. lib. 3. Euclid. angulus ACB rectus eft; ergo per 47. lib. 1. ejufdem $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$, feu $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$; ergo $c^2-a^2=\overline{AC}^2$. Et $x=\sqrt{\overline{AC}^2}=AC$; adeoque nihil aliud eft $\sqrt{c^2-a^2}$, nifi latus trianguli rectanguli, cujus bafis $=c$, & aliud latus $=a$. Hæ funt tres generales formulæ, ad quas radices quæcumque quadraticæ per traditas paullo ante regulas faciliime reducuntur.

9. Sit $x=\sqrt{\frac{a^3}{b}+cd}$. Poteft hæc ad primam formulam reduci hoc pacto. Fac $\frac{a^2}{b}=f$, invenitur autem f, quum fit tertia proportionalis poft b, a. Facta fubftitutione habes $x=\sqrt{af+cd}$. Pone $cd=fg$; fit g nota, quia eft quarta proportionalis poft f, c, d; igitur $x=\sqrt{af+gf}=\sqrt{f\,\overline{a+g}}$. Erit itaque x media proportionalis inter f, & $a+g$. Animadvertendum eft etiam potuiffe

tuisse formulam construi statim ac post primam substitutionem obtinuimus $\sqrt{af+cd}$. Si enim inveniamus duas medias proportionales, unam inter a, f, alterum inter c, d, eisque in angulo recto constitutis basim jungamus, patet eam fore $\sqrt{af+cd}$.

10. Sit $x=\sqrt{a^2+bc}$. Facta $bc=n^2$, est $x=\sqrt{a^2+n^2}$, & sine ulla substitutione, si a, & media proportionalis inter b & c angulum rectum efficiant, erit necessario basis $\sqrt{a^2+bc}=x$. Sit $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2-n^2}$, fia $a^2+b^2=f^2$, $c^2+n^2=g^2$, erit $x=\sqrt{f^2-g^2}$, quæ tertiam generalem formulam spectat. Sit $x=\sqrt{a^2+\sqrt{b^4+c^4}}$. Faciamus $b^2=cf$, & erit $\sqrt{b^4+c^4}=\sqrt{c^2f^2+c^4}=c\sqrt{f^2+c^2}$; iterum si faciamus $\sqrt{f^2+c^2}=g$; habebimus $\sqrt{b^4+c^4}=cg$; ergo $x=\sqrt{a^2+cg}$, quam scimus construere.

11. Quæ hactenus dicta sunt, quamvis ad quamlibet primi & alterius gradus æquationem construendam sufficiant, nihilominus si quis iis apte uti nesciat, atque eas rectas seligere, eas rectarum positiones, eos angulos, qui magis ad rem faciunt, in constructiones longas, & nimis implexas incidet; quæ tamen, recte consideratis problematis circumstantiis, vitari facile potuissent, ut constabit in exemplis.

12. Hæ primi & secundi gradus æquationes alia quoque methodo construuntur, quam locorum geometricorum nomine appellant. Quoniam ea valet etiam in superiorum graduum æquationibus constituendis, ideo utile hic erit illius originem, atque usum in simplicioribus diligenter inspicere. Esto linea quæcumque (*Fig.* 3.) BCD vel recta, vel curva, & alia ad libitum ducatur linea MN recta, quæ hinc inde in infinitum produci intelligatur, quæ secet ne, aut non secet BD, nihil omnino refert, quamvis in figura secare supponitur. In recta MN determinetur quodlibet punctum A ad arbitrium, & ex A lineæ quotlibet AV, Au, etiam infinitæ numero accipiantur. Ex omnibus punctis U, u totidem rectæ UQ, uq ducantur ad lineam BD in angulo quolibet, sed omnibus communi, ut sint parallelæ inter se. Hæ rectæ UQ, uq dicuntur *ordinatæ* lineæ BD; lineæ AU, Au in partem utramque a determinato puncto A proficiscentes, vocantur *abscissæ*, quarum cuilibet sua respondet ordinata; punctum A dicitur abscissarum initium; abscissæ & respondentes ordinatæ dicuntur inter se *coordinatæ*, quæ, ut facile intelligi potest, erunt indeterminatæ, sed una determinata, determinata erit etiam alia. Hac figuræ constructione, & definitionibus præmissis, quælibet indeterminata abscissa vocetur x, & respondens ordinata y, si ex iis, quæ propria sunt omnium coordinatarum lineæ BD, obtineatur æquatio expressa per solas incognitas x, y & alias cognitas, ea æquatio dicitur exprimere relationem coordinatarum lineæ BD, & ipsius lineæ BD æquatio vocatur; at animadvertendum est, quod si in æquatione x, y unam tantum habeant potestatem, nec sint invicem multiplicatæ, sicuti æquatio est primi gradus, ita dicitur in eo casu linea BD esse primi gradus, & in genere linea BD semper ejus gradus vocatur, cujus est æquatio ipsius coordinatarum relationem exprimens.

13. Sicuti vero linea quælibet suam habet respondentem æquationem, ita æquationi cuilibet sua respondet linea geometrica. Id ut clare intelligas, sit æ-

qua-

quatio $y=\frac{ax}{b}$, quæ cum primi sit gradus; lineam quoque primi gradus designabit. In linea recta quacumque MN indefinita, determina punctum quodlibet C, & cape rectas quot lubet CU determinatas; jam si rectas hasce loco x successive in æquatione substituas, necesse est prodeant successive totidem determinati valores y totidem abscissis CU respondentes, qui in nostro hoc casu erunt quartæ proportionales post b, a, & assumptam quamcumque CU. Sint hæ quartæ proportionales lineæ UQ; illas applica lineæ MN unamquamque ad punctum illud U, ubi sua definit abscissa, sed idem sit omnium angulus CUQ, hoc est, sint parallelæ. Jam vero si per puncta omnia Q ducas lineam, ea erit linea æquationis $y=\frac{ax}{b}$; & revera manifestum est lineam BD relationem exprimere omnium coordinatarum CU, UQ, eamque esse lineam rectam, quæ necessario secabit MN in puncto C initio abscissarum; est enim triangulorum omnium rectilineorum proprium, ut quæcumque CU sint ad suas UQ inter se parallelas in constanti ratione, ut hic contingit, ubi coordinatæ sunt inter se in ratione $b:a$.

14. Diligenter præterea animadvertendum est, quod sicuti ex C abscissas CU sumpsimus tendentes in partem N, nihil prohibet quominus alias abscissas Cu sumamus ex C tendentes in partem M; at cum hæ in partem primis contrariam ferantur, hinc si illæ fuerint positivæ, hæ negativæ erunt cap. 1. num. 4. Pariter cum lineæ MN, BD, uti diximus, in C se mutuo secent, necessario ordinatæ uq respondentes singulis Cu, tendent in partem contrariam illi, in quam ferrentur ordinatæ UQ; unde si hæ sint positivæ, illæ negativæ sint oportet. Æquatio tamen nostra coordinatas has etiam amplecti constat; nam scimus, eandem esse rationem inter coordinatas negativas, quæ inter positivas.

15. Hoc generali tradito hujus methodi specimine, facile omnino est dignoscere, æquationes quaslibet primi gradus, in quibus duæ incognitæ sive indeterminatæ reperiantur, ad rectam lineam pertinere. Hujusmodi æquationes omnes hac generali formula continentur $y=\frac{mA+mx}{n}$, in qua mA summam repræsentat terminorum omnium, qui cogniti sunt, eaque positiva esse potest, vel negativa; m est coefficiens quilibet positivus, vel negativus abscissam x multiplicans, n vero coefficiens quicumque quantitatis y, seu primi membri æquationis, quod in altero in divisorem transit, ut y sola ex una parte remaneat. Hanc autem æquationem ad lineam rectam spectare, sic facile potest ostendi. In linea recta ut antea indefinita MN determinato ad libitum puncto A, quod sit initium abscissarum positivarum versus N, & suppositis nunc positivis quantitatibus m, n, A, & secta $AC=A$ fiat in angulo quocumque linea $AR=\frac{mA}{n}$; per R, C ducta recta BD ea est, quæ propositæ æquationi respondet. Nam sumpta quacumque $AU=x$ & ordinata $UQ=y$, & parallela rectæ AR erit semper $CU=A+x$, & per triangula similia CAR, CUQ, $CA:AR::CU:UQ$, adeoque $A:\frac{mA}{n}$, seu quod idem est $n:m::A+x:y$, unde $y=\frac{mA+mx}{n}$, quæ est æquatio proposita.

16. Si in æquatione esset $A=o$, patet etiam esse $\frac{mA}{n}=o$, ac proinde nullas fieri rectas CA, AR, & æquationem nostram ad hanc reduci $y=\frac{mx}{n}$;

In hac

In hac hypothesi quum nullum aliud punctum habeamus in figura determinatum præter C: cum quo coincidit A, directio lineæ BD nullo modo est determinata. Ut hoc incommodum vitemus, fiat $x = z + b$; b est recta quælibet determinata, z indeterminata exhibet differentiam inter x & b; erit igitur, substituto novo valore x in æquatione, $y = \frac{mz + mb}{n}$, quam construere jam novimus. Methodus enim præcedens docet faciendam AC $= b$, AR $= \frac{mb}{n}$, per R, C ducendam lineam BD, quibus positis, erit A initium abscissarum AU $= z$, UQ erunt ordinatæ $= y$, & C initium abscissarum x, per quod transit linea æquationis.

17. Hæc ut methodi vis appareret. Cæterum æquationem $y = \frac{mx}{n}$ hoc pacto brevius construere potuisses, etiamsi unicum punctum C habeas determinatum.; Cape CA $= n$, & AR $= m$, vel CA æqualem cuicumque datæ, AR vero $= \frac{m.CA}{n}$, per puncta R & C duc rectam BD, patet eam esse, quam quæsivimus, & C initium abscissarum x.

18. Si quantitas A esset negativa, ejus signum mutetur, ut fiat positiva, & æquatio nostra fiet $y = \frac{mx - mA}{n}$, facile est inferre, quam nam constructio subeat mutationem. Etenim posito a initio abscissarum, cum illæ quantitate A imminui debeant, sumenda erit (*Fig.* 3.) aC $= A$ ex parte opposita versus N, & in parte ordinatarum negativarum facienda ar $= \frac{mA}{n}$, & puncta r, C lineam determinabunt.

19. Si positis m, n, A positivis, x accipiatur negativa, sed minor quam A, sequitur, quantitatem $\frac{mx}{n}$ negativam esse, sed minorem quam $\frac{mA}{n}$; ergo, indeterminatæ x mutato signo, æquatio $y = \frac{mA - mx}{n}$ dabit y positivam; quod optime figura etiam ostendit. Si vero x negativa supponatur $= A$, patet esse $y = o$, & revera quum in C lineæ MN, BD secentur, constat nullam esse ordinatam. Si tertio supponatur x negativa major quam A, tunc æquatio dabit y negativam, adeoque omnibus Au respondebunt ultra punctum C ordinatæ uq in partem adversam positæ.

20. Si quantitates m, n negativæ essent, scimus ex hoc nullas mutari oportere; nam quum earum una sit in numeratore, alia in denominatore, mutatio signorum utriusque valorem eumdem relinquit; quapropter m, n haberi possent pro positivis. At si una tantum esset negativa vel m, vel n, tunc mutaretur quidem positio lineæ BD, quæ ex opposita parte lineæ abscissarum esset ducenda, & ordinatæ, quæ prius erant positivæ, fierent negativæ, & viceversa. Si A fuerit negativa, quid accidat ordinatis, figura satis ostendit.

21. Diximus æquationes primi gradus indeterminatas qualcumque ad generalem formulam $y = \frac{mA + mx}{n}$ reduci, si adsint termini utramque indeterminatam continentes; at si eorum alter deficit ex. gr. continens x, tunc formula esset hujusmodi $y = \frac{mA}{n}$, & locus respiceret lineam rectam lineæ abscissarum parallelam; quod clarum est, quia sumpta quacumque ad libitum abscissa, eadem illi

illi semper responderet ordinata, quemadmodum formula postulat. Et si fiat hypothesis $A=o$; hoc est $y=o$, tunc lineæ illæ duæ parallelæ in unam coalescerent, adeoque æquationis locus esset eadem linea abscissarum. Si contra supponatur deesse y, ita ut sit $A=x$, locus erit linea recta parallela ordinatis, seu linea in quolibet angulo cum linea abscissarum, quam secaret in puncto ab earum vertice distante per quantitatem A, quæ quantitas si nulla fiat, sectio erit in ipso abscissarum initio.

22. Ex iis, quæ hic tradidimus methodus aperitur, qua geometrice valores determinemus duarum incognitarum, quotiescumque duas habeamus indeterminatas æquationes primi gradus. Sint hæ duæ æquationes $y=\frac{ax-ab}{n}$, $y=\frac{cx-cd}{m}$, & locum utriusque investigemus. In infinita (*Fig.* 4.) MN punctum A sit initium abscissarum x; capiantur $AC=b$, $CE=n$, & in quocumque angulo MEF, fiat $EF=a$, ex superius dictis constat rectam ductam per puncta F, C fore locum primæ æquationis, cujus coordinatæ sunt qualibet $AU=x$, & qualibet respondens $UQ=y$, & parallela rectæ FE. Jam vero quæramus locum æquationis secundæ, sed ita ut ejus abscissarum initium sit idem punctum A in linea eadem MN. Igitur sit $AG=d$, $GP=m$, & fiat $PR=c$, sed parallela ordinatis loci prioris, hoc est parallela FE; scimus rectam ductam per puncta R, G locum esse hujus secundæ æquationis. Nunc autem si RG producta secet in aliquo puncto Q lineam PC pariter quantum opus est productam, & ex puncto concursus demittatur QU parallela FE, dicimus eam esse y a duabus æquationibus requisitam. Etenim quum per primam æquationem y debeat pertinere ad lineam FC, & per secundam ad lineam RG, idque verificari non possit nisi in puncto concursus, necesse est, ut sola UQ in illud punctum incidens sit y ab utraque æquatione requisita. Et hoc pacto etiam x determinatur; ea namque erit AU, quæ respondet ordinatæ QU, quæ ducitur a puncto concursus duorum locorum. Ita fit manifestum, quomodo duorum locorum intersectione geometrice inveniantur valores duarum incognitarum primi gradus.

23. Ut hæc constructio plenius intelligatur, nonnulla sunt hic animadvertenda. Si ratio $n:a$ eadem fuerit, ac ratio $m:c$, erit in triangulis CEF, GPR, CE:EF::GP:PR, quæ triangula quum aliunde æquales habeant angulos in E, & P, necessario erunt similia; ergo æquales anguli ECF, PGR, atque inde lineæ FC, RG parallelæ; atqui lineæ parallelæ, etiamsi in infinitum producantur, numquam se intersecant; ergo in hoc casu non possent determinari valores x, y, qui proinde quibuscumque datis majores erunt existimandi. Si rationes $n:a$, $m:c$ æquales non sunt, loci concurrent quidem in aliquod punctum; at videndum est utrum angulus PGR major vel minor sit angulo ECF. Nam si sit major, quod contingit cum $n:a:>:m:c$, tunc punctum concursus erit ex parte B, si vero minor sit, hoc est si $n:a:<:m:c$, punctum concursus erit ex altera lineæ abscissarum parte, nempe ex parte D. Harum rationem ex vulgari geometria satis patere existimamus.

24. Si supponamus $b=d$, erit $x=b$, & $y=o$. Patet primum, quia tunc puncta Q, U incident in C; ergo $AC=b=AU=x$; patet alterum, quia ex eo quod puncta Q, U unum punctum efficiant, necesse est tota linea QU omnino evanescat. Idipsum analysis ostendit. Etenim quum duo valores y, qui sunt in hoc casu $\frac{ax-ab}{n}$, $\frac{cx-cb}{m}$ inter se æquales esse oporteat, erit $\frac{a}{n}.\overline{x-b}$

=

$= \frac{c}{m} . \overline{x - b}$, seu $\frac{a}{n} - \frac{c}{m} . \overline{x - b} = o$; ergo alteruter ex factoribus primi membri est $= o$, at non primus, quum eæ quantitates ad libitum assumi possint; ergo $x - b = o$, & $x = b$. Jam vero si loco x substituas b in utroque y valore, ambo fiunt $= o$.

25. Denique quum rectæ BD, QG non possint se mutuo secare nisi in unico puncto, sequitur unicum ab iis valorem x, y exhiberi.

26. Facile etiam apparet, quamcumque determinatam æquationem primi gradus tradita methodo resolvi posse; quum earum quælibet possit ad duas indeterminatas æquationes gradus ejusdem nullo negotio perduci, altera incognita introducta. En qua ratione id perficiatur. Multiplicanda est prius æquatio determinata per binomium $m + n$ (m & n sunt quantitates ad libitum sumendæ); deinde incognita in n ducta facienda æqualis formulæ alteri, in qua nova incognita reperiatur, unde orietur æquatio primi gradus indeterminata; tertio eliminanda est per substitutionem ipsa incognita multiplicata per n, qua facta substitutione alia exurget æquatio indeterminata. Locis utriusque descriptis, quæsitæ incognitæ valor eorum intersectione determinabitur.

27. Exemplum. Sit qualibet æquatio determinata primi gradus $x = A$. Si illam per $m + n$ multiplices, est $mx + nx = \overline{m + n} . A$. Pone terminum $nx = ay + aC$, habes primam æquationem indeterminatam; & substituto hoc nx valore in superiori æquatione, $mx + ay + aC = m + n . A$, seu $mx = -ay + m + n . A - aC$ æquationem secundam indeterminatam; ergo loci duo erunt $y = \frac{nx - aC}{a}$, $y = \frac{-mx + \overline{m + n} . A - aC}{a}$, qui constructi valorem x determinabunt. Hi autem non differunt a locis N. 23, nisi in denominatore, qui in his est idem, in illis diversus. Quantitates a, m, n, C ad libitum potes assumere, prout ad utilitatem, atque elegantiam magis conferre existimaveris. Si faceres ex. gr. $aC = nA$, & m negativam assumeres, loci essent $y = \frac{nx - nA}{a}$, $y = \frac{mx - mA}{a}$ valde simpliciores. Vides rationem $m : n$ posse esse quamcumque, dummodo non sit æqualitatis, quia non duo loci essent, sed unus tantum. Facile est etiam obtinere duo loca determinata, quia in quibuscumque formulis sufficiet determinatas accipere rationes $a : n$, $a : m$.

28. Quemadmodum hactenus ostensum est, quascumque primi gradus æquationes duarum rectarum intersectione resolvi posse; ita nunc ostendemus resolvi æquationes quascumque determinatas gradus secundi intersectione lineæ rectæ, & circuli. Id ut præstemus notandum est, circuli, cujus radius r, æquationem esse $x^2 + y^2 = r^2$, si abscissæ a centro ducant originem, & ordinatæ diametro sint normales. Sit enim circulus (*Fig.* 5.) BGD, cujus centrum C, in diametro DB capiatur CF $= x$, FG $= y$ perpendicularis ipsi DB; quum CG $= r$ sit hypothenusa trianguli rectanguli, patet futurum semper $x^2 + y^2 = r^2$.

29. Hoc præmisso accipiamus æquationem generalem secundi gradus $x^2 + Ax = aB$, in qua potest esse $A = o$, & tunc erit æquatio incompleta. Si æquationem multiplicemus per $m^2 + n^2$, habemus $m^2 x^2 + n^2 x^2 + \overline{m^2 + n^2} .$

$Ax = \overline{m^2 + n^2} \cdot aB$. Faciamus nunc $nx + \frac{m^2 + n^2}{2n} \cdot A = my$, seu $y = \frac{n}{m} \cdot x + \frac{m^2 + n^2}{2nm} \cdot A$, qui manifeste est locus primi gradus. Quadrando fiet $n^2 x^2 + \overline{m^2 + n^2} \cdot Ax = m^2 y^2 - \frac{\overline{m^2 + n^2}^2}{4n^2} \cdot A^2$; ergo substituto secundo hoc membro pro primo, quod in æquatione antea multiplicata reperitur, habebimus $m^2 x^2 + m^2 y^2 - \frac{\overline{m^2 + n^2}^2}{4n^2} \cdot A^2 = \overline{m^2 + n^2} \cdot aB$, seu $x^2 + y^2 = \frac{\overline{m^2 + n^2}^2}{4n^2 m^2} \cdot A^2 + \frac{m^2 + n^2}{m^2} \cdot aB$, hoc est multiplicato & diviso termino ultimo per $\frac{m^2 + n^2}{4n^2}$. $x^2 + y^2 = \frac{\overline{m^2 + n^2}^2}{4n^2 m^2} \cdot \overline{A^2 + \frac{4n^2 aB}{m^2 + n^2}}$ æquationem ad circulum, quæ comparata cum ea, quam jam esse propriam circuli demonstravimus, nempe cum $x^2 + y^2 = r^2$, ostendit radium esse debere $\frac{m^2 + n^2}{2nm} \sqrt{A^2 + \frac{4n^2 aB}{m^2 + n^2}}$, quem vocemus $= r$.

30. Igitur radio $= r$ descripto circulo B G D hic erit locus ultimæ æquationis, cujus abscissæ C F $= x$, ordinatæ F G $= y$. Nunc ut alium locum $y = \frac{n}{m} \cdot x + \frac{m^2 + n^2}{2mn} A$ cum hoc componamus, ita ut utriusque abscissæ ab eodem puncto C incipiant, fiat C A $= \frac{m^2 + n^2}{2mn}$. A, & erigatur C E perpendicularis D B talis, ut sit $m : n ::$ C A : C E, ducta linea per puncta A, E, ea erit locus alter, qui circulum secabit in G, g, & duæ ex iis punctis demissæ perpendiculares G F, g f, determinabunt duos valores x, C F, C f, seu duas propositæ æquationis radices, quæ ambæ positivæ erunt, si tendant ex C versus B, ambæ negativæ si ex C versus D, altera positiva, altera negativa, si altera versus B altera versus D procedat. Si C A sit major quam radius, quod in hypothesi $m = n$ non accidet, nisi B sit negativa, tunc punctum A extra circulum erit positum; & si negativa fuerit quantitas A punctum A in oppositam cadet partem, scilicet versus B.

31. Si punctum A intra circulum cadat, æquatio duas semper habebit reales radices, nam semper linea A E in duobus punctis circumferentiam secabit, ex quibus demissæ perpendiculares in diametrum totidem determinabunt valores x. At si punctum A sit extra circulum triplex oritur casus; vel enim recta A E circulum secabit, vel tanget solum, vel fugiet prorsus. Si primum accidat, duæ sunt pariter radices reales; si alterum radices ambæ æquales erunt; quod patet, quia linea secans quo magis ad tangentem accedit, & propiora fiunt puncta

cta interſectionum, eo etiam magis accedere perpendiculares debeat ita, ut quum in contactu puncta interſectionum coincidant, coincidant etiam perpendiculares ab iis demiſſæ, adeoque utraque radicem eandem determinet. Si vero linea neque ſecet, neque tangat circulum, tunc ſane radices erunt imaginariæ; quod non fiet niſi CE ſit major radio. Erunt pariter imaginariæ radices ſi radius circuli fuerit quantitas imaginaria, quod eſt manifeſtum.

32. Si quis locum primi gradus optaret, qui cum linea abſciſſarum datum angulum efficeret, is rem obtinebit, dummodo datam accipiat rationem $m:n$.

33. Quod ſpectat ad radium circuli, quiſque videt, ut illum inveniamus, oportere geometricum valorem quantitatis radicalis reperire, quæ etſi ex traditis regulis poſſit ſemper geometrice determinari, tamen non minorem videtur habere difficultatem, quam conſtructio jam reſolutæ æquationis. Nihilominus fiet ſæpe ſæpius, ut parum aut nihil laboremus; imo aliquando datus circulus poterit obtineri. Hac de cauſa vocato r radio circuli dati neceſſe erit, ut ſit $\frac{m^2+n^2}{2nm}$ $\sqrt{A^2+\frac{4n^2aB}{m^2+n^2}}=r$. ergo erit $\frac{A^2m^4+2A^2m^2n^2+A^2n^4}{4m^2n^2}+\frac{aBm^2+aBn^2}{m^2}$ $=r^2$, ſeu

$$A^2m^4+2A^2m^2n^2+A^2n^4$$
$$+4aBm^2n^2+4aBn^4=0$$
$$-4r^2m^2n^2$$

æquatio quarti gradus, quæ quum methodo ſecundi tractari poſſit, poterit etiam ſemper reſolvi: ſed quia in genere ad implicatam conſtructionem perducit, ideo hic imperſectum calculum relinquemus. Eadem de cauſa ſilentio præteribimus methodum, qua æquationes ſecundi gradus duorum circulorum interſectione conſtruuntur; calculus enim longus & implexus evadit. Præcipue quum methodus interſectionum non fuerit a nobis propoſita, quaſi ſimpliciores ita fierent ſemper conſtructiones primi & ſecundi gradus, quæ ſane expeditius multo & elegantius poſſunt alia via obtineri, ſed tantum, ut a primordiis ſuis methodum indicaremus, qua deinde in altioribus gradibus uti opus erit, in curvis ſcilicet deſcribendis, quæ radices æquationum ſuis interſectionibus oſtendant. Præterquamquod id non fuerat omnino prætermittendum, cujus ope induſtrius analyſta elegantiſſimas ſæpe obtinebit conſtructiones.

34. Verum quotieſcumque conſtructionem perficis per circulum quemcumque, eamdem perficere potes per circulum datum methodo facili, quæ in figurarum ſimilitudine habet fundamentum. Supponamus in Fig. 5. per interſectionem circuli BGD, cujus radius inventus ſit $=f$, & lineæ Gg determinatam fuiſſe incognitam CF, & oporteat eam per circulum datum, cujus radius $=a$ determinare. Sit hic circulus (*Fig. 6.*) HMI, cujus duc diametrum HI parallelum BD, divide KI in L in ea ratione, in qua CD diviſa eſt in A; duc LM in eo angulo, in quo ducta eſt AG, & dimitte ordinatam MN analogam ordinatæ FG, recta KN analoga rectæ CF habebit ad CF rationem, quam habent radii a, f. Ergo ſi abſcindatur KO, quæ ſit ad KN$::f:a$, erit KO $=$CF, æqualis incognitæ quæſitæ, quam determinare oportebat. Quum circuli ſint figuræ ſimiles, methodus hæc, quæ unico exemplo eſt declarata, omnibus caſibus ſine dubio applicari poteſt.

 35. Ut

35. Ut autem pateat, quantum in hisce rebus industria valeat, placet hic aliud addere genus constructionis traditum a doctissimo Rabuelio, quo per circulum æquationes secundi gradus omnes resolvuntur. Notum est ex geometria, quod si linea (*Fig.* 7.) GH duos secet concentricos circulos ABC, GHF, linea GA inter duas circumferentias intercepta ex una parte, æquat BH inter easdem intercepta ex parte alia. Etenim ducta ex D communi centro DO perpendiculari ad GH, ex Euclide lib. 3. prop. 3. corda utraque GH, AB bifariam in O dividitur; ergo $GO=HO$, $AO=BO$; ergo etiam $GO-AO=HO-BO$, seu $GA=BH$. *Q. E. D.*

36. Hoc præmisso, ut construamus æquationem $z^2-az=bc$ ductis ad libitum rectis EF, GH, quæ se mutuo in aliquo puncto A intersecent in quocumque angulo, & accepta in earum alterutra $AB=a$, & in alia $AF=b$, $FC=c$, per tria puncta A, B, C circulus ducatur, cujus centrum sit D, deinde intervallo DF alter describatur circulus primo concentricus, qui lineam primam secabit in punctis G, H, alteram in E; dicimus AH esse radicem positivam, AG radicem negativam æquationis propositæ. Facilis est demonstratio. Nam quum per theorema præmissum sit $AE=FC$; erit $AE=c$; ergo rectangulum $EAF=bc$. Præterea vocata $AH=z$, erit $HB=AG=z-a$; ergo rectangulum $GAH=z^2-az$; atqui rectangula EAF, GAH per propo. 35. lib. 3. Euclid. æqualia sunt; ergo $z^2-az=bc$, quæ est proposita æquatio. Pariter vocata $GA=-z$, erit $AH=-z+a$; ergo rectangulum $GAH=z^2-az$ ut supra. Si habeamus æquationem $z^2+az=bc$, constructio in hoc tantum a priori differt, quod AG erit radix positiva, AH radix negativa.

37. Si esset $b=c$, tunc esset etiam $FC=AF$; ergo coinciderent puncta A & C, quod contingit tantum quum linea AF est tangens circuli ABC. Describere igitur oportebit in hac hypothesi circulum, qui per datum punctum *B* transeat, & lineam *AF* tangat in dato puncto, quod est problema notissimum.

38. Si construenda proponatur æquatio $z^2-az=-bc$, ductis in quocumque angulo rectis (*Fig.* 8.) AB, AC, in prima accipiatur $AB=a$, in altera $AF=b$, $FC=c$, & per puncta A, B, C circulus describatur, cujus centrum D. Intervallo DF alter ducatur circulus primo concentricus, qui AC secet in puncto E, AB vero in punctis G, H; dicimus duas AH, AG esse radices positivas propositæ æquationis. Demonstratio est præcedenti simillima.

39. Eadem constructio inservit etiam æquationi $z^2+az=-bc$, sed AH, AG tunc erunt radices negativæ. In hac tamen quotiescumque sit $\frac{a^2}{4}<bc$, circulus radio DF descriptus rectam AB non secabit, quod indicio erit æquationem realibus radicibus carere. Quamvis, ut clarius elegantissima hæc constructio traderetur, circuli duo concentrici descripti sint; ea tamen circulum ABC necessario non postulat; sufficit enim punctum D determinare, in quo facto centro, & circulo GHF descripto radices AH, AG eodem pacto obtinebimus. Puncti autem D determinationem facillimam esse ex geometria scimus; quum nihil aliud requiratur, quam lineas AB, AC iam cognitas bifariam secare in O, V, & perpendiculares erigere, quæ se mutuo secantes in D punctum quæsitum exhibebunt.

40. Hu-

40. Hujuſmodi determinatio fiet etiam expeditior, ſi angulus in A rectus aſſumatur; nam quum hic in ſemicirculo neceſſario eſſe debeat, recta conjungens puncta B, C erit circuli diameter: ergo centrum D erit punctum illud, in quo ea bifariam dividitur. Hæc conſtructio ſatis ſuperque oſtendere poteſt, quantum hiſce in rebus analyſtæ valeat induſtria. Idipſum alia docebunt exempla capitis ſequentis, ubi nonnulla ſolvemus problemata geometrica.

CAPUT NONUM

Problematum aliquot geometricorum primi, & ſecundi gradus ſolutio exhibetur.

1. PRoblema primum. Datam rectam (*Fig.* 1.) A B utcumqae in C diviſam ita producere in E, ut ſit rectangulum A E B æquale quadrato C E. Vocetur $AB = a$; $CB = b$, & $BE = x$ quantitas incognita, cujus determinatio ſolvit problema. Ex propoſita conditione eſſe debet $AE . EB = \overline{CE}^2$; ergo $\overline{a+x} . x = \overline{b+x}^2$, ideſt $ax + xx = bb + 2bx + xx$, ſeu $ax - 2bx = bb$, unde $x = \frac{bb}{a-2b}$; igitur $a - 2b : b :: b : x$; quæ analogia oſtendit incognitam $BE = x$ eſſe tertiam proportionalem poſt $a - 2b$, & b. Hinc ſequens oritur conſtructio.

2. Capiatur $CD = b$, ut habeatur $AD = a - 2b$. Ex punctis C, B duæ erigantur parallelæ C L, B H, quarum prima ſit $= AD$, altera $= CB$, & puncta L, B jungantur recta L B. Huic parallela agatur H E concurrens cum A B in E. Hæc determinat B E, quam quærimus. Ex ſimilitudine enim triangulorum L C B, H B E erit $CL = a - 2b : CB = b :: BH = b : BE = \frac{bb}{a-2b}$.

3. Idem ſyntethice demonſtratur. Ex conſtructione eſt
$AD = CL : DC = CB :: CB = BH : BE$; ergo componendo
$AC : CB :: CE : BE$, & alternando
$AC : CE :: CB : BE$, & componendo
$AE : CE :: CE : BE$; igitur C E eſt media proportionalis inter A E, B E, adeoque $AE . BE = \overline{CE}^2$. Q. E. D.

4. Verum hic determinationes quædam nullo pacto ſunt prætermittendæ. Si $b < \frac{a}{2}$, punctum D ſemper cadit inter A, & C, & locum habet præcedens conſtructio. At ſi $b = \frac{a}{2}$, punctum D cadet in A, adeoque erit $AD = o$; ergo etiam $CL = o$, & punctum L cadet in C, & L B jacebit ſupra C B; ergo H E parallela L B lineæ A B non occurret niſi in puncto infinite remoto. Tandem ſi $b > \frac{a}{2}$, punctum D cadet ultra A, eritque A D negativa; quare C L ducenda eſt in partem priori oppoſitam, & quod conſequens eſt, etiam H E parallela L B lineam A B in parte priori averſa ſecabit.

5. Pro-

5. Problema secundum. In dato triangulo (*Fig.* 2.) ABC inscribere quadratum, cujus latus unum cadat in basim BC trianguli. Quadratum inscriptum sit EDFG. In basim BC demitte perpendicularem AH, quæ ob datum triangulum data erit. Voca $BC = a$, $AH = b$, $HL = FG = x$. Ob similia triangula ABH, AFL est $AH : AL :: AB : AF$, & ob alia similia ABC, AFG est $AB : AF : BC : FG$; ergo $AH = b : AL = b - x :: BC = a : FG = x$, seu alternando $b : a :: b - x : x$, & componendo $b + a : a :: b : x$; est igitur LH quarta proportionalis post notas quantitates.

6. Constructio. Producta indefinite BC, fiat $HM = BC$, & $MN = AH$, ut sit $HN = a + b$. Jungatur AN, eique ex M ducatur parallela ML, quæ secabit AH in puncto L; hoc punctum L illud erit; per quod ducta FLG basi BC parallela, & demissis normalibus FD, GE, quadrilaterum EDFG est quadratum.

7. Demonstratur. Propter parallelas AN, LM similia erunt triangula AHN, LHM: ergo $MN = AH : AL :: HM = BC : HL$. Item ob similia triangula ABC, AFG ut $AH : AL :: BC : FG$: ergo $BC : FG :: BC : HL$; ergo $FG = HL$, adeoque EDFG quadratum est.

8. Si angulus ACB sit acutus allatæ solutioni nihil deest. Si rectus sit, patet, quadrati latus GE coincidere cum GD. Si denique sit obtusus, (*Fig.* 3.) EDFG quadratum utique etiam tunc erit, sed non triangulo inscriptum, quoniam ejus pars extra triangulum cadet. Idem dicito de angulo B.

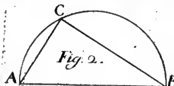
9. Problema tertium. Construere triangulum æquilaterum (*Fig.* 4.) ABC æquale quadrato datæ CN. Basi BC sit normalis AD, voceturque $DC = x$, adeoque quodlibet latus trianguli quæsiti $= 2x$; ergo $AD = \sqrt{4xx - xx} = x\sqrt{3}$; ergo trianguli ABC area $= x^2\sqrt{3}$; ergo vocata $CN = a$ erit $x^2\sqrt{3} = aa$, & $x = \sqrt{\frac{aa}{\sqrt{3}}}$.

10. Ut hunc valorem geometrice invenias, formulam ita scribe $x = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3aa}}}$. Produc CN in G, donec CG sit quadrupla CN, describe semicirculum GMC, & erige perpendicularem NM, quæ ex natura circuli $= \sqrt{3aa}$. Huic æqualem seca NQ, descriptoque novo semicirculo QFC, duc chordam CF. Nunc si applices normaliter $DE = CN$, habebis $DC = x$. Etenim erit $QN = \sqrt{3aa} : NC = a :: FN^2 : NC^2$, sive $:: ED^2 = aa : DC^2$; ergo $DC^2 = \frac{a^3}{\sqrt{3aa}}$, & $DC = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{3aa}}}$. Accepta igitur $DB = DC$, erit tota BC recta, super quam constitutum triangulum æquilaterum æquabit quadratum rectæ CN.

11. Si fuisset $x = \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{naa}}}$, sumpta recta $CG = \overline{n+1} \,.\, a$, constructio eodem modo, ac antea, perageretur.

12. Problema quartum. Datis duobus circulis, quorum centra sint (*Fig.* 5.) A, B, ducere lineam, quæ utrumque tangat. Sit CD tangens quæsita, quæ producta concurrat in E cum AB. Ducantur AC, BD ad puncta contactus. Vocemus


C
Fig. 1.
B


C
Fig. 2.
A
B

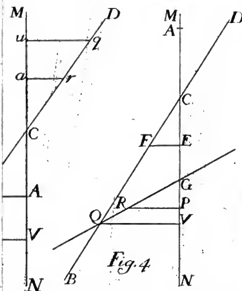
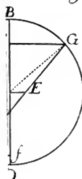
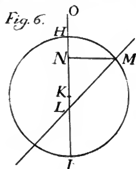
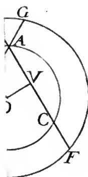
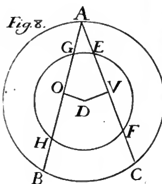

M
D
u
q
a
r
C
A
V
N
M
A
D
C
F
E
G
R
P
Q
V
Fig. 4
B
N

Fig. Cap. VIII. Lib. I. Tab. II. pag. 78.









mus AB $= a$, AC $= R$, BD $= r$, BE $= x$. Quum anguli in C, D recti sint, radii AC, BD erunt paralleli; ergo similia triangula EAC, EBD, & $R : r :: a + x : x$; igitur dividendo $R - r : r :: a : x$: quæ analogia expeditissimam habet constructionem. Ducantur quocumque modo bini radii inter se paralleli AL, BM, & puncta L, M jungatur recta LM, quæ producta secabit AB in E, ex quo tangens ducta ad alterutrum ex duobus circulis tanget utrumque, & problema solvet. Etenim ob similitudinem triangulorum, habebimus LA : MB :: AE : BE; ergo LA $-$ MB : MB :: AB : EB, sive $R - r : r :: a$: BE, ut analysis postulat.

13. Manifestum est, ex eodem puncto E aliam quoque duci posse tangentem Ed, quæ alium circulum tanget in puncto e. Patet etiam solutionem allatam spectare præsertim circulos inæqualis diametri, quo in casu communis tangens lineam centrorum secat ad plagam minoris circuli. Quod si circuli æquales sint, quum tangens fiat parallela rectæ AB, punctum E in infinitum recedat necesse est; verum in hac hypothesi facilius res perficitur; si enim radium erigas lineæ AB normalem, & in puncto, ubi circumferentiam secat, tangentem ducas, ea utrumque circulum tanget.

14. Quum ex eodem puncto E non plures quam duæ tangentes duci possint, existimabit fortasse aliquis, duas tantum esse problematis solutiones. At is vehementer erraret; duæ namque tangentes duci etiam possunt a puncto quodam F posito inter A, B, qua in hypothesi facta BF $= x$, analogiam habemus $R : r :: a - x : x$, & componendo $R + r : r :: a : x$. Producto radio MB in N, junctaque LN, punctum F, in quo hæc secat AB, illud erit, quod novas suppeditat solutiones; idest ducta ex illo tangens ad alterutrum circulorum utrumque tanget. Ita novæ tangentes erunt KH, kh. Hoc igitur problema, etsi æquationem exhibeat primi gradus, tamen ad quartum gradum pertinet, quum quatuor habeat, easque diversas solutiones. Harum duæ, nempe illæ, quas præbet punctum F, imaginariæ fiunt, si circuli sese intersecent; at omnes imaginariæ sunt, si alter circulorum intra alterum cadit.

15. Problema quintum. In dato circulo, cujus centrum (*Fig. 6.*) C, duos circulos describere, sese & illum, cui inscribuntur, tangentes ita, ut junctis eorum centris fiat triangulum CEF simile triangulo dato ABD. Sit factum, & producantur latera CE, CF, quæ ad puncta contactus G, H pervenient. Radius CG vocetur $= r$, EI $=$ EG $= x$, FH $=$ FI $= y$. Propter similitudinem triangulorum CEF, ABD vocatis lateribus BD $= a$, BA $= b$, DA $= c$, orientur duæ analogiæ $a : b :: x + y : r - x$, $a : c :: x + y : r - y$, ex quibus duæ æquationes $x + y = \frac{a}{b} . \overline{r - x}$, $x + y = \frac{a}{c} . \overline{r - y}$; ergo $\frac{r - x}{b} = \frac{r - y}{c}$, unde $b : c :: r - x : r - y$. Hinc duæ componendo prodeunt analogiæ $b : b + c :: r - x : 2r - x - y$, $b + c : c :: 2r - x - y : r - y$, in quibus substitutis valoribus $x + y$ prius inventis, erunt $b : b + c :: r - x : 2r - \frac{a}{b} . \overline{r - x}$, $b + c : c :: 2r - \frac{a}{c} . \overline{r - y} : r - y$; igitur extremis mediisque, ut par est, multiplicatis duæ orientur æquationes $2rb - a . \overline{r - x} = \overline{b + c} . \overline{r - x}$, $2rc - a . \overline{r - y} = \overline{b + c} . \overline{r - y}$, seu $\frac{2rb}{b + c + a} = r - x$, $\frac{2rc}{b + c + a} = r - y$, quæ tandem exhibent $x = \frac{a + c - b}{a + b + c} . r$, $y = \frac{a + b - c}{a + b + c} . r$, unde tandem $a + b + c : a + c - b :: r : x$,

a+

$a+b+c:a+b-c::r:y$.

16. Constructio. Producta utrinque BD capiatur $BM = Bm = BA$, & $DN = Dn = DA$; ita erunt $MN = a+b+c$, $Mn = a+b-c$, $Nm = a+c-b$. Ducatur, prout lubet, radius aliquis CG; & fiat $MN : Nm :: CG : EG$; hæc erit radius unius ex quæsitis circulis. Ducta deinde CH, quæ angulum faciat $GCH = BAD$, fiat $MN : Mn :: CH : HF$, quæ erit radius circuli alterius. Circuli igitur descripti centris E, F, radiis EG, FH, & sese contingent, & circulum datum GH, & dabunt triangulum ECF simile BAD.

17. Si circulos externos quæramus, eadem prorsus valebit methodus, neque quidquam erit mutandum, nisi hoc, quod in analogiis pro $r-x$, $r-y$ scribendum erit $r+x$; $r+y$ ut consideranti patebit.

18. Problema sextum. Dato circulo (*Fig.* 7.) AEF, & puncto extra illum B, quod cum centro jungat recta CB, cui sit perpendicularis BD, quæritur in hac punctum D, ad quod e centro ducta CD, sit intercepta $DE = DB$. Vocetur radius $CA = r$, $BA = a$, $BD = DE = x$: erit igitur $CB = r+a$, $CD = r+x$. Propter angulum rectum in B est $CD^2 = CB^2 + DB^2$, aut analytice $\overline{r+x}^2 = \overline{r+a}^2 + xx$, sive $rr + 2rx + xx = rr + 2ra + aa + xx$, seu $2rx = 2ra + aa$, unde analogia $2r : 2r+a :: a : x$.

19. Analysis hæc non inelegantem constructionem suppeditat. Producta AC, donec ad circumferentiam perveniat in F, erit $FA = 2r$, $FB = 2r+a$. Igitur si rectæ AB excitemus perpendicularem $AG = AB = a$, & jungamus FG, hæc producta secabit BD in puncto quæsito D. Nam ex similitudine triangulorum est $FA = 2r : FB = 2r+a :: AG = a : BD = x$; igitur si ducatur CD, erit DE intercepta inter punctum D & circulum æqualis DB.

20. Hæc quoad problema, prout propositum fuit. Verum si universalius ita proponeretur; iisdem positis invenire punctum D, ad quod ducta CD sit BD : DE in data ratione $a:n$. Tunc vocata $DB = x$, erit $DE = \frac{nx}{a}$, & $CD = r + \frac{nx}{a}$; ergo æquatio prodiret $\overline{r + \frac{nx}{a}}^2 = \overline{r+a}^2 + x^2$, ex qua usitata methodo inveniremus $x = \pm \frac{\sqrt{n^2a^4 + 2n^2a^3r - a^6 - 2a^5r + n^2a^2r^2} - nar}{n^2 - a^2}$. Possemus hinc quidem eruere constructionem, at minus profecto simplicem. Quapropter quando elagantia in primis quærenda est, ad aliud analyseos genus animum convertamus.

21. Sit linea (*Fig.* 8.) CED problemati satisfaciens. Agatur radius CO parallelus BD, cui per punctum E ducatur perpendicularis FEG, & parallela EH. Vocetur $CB = FG = a$, radius $= r$, $FB = EH = x$, $EF = y$, unde $EG = HC = a - y$. Quoniam $CH : HE :: CB : BD$, est $a-y : x :: a : BD = \frac{ax}{a-y}$; ergo $DF = \frac{ax}{a-y} - x = \frac{xy}{a-y}$; & ex triangulis similibus CEG, DEF valet $CG : CE :: DF : DE$; ergo $x : r :: \frac{xy}{a-y}$. $DE = \frac{ry}{a-y}$. Jam vero ex conditione problematis $BD : DE$ est in ratione data $a:n$; ergo $\frac{ax}{a-y} : \frac{ry}{a-y} :: a:n$, seu $ax : ry :: a:n$, $x : y : r : n$.

22. Posset ex hac analogia altera ex incognitis ejci, quoniam æquationem habemus aliam $CE^2 = CH^2 + EH^2$, hoc est $rr = \overline{a-y}^2 + xx$; sed hæc methodus nos ad æquationem secundi gradus perduceret, cujus implicatior aliquanto esset constructio. Alia igitur via elegantiæ caussa incedamus. Analogia nos docet BF : FE esse in data ratione $r:n$. Itaque ex puncto O ducta OM parallela CB, ut sit $BM = r$, abscinde in ea $MN = n$, & junge BN. Ex quocumque rectæ BN puncto ducas normalem in BM, ut QP, erit $BP:PQ::r:n$; ergo punctum E necessario erit in linea BN; sed idem punctum in circuli circumferentia sit oportet; ergo erit punctum intersectionis circuli, & lineæ BN: Quare per punctum E intersectionis circuli, & rectæ BN, duc CED, hæc erit quæsita.

23. Sed determinationes diligenter sunt persequendæ. Ex puncto (*Fig.* 9.) B ducito tangentem BK, quæ producta secabit MO in L, erit $BK = \sqrt{aa-rr}$, quod fit apertissimum ducto radio CK. Insuper similia sunt triangula BKC, LBM; ergo $KC : KB :: MB : ML$; sed $KC = MB$; ergo $ML = KB = \sqrt{aa-rr}$. Itaque si $n = \sqrt{aa-rr}$, linea BN transit in BL, & circulum tangit, & unica obtinetur problematis solutio. Si $n < \sqrt{aa-rr}$, veluti M2N, tunc recta B2N, quum nusquam circulum inveniat, solutiones omnes erunt imaginariæ. Si $n > \sqrt{aa-rr}$, sed $< a$, ut MN, duplicem obtinemus intersectionem inter puncta A, O, adeoque solutionem problematis duplicem. Si $n = a$, ut MO, qui casus concidit cum problemate primum soluto, quia proportio evadit æqualitatis, præter punctum, quod præbuit solutio supra allata, alterum erit punctum O, per quod ducta CO in infinitum abit, quin cum BM concurrat, & ita lineæ, quæ æquales esse debent, evadunt infinitæ. Si denique $n > a$, ut M3N, juncta B3N, hæc prius secabit circulum inter puncta A, O, quæ intersectio dat similem prioribus solutionem. Deinde secabit in puncto I sito post puncta A, O. Ex I per centrum C duc IC, hæc producta concurret cum MB in R, quo in casu etiam certum est BR : RI esse ut $BC : M3N :: a:n$, quamvis expressiones rectarum fiant negativæ; sunt enim $\frac{ax}{a-y}$, $\frac{ry}{a-y}$, & in hoc casu $y > a$.

24. Si animum ad analysin hanc nostram advertas, eam latissime patere deprehendes; non enim necesse est, ut angulus MBC sit rectus, sed sufficit, ut rectæ (*Fig.* 8.) MO, FG, PQ accipiantur parallelæ BC. Artificium etiam perpende, quo per intersectionem lineæ rectæ, & circuli ad elegantem constructionem devenimus. Hujusmodi methodus sæpe utilis est, quum datum habes in problemate circulum; eo enim circulo per rectam secato, solutio non raro maxima cum elegantia sese offert.

25. Hanc quidem viam sequuti sumus ea maxime de caussa, ut analyseos artificia patefierent; neque enim primo intuitu cognoscere licet, quænam sit omnium methodus simplicissima. Cæterum problema hoc ita brevissime solvitur. Ex centro C (*Fig.* 10.) sit COR parallela BD, abscinde CR ita, ut CO : CR habeat rationem datam, quam habere debet DE : BD, et junge BR. Per punctum E, ubi hæc circulum secat, ducta CED ea erit, quæ determinat punctum D. Etenim quum sint similia triangula CER, BED, habebis $DE:DB :: CE = CO : CR$, quæ est ratio data.

26. Problema septimum. Super (*Fig.* 11.) AB triangulum ejusmodi ACB

 con-

constituere, ut, ducta normali CD, sint AB, AC, BC, CD continue proportionales. Sit recta $AB = a$, $AD = x$, $DB = y$, ut sit $a = x + y$, demum $DC = z$, ut fiant $AC = \sqrt{xx + zz}$, $BC = \sqrt{yy + zz}$. Ex conditionibus problematis valebit primum hæc analogia AB:AC::CB:CD, sive $x + y : \sqrt{xx + zz} :: \sqrt{yy + zz} : z$, & quadrando $xx + 2xy + yy : xx + zz :: yy + zz : zz$, & dividendo $2xy + yy - zz : xx + zz :: yy : zz$, & permutando simul ac dividendo $2xy - zz : yy :: xx : zz$; ergo transitu ad æqualitatem facto $2xyzz - z^4 = x^2y^2$, sive $z^4 - 2xyzz + x^2y^2 = 0$, & extracta radice $zz - xy = 0$, seu $zz = xy$. Igitur DC est media proportionalis inter AD, BD; ergo rectus est angulus ACB.

27. Rectum angulum esse, poterat brevius ita ostendi. Ex superiori analogia est AB. CD = AC. BC; sed area trianguli est dimidium rectanguli AB. CD; ergo eadem est dimidium rectanguli AC. BC; atqui patet hanc æqualitatem haberi non posse, nisi angulus ACB rectus sit; constat igitur angulum hunc rectum esse.

28 Hoc demonstrato convertitur problema propositum in hoc aliud: Super data hypothenusa AB triangulum rectangulum describere, cujus latera AB, AC, BC sint continue proportionalia. Retentis iisdem denominationibus erit $a : \sqrt{xx + zz} :: \sqrt{xx + zz} : \sqrt{yy + zz}$, & pro zz substituto xy, positaque a pro $x + y$, factaque divisione per $\sqrt{a}$, habebimus $\sqrt{a} : \sqrt{x} :: \sqrt{x} : \sqrt{y}$, sive $a : x :: x : y$. AD ergo debet esse media proportianalis inter AB, BD, seu dividenda est AB in extrema, & media ratione, quod notissimum est problema ab Euclide solutum.

29. Ex facta analysi hæc oritur constructio. Super AB tanquam diametro describe semicirculum, eamdemque divide in D in extrema, ac media ratione; ex D excita normalem DC secantem in puncto C circumferentiam circuli ACB, tum junctis AC, BC, erit triangulum ACB illud, quod quærebatur.

30. Duplici in hac solutione artificio usi sumus: primo namque ex una problematis conditione proprietas describendi circuli est demonstrata, et inde ad simplicius problema solvendum res omnis deducta est. Hoc ipsum deinde in alterum conversum est, de cujus solutione jam constat.

31. Problema octavum. Circulum describere, qui per duo data puncta (*Fig.* 12.) A, B transeat, et datum circulum tangat, cujus centrum C. Data puncta jungat AB, quam bifariam dividat perpendicularis DE; in ea centrum circuli reperiri certum est. Sit illud F, ex quo ducantur FB, FC, quæ secabit dati circuli circumferentiam in G puncto contactus; igitur erit FB = FG. Ex centro C demittatur in DE normalis CE, et vocentur $FE = x$, $FB = FG = y$, $DB = a$, $ED = b$, $CE = c$, et radius datus $= r$. Triangula rectangula FDB, FEC duas præbent æquationes $yy = bb + 2bx + xx + aa$, $rr + 2ry + yy = cc + xx$, quarum si primam ex altera detrahas, erit $rr + 2ry = cc - bb - aa - 2bx$, seu $2ry = 2b . \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x$; ergo $2r : 2b$, sive $r : b :: \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x : y$. Si abscindas $EH = \frac{cc - bb - aa - rr}{2b}$, habebis $FH = \frac{cc - bb - aa - rr}{2b} - x$, quam voca $= z$.

32. Problema igitur in aliud conversum est, in quo dato circulo, cujus centrum

trum C, et puncto H in recta DH, agitur de ducenda CF ita, ut ſit HF: FG :: $r:b$, ſeu ut radius ad ED. Hoc autem, quod ex N. 25. facile ſolvitur, ita etiam conſtrues. Accipe poſt b, r tertiam proportionalem HI, et junge IC, cui parallelam ducito HG. Punctum G eſt illud, quod requiritur; ducta enim CGF, propter triangula ſimilia FGH, FCI eſt FH: FG :: HI: CG $=r$, ſeu ut $r:b$. Circulus igitur, cujus centrum F, et radius FG, tangit circulum datum, et tranſit per puncta A, B. Punctum aliud g, in quo HG circumferentiam ſecat, duas eſſe oſtendit problematis ſolutiones. Quare ſi ducas g C f, invenies centrum f alterius circuli iiſdem conditionibus præditi; ſed in primo caſu circulorum contactus exterior eſt, in ſecundo interior.

33. Problema nonum. Super datis duabus rectæ partibus (*Fig.* 13.) CA majore, CB minore duobus conſtitutis triangulis æquilateris AEC, CFB, jungatur EF ſecans AB productam in D; tum centro D intervallo DC deſcribatur circulus CM: quæritur in ejus circumferentia punctum M, ex quo ductis MA, MB, ſit AC: BC :: MA: MB. Primum inveniamus valorem radij DC. Ex ſimilitudine triangulorum DAE, DCF eſt AE: CF, ſeu AC: CB :: AD: CD; ergo dividendo AC $-$ CB: CB :: AC: CD, et analytice $a-b:b::a$ ad radium CD $=\frac{ab}{a-b}$; nam voco CA $=a$, CB $=b$. Sit MP normalis AB, ſintque CP $=x$, PM $=y$. Æquatio ad circulum exhibet $\frac{2ab}{a-b}\cdot x - xx = yy$, & ex triangulis rectangulis eſt AM $=\sqrt{\overline{a+x}^2+yy}$, MB $=\sqrt{\overline{b-x}^2+yy}$; ergo ex conditione problematis $a:b::\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2}:\sqrt{\overline{b-x}^2+y^2}$, ſeu $a^2:b^2::\overline{a+x}^2+y^2:\overline{b-x}^2+y^2$, & elevatis ad quadratum binomiis, ſubſtitutoque ex circuli æquatione valore y^2, naſcitur analogia

$$a^2:b^2::aa+2ax+xx+\frac{2abx}{a-b}-xx : bb-2bx+xx+\frac{2abx}{a-b}-xx :: aa+\frac{2a^2x}{a-b} : bb+\frac{2b^2x}{a-b},$$

& permutando dividendoque $a^2:\frac{2a^2x}{a-b}::b^2:\frac{2b^2x}{a-b}$, ſive $a-b:x::a-b:x$; quæ proportio neceſſaria quum ſit, oſtendit, hoc non problema eſſe, ſed theorema, & ubicumque accipiatur punctum M, futurum ſemper AC: BC :: AM: BM. Hanc revera eſſe deſcripti circuli proprietatem, ita facile poteſt demonſtrari.

34. Jungantur MC, MD. Quoniam AE: CF, ſeu AC: BC :: AD: CD; præterea CE: BF, ſeu AC: BC :: CD: BD, erit AD: CD :: CD: BD; ſed CD $=$ DM; ergo AD: DM :: DM: BD. Triangula igitur ADM, DMB circa communem angulum D habent latera proportionalia, adeoque ſunt ſimilia, et angulus AMD $=$ MBD; ſed MBD $=$ BMC $+$ BCM; ergo etiam AMD $=$ BMC $+$ BCM; ſed BCM $=$ CMD ob triangulum iſoſceles DCM; ergo AMD $-$ CMD, hoc eſt AMC $=$ BMC; igitur in triangulo AMB angulus M bifariam dividitur a recta MC, ac proinde quum baſis AB ſegmenta ſequi debeant laterum proportionem, erit AC: BC :: AM: BM: Q.E.D.

 35. Hanc

35. Hanc circuli proprietatem elegans solutio consequitur plurimorum, quæ proponi solent, problematum, Ad exemplum datis ut antea (*Fig.* 14.) AC, CB, et linea qualibet HH, in ea punctum H determinare, ex quo ductæ HA, HB sint inter se ut AC: CB, seu in quo sit angulus AHC=BHC. Determinato ut antea circuli centro D, puncta, in quibus circumferentia descripta radio GD lineam HH secant, problemati satisfaciunt. Illud etiam problema nullo negotio enodabis, quod adeo multos torquere experientia deprehendimus. Datis tribus lineis (*Fig.* 15.) AC, CB, BG in eadem recta jacentibus punctum invenire, ex quo omnes sub æquali angulo conspiciantur. Super rectis AC, CB, BG tria ad eamdem partem constitue triangula æquilatera, et linea jungens puncta E, F determinet punctum D, & jungens puncta L, F determinet punctum K. Centris D, K intervallis DC, KB describe duos circulos, qui se interfecabunt in H. Punctum hoc illud ipsum est, quod quæritur. Si vero accidat, ut se circuli nusquam secent, problema nullam habere potest solutionem.

36. Problema decimum. Super data basi (*Fig.* 16.) BC triangulum isosceles constituere, cujus angulus ad verticem A sit dimidium anguli ad basim. Problema hoc cæteroquin ab Euclide solutum eo animo proponimus, ut studiosi radicum omnium æquationis usum discant investigare. Trianguli quæsiti ABC angulus basis alteruter ut C bifariam dividatur a linea CD, ita tres anguli A, BCD, ACD æquales erunt, & triangulum ACB simile triangulo CDB. Hinc si vocemus $AC=AB=x$, $BC=a$, valebit analogia $x:a::a:BD=\frac{aa}{x}$, sed $DA=CD=BC=a$; ergo $BA=\frac{a^2}{x}+a=x$, adeoque $xx-ax=aa$, quæ resoluta exhibet $x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{aa+\frac{aa}{4}}$. Ex ambiguitate signorum $\pm$, constat radicem esse duplicem; utramque hoc pacto geometrice determinabis.

37. Ex B erige $BE=\frac{a}{2}$ normalem basi, junge $EC=\sqrt{aa+\frac{aa}{4}}$, cui si addas $EF=\frac{a}{2}$, & subtrahas $Ef=\frac{a}{2}$, erunt $CF=\frac{a}{2}+\sqrt{aa+\frac{aa}{4}}$, $Cf=\frac{a}{2}-\sqrt{aa+\frac{aa}{4}}$ duæ æquationis radices, quarum prima est positiva, altera negativa. Si quis tamen ex eo, quod ex analysi eadem profluant, existimaret, ambas propositum problema solvere, erraret is sane vehementer; unice enim usui esse potest radix positiva CF. Namque quum in ea hypothesi sit latus $CA=CF=\frac{a}{2}+\sqrt{aa+\frac{aa}{4}}$ majus quam $a=BC=DC=DA$, erit angulus $ACB=ABC=BDC=A+DCA$, & angulus $A=DCA$; ergo angulus ACB duplus erit anguli A. At in casu altero, quum sit $-\sqrt{aa+\frac{aa}{4}}+\frac{a}{2}<a$, idest latus $BA<BC=CD$ (*Fig.* 17.) punctum D necessario cadet ultra A in latere BA producto, quod determinabis applicata $CD=BC$, & erunt triangula ACD, BCD æquicrura; igitur æquales anguli

guli B, D, A C B; sed angulus D C A, seu D A C æquat duos simul B, A C B, & angulus C A B æqualis est duobus D C A, D; ergo $CAB = B + D + ACB$, seu, quod idem est, angulus C A B ad verticem trianguli triplus est anguli ad basim. Itaque simul cum proposito aliud problema solutum est.

38. Ut autem rei hujus caussam intelligas, cur videlicet ex duabus radicibus altera primo problemati inserviat, altera secundo longe diverso, animadvertas sufficit, quo pacto ad æquationem devenerimus. Fecimus angulum BCD æqualem BAC, unde æqualitas infertur linearum BC, CD, DA, quæ utriusque problematis propria sunt. Diximus deinde esse $AB : BC :: BC : BD$; at hæc quoque analogia ad secundum problema æque pertinet. Quare quum BD in primo casu sit $x - a$, in altero $x + a$, erit primi problematis æquatio $xx - ax = aa$, secundi vero $xx + ax = aa$: ut si in hac sumatur x negativa fiet $xx - ax = aa$ priori identica. Quum igitur hæc omnia utrique problemati sint communia, mirum esse non debet, quod ex una eademque æquatione utriusque solutio eruatur.

39. Sed ut melius cognoscant analyseos cultores, quid radicum diversitas sibi velit, atque addiscant, quo pacto diversis quasi viis ad ejusdem solutionis metam pervenire possint, aliam hic juvat eorum gratia analysim addere, quæ iisdem verbis duo æquicrura triangula respiciat, tum illud, cujus ad verticem angulus dimidium est anguli ad basim; tum illud, cujus angulus ad verticem anguli ad basim est triplus. Quæsitum triangulum sit (*Fig.* 18. 19.) A B C, basis $BC = a$, latus $BA = x$, et ducantur lineæ A M, A N ita, ut angulos faciant M A B, N A C æquales angulo B A C, eædemque lineæ producantur, donec concurrant cum B C in punctis D, E. Certum est triangula A B D, A C E fore isoscelia; ergo $AB = BD = AC = CE = x$. Similia sunt præterea triangula E A B, A B C; ergo $CB : BA :: BA : BE$, et analytice in primo triangulo $a : x :: x : a + x$, unde $aa + ax = xx$, et in triangulo altero $a : x :: x : a - x$, unde $aa - ax = xx$, quarum æquationum altera in alteram transit, accepta x negative.

40. Triangulum utrumque divisionem exhibet circumferentiæ in quinque partes. Etenim si circulo cuilibet inscribas triangulum A B C, cujus angulus A sit dimidium singulorum ex (*Fig.* 20.) angulis B, C, arcus B C erit quinta pars circumferentiæ, et A B, A C singuli duæ quintæ partes. Contra inscripto triangulo A D E, cujus angulus A sit triplus singulorum D, E, arcus A D, A E erunt singuli quinta circumferentiæ pars, & arcus D B C E tres quintas partes continebit.

41. Problema undecimum. Triangulum datum (*Fig.* 21.) A B C in data ratione $m : n$ dividere per lineam datæ parallelam. Dividatur B C in D, ut sit $BD : DC :: m : n$. Ex puncto C agatur C R parallela datæ, quæ in R incidat in A D productam. Recta G H parallela C R dividat triangulum ita, ut sit trapezium A H G B ad triangulum $CHG :: m : n$. Ex his clare consequitur, æqualia esse triangula A D C, G H C, & sublato trapezio communi C H P D, remanere æqualia triangula G D P, A H P. Problema igitur nostrum in hoc verti potest. Rectam G H parallelam C R ita ducere, ut æqualia sint triangula G P D, A H P.

42. His constitutis agantur H Q, H O parallelæ rectis A D, B C. Vocentur $AD = a$, $BD = m$, $CD = n$, $DG = x$, $DQ = HO = y$, erunt $BG = m - x$, $CQ = n - y$. Similitudo triangulorum A C D, H C Q, item H G Q, P G D duas præbet analogias $CD : DA :: CQ : HQ$; $GQ : HQ :: CD : DP$,

n:a

$n:a::n-y:\text{HQ}=\frac{an-ay}{n}$, $x+y:\frac{an-ay}{n}::x:\text{DP}=\frac{nax-axy}{nx+ny}$; ergo $\text{AP}=a+\frac{axy-anx}{nx+ny}=\frac{any+axy}{nx+ny}$. Demum vocata $\text{DR}=q$, invenies ob triangula similia GDP, CDR, DG: DP:: CD: DR, $x:\frac{nax-axy}{nx+ny}::n:q$, seu $nx+ny:na-ay::n:q$: unde mediis simul, & extremis in se ductis, et facta divisione per n, æquatio oritur prima $qx+qy=na-ay$. Alteram ut invenias, animadverte in æqualibus triangulis GPD, AHP parallelas GD, HO incidentes in bases DP, AP esse perpendicularibus, seu altitudinibus triangulorum proportionales; ergo sicuti producta basium DP, AP in perpendiculares essent æqualia, ita æqualia erunt producta earumdem basium in parallelas GD, HO, adeoque HO. AP = GD. DP, idest $y.\frac{any+axy}{nx+ny}=x.\frac{nax-axy}{nx+ny}$, seu $ny^2+xy^2=nx^2-x^2y$, seu $xy.\overline{x+y}=n.\overline{x^2-y^2}$, unde facta divisione per $x+y$, habes $xy=n.\overline{x-y}$, & $y=\frac{nx}{n+x}$. Hic valor in æquatione prima substitutus sufficiet $qx+\frac{nqx}{n+x}=na-\frac{nax}{n+x}$, ejectisque divisoribus $2nqx+qx^2=n^2a$, seu $x^2+2nx=\frac{n^2a}{q}$, quæ de more resoluta dat $x+n=\frac{n\sqrt{q+a}}{\sqrt{q}}$. Radici signum $\pm$ non apponimus, quia signum negativum problemati non inservit.

43. Ut constructionem faciamus, adverte, esse $n:x+n::\sqrt{q}:\sqrt{q+a}$, seu ut RD ad mediam proportionalem inter $\text{RD}=q$, & $\text{RA}=q+a$. Igitur inter RD, RA fac invenias mediam proportionalem RP, & per punctum P age GH parallelam CR; ab hac triangulum divisum erit in data ratione.

44. Determinationes in hoc problemate maximi momenti sunt, ac difficultatis. Agatur BE dividens AC, ut sit AE: EC:: BD: DC:: $m:n$, tum CF parallela BE. Sit I interfectio linearum AD, BE. Ajo FI esse mediam proportionalem inter FD, FA; quod ita demonstro. Ex hypothesi AE: EC:: BD: DC; atqui ex triangulorum similitudine AE: EC:: AI: IF; item BD: DC:: DI: DF: ergo AI: IF:: DI: DF, & componendo FA: FI:: FI: FD. Q. E. D. Itaque si linea triangulum dividens debeat esse parallela CF, determinanda quum sit media proportionalis inter FD, FA habebimus FI. Parallela autem rectæ CF per punctum I ducta est BIE, quæ dividit triangulum in ratione data, quod aliunde constat. Hoc determinato si CR secet AF post puncta D, F, constat, punctum P determinans RP mediam proportionalem inter RD, RA, cadere intra puncta A, I, & recta HG parallela CR transiens per punctum P cadet intra triangulum, & problema solutum exhibebit.

45. Si vero Cr secet AF inter puncta D, F, punctum p determinans mediam proportionalem inter rD, rA, cadet intra puncta D, I; igitur hg parallela rC transiens per punctum p exibit a triangulo, & præbebit externum triangulum gBu. In hoc casu linea gh non dividet triangulum in ratione data $m:n$; sed dat Auh—gBu: ghC:: $m:n$. Etenim quum sint æqualia triangula

gDp,

gDp, Aph, spatium puBD = Aph − gBu; ergo triangulum ABD = Auh − gBu; sed ABD : ABC :: m : m + n; ergo Auh − gBu : ABC :: m : m + n, & dividendo Auh − gBu : BnhC + gBu = ghC :: m : n. Q. E. D. Accusabunt post hæc fortasse analysim, quod post inventam æquationem riteque constructam quæsiti problematis solutionem non exhibeat. Videant hi potius, diligenterque perpendant, quidnam ex analysi quæsivimus. Postulavimus scilicet, quonam pacto ducenda sit GH datæ parallela, ut essent æqualia triangula GDP, AHP. Hoc obtinemus, etiamsi parallela datæ Cr extra triangulum concurrat cum CB in g; nam triangulum gDp = Aph. At si linea HG cadat intra triangulum omnis, ex æqualitate triangulorum descendit, datum triangulum ABC divisum esse in data ratione; sed si pars lineæ gh extra triangulum sit, æqualitas triangulorum idipsum non demonstrat.

46. At enim puncto r cadente intra puncta F, D, quo pacto solvendum problema? Industria opus est vel maxima, ut ex præmissa analysi, ac solutione in data ratione triangulum dividatur, si punctum r non cadat post puncta D, F. In triangulo itaque dato (Fig. 22.) ABC primum linea BC dividatur ab AD ita, ut sit BD : DC :: m : n; tum BE dividat AC, ut AE : EC :: m : n. Agatur CF parallela BE. Si linea, per cujus parallelam dividendum est triangulum concurrat cum AD post puncta D, F, ex dictis problemata accipit solutionem, & linea dividens triangulum definit in latera CB, CA. Si vero concurrat ad alteram partem puncti F, tum duc CG dividentem AB ita ut sit AG : GB :: m : n, & secantem AD in I. Lineæ autem CG sit parallela AM concurrens cum BE in M. Si linea data, cui ducenda est parallela, concurrat cum AD intra puncta F, I, hujus parallela ex puncto A ducta secabit BE ultra puncta E, M; ergo ex tradita solutione ducetur linea dividens triangulum, prout oportet, quæ consistet inter latera AB, AC.

47. Ad reliquos casus evolvendos agatur CH, ut sit BH : AH :: m : n; quæ secabit AD in L. Huic sit parallela BS. Si data linea incidit in DA post puncta D, L, huic parallela ducta ex puncto B secabit AD post puncta D, S; ergo ex tradita solutione assignabitur linea consistens inter latera BA, BC dividens in data ratione triangulum. Si vero linea data incidat intra puncta I, L, nulla adhuc habetur solutio problematis. Hoc autem ideo accidit, quia posita est CD < BD.

48. Quapropter ad complendam problematis solutionem, ita dividatur BC in O, ut sit CO : BO :: m : n, & ducatur, producaturque AO. Similiter ducta BK ita ut sit CK : KA :: m : n agatur CVu parallela BK. Si parallela datæ ducta ex puncto C cadit post puncto O, u, seu D, V, habetur una solutio, & linea dividens consistit inter latera BC, CA. Notentur puncta I, i, in quibus CG, CH secant AO. Si eadem parallela cadat intra puncta O, i, seu D, L, habetur solutio per lineam terminatam a lateribus BA, AC. Demum si cadit post puncta O, I, sive D, I, solutionem præbet linea consistens inter latera BA, BC. Adverte in spatio Ii, seu IL per secundam hanc divisionem lateris CB duplicem obtineri solutionem, in quo spatio per primam solutionem nulla habebatur. Quare in omni casu duplici modo dividi potest triangulum in ratione data. Excipe tamen hypothesim m = n, quia in hac puncta D, O, item E, K, item G, H in unum coeunt.

49. Facilius idem problema hoc modo solvitur. Sit triangulum (Fig. 23.) ABC dividendum in data ratione m : n per rectam datæ parallelam. Ex vertice B agatur BD parallela datæ, quæ secet lineam AC. Si angulus DBC major

major ſit angulo ABC, punctum ſectionis D extra triangulum cadet. Si vero angulus DBC ſit minor ABC, punctum ſectionis cadet intra triangulum. Verum in hoc caſu altero, ſi ex A agatur datæ parallela, hæc ſecabit BC extra triangulum. Quare quæ de primo caſu dicemus relate ad latus AC, applicanda erunt in ſecundo caſu ad latus BC. Dividatur AC in M in ratione $m:n$, & inter DC, CM inveniatur media proportionalis CG. Si ex puncto G agatur GZ parallela BD, hæc in ratione data triangulum dividet. Nam ſimilia triangula DBC, GZC præbent
CD: CG:: CB: CZ; atqui ex conſtructione
CD: CG:: CG: CM; ergo ex rationum æqualitate
CG: CM:: CB: CZ; ergo triangula GCZ, BCM latera reciprocantia circa eumdem angulum C erunt æqualia; igitur ſi ex toto triangulo ABC demas triangula GCZ, BCM æqualia, remanebit trapetium ZBAG æquale triangulo ABM; atqui CBM: ABM eſt in ratione data; ergo GCZ: ZBAG erit in data ratione. Q.E.D.

50. Ut externa triangula vitentur, fiat CD: CA:: CA: CX. Si CM < CX, patens eſt, fore CG < CA; quare conſtructio in nullum triangulum externum incidit. Si CM = CX, etiam CG = CA; quare AR datæ parallela problema ſolvit. Si vero Cm > CX, agatur recta AR parallela datæ BD, & mN parallela AB; tum inter duas BR, BN inveniatur media proportionalis Bg, demum ex g ducatur gy parallela datæ. Sine ullo triangulo externo formabitur triangulum Bgy, quod æquale erit triangulo ABN, atque adeo per gy dividetur triangulum in ratione data. Demonſtratio eadem eſt cum ſuperiore. Satis eſt, elegantem hanc ſolutionem indicaviſſe, ex qua eædem profluunt determinationes, quas in prima ſolutione oſtendi fuſius.

51. Problema duodecimum. Dato extra triangulum (*Fig.* 24. 25.) BAC puncto P, ex eo ducere PQX, quæ triangulum in data ratione dividat. Per punctum P ad duo latera AB, BC producta, inter quæ punctum ipſum exiſtit, ducatur MPN parallela lateri AC, & ſupponamus PQX eſſe lineam, quæ problema ſolvit, ſcilicet qua ducta habemus triangulum CQX ad reliquum ſpatium XQBA in ratione data; ſit CX $= x$, PM $= a$, CM $= b$. Quoniam datum eſt triangulum CAB, & data ratio, quam habet ad CQX, hoc quoque determinatum erit. Fieri igitur poteſt huic æquale triangulum ſuper CM in dato angulo BCA. Cognitum igitur erit hujuſce trianguli latus aliud, quod voco $= c$; ergo quia æqualium triangulorum latera circa æquales angulos reciprocantur, erit CQ $= \frac{bc}{x}$. Ex ſimilitudine triangulorum CQX, MQP valebit analogia $a \pm x : x :: b : \frac{bc}{x} :: x : c$ ($a + x$ pertinet ad figuram 24, $a - x$ ad 25); ergo $xx \mp cx = ac$, qua æquatione reſoluta fit $x = \pm \frac{c}{2} \pm \sqrt{ac + \frac{cc}{4}}$.

Quatuor ex ſignorum ambiguitate ſunt valores x, quorum duo, in quibus $\frac{c}{2}$ afficitur ſigno + ad 24 figuram pertinent, reliqui ad 25. At quum ſemper ſit $\sqrt{ac + \frac{cc}{4}} > \frac{c}{2}$, duo valores, in quibus radicalis quantitas negativè ſumitur, negativi ſint oportet, adeoque problemati non inſerviunt, quia x accipienda eſſet in parte triangulo averſa. Itaque producta AC in F, donec ſit

CF

$CF = a + \frac{c}{4}$, super CF describatur semicirculus, factaque $CG = c$, erigatur normalis GT, constat CT fore mediam proportionalem inter CF, CG adeoque $= \sqrt{ac + \frac{cc}{4}}$. Huic si addatur in fig. 24 $TH = \frac{c}{2}$, erit $CH = \frac{c}{2} + \sqrt{ac + \frac{cc}{4}}$, si in fig. 25 detrahatur, fiet $CH = -\frac{c}{2} + \sqrt{ac + \frac{cc}{4}}$. Abscinde $CX = CH$, erit X punctum, ad quod recta ducta ex P solvet problema.

52. Verum accidere hic etiam potest, quod in superiore problemate monuimus, ut hi valores aliquando problema non solvant. Finge enim punctum X cadere in 2X ita, ut ducta P2X oriatur triangulum externum SB2Q; tunc quidem erit triangulum C2Q2X ad AS2X — BS2Q in data ratione; at in eadem ratione divisum non erit triangulum CBA, quod problema postulat. Ut hoc incommodo liberemur, ducatur per puncta P, B recta PBR. Jam vero constat triangulum externum haberi non posse, nisi quum sit $CX > CR$. Id igitur si eveniat, paucis mutatis rem conficiemus. Nempe convertemus animum ad rectas AN, PN, super AN triangulum faciemus dato æquale, & in angulo BAC, & reliqua eodem, quo antea, modo peragemus; unde solutio priori omnino similis orietur, cui externi trianguli damna non timebimus. Posito triangulo BCR minori quam BAR, & majori quam CQX, patet, duas locum habere solutiones, quia duo hinc inde fieri possunt æqualia triangula CQX, AS2X. Si punctum P incidat in lineam AN aut CM, evidens est, numquam triangulo externo locum esse. Si punctum P cadat intra triangulum, eadem ferme methodo solutio perficietur, quam tamen aliorum industriæ relinquo.

53. Problema decimumtertium. Dato quadrato (*Fig.* 26.) ABCD, ejusque latere DC indefinite producto, rectam ducere AFE ita, ut FE intercepta sit datæ rectæ æqualis. Esto factum, & ex E demittatur normalis EH ad AB productam, sitque ad AE perpendicularis EG. Notum est, triangula ABF, EHG similia esse, & æqualia ob æqualia latera AB, EH; ergo $HG = BF$, & $EG = AF$. Vocemus $AB = a$, $FE = b$, $BG = x$, $AF = y$, erunt $AG = a + x$, & $AE = b + y$; sed $AG^2 = AE^2 + EG^2$; ergo in promptu erit æquatio $aa + 2ax + xx = bb + 2by + 2yy$. Præterea similitudo triangulorum ABF, AEG præbet analogiam $AB : AF :: AE : AG$, seu $a : y :: b + y : a + x$; ergo $aa + ax = by + yy$. Hanc æquationem multiplicatam per 2 a prima subtrahamus, ut fiat $-aa + xx = bb$, seu $x = \pm\sqrt{aa + bb}$.

54. Produc DC in L, donec fit $CL = b$, & junge BL, cui æquales abscinde BG, B2G. Super duabus AG, A2G duos describe semicirculos, & scito puncta omnia, in quibus hi rectam DC secant, problema solvere. Hæc vero puncta quatuor quum sint, videlicet E, 2E, 3E, 4E, quatuor quoque erunt solutiones, & interceptæ $= b$, nimirum FE in angulo BCE; 2F2E in opposito angulo DC2F; 3F3E, 4F4E ambæ in angulo DCB. Problema igitur ad quartum gradum vere pertinet, quod etiam ostendisset æquatio, si BF pro incognita x assumpta fuisset. Hujus rei ratio est, quod quatuor esse possint valores BF, dum contra valores BG non nisi duo sunt, manentibus

tibus tamen quatuor solutionibus, uti vidimus. Hinc potest facile percipi, quanta sit aliquando opus industria in incognita constituenda, quum ex ea interdum pendeat æquationis gradus. Nos hic ad secundi gradus æquationem devenimus, quæ quarti gradus æquationis vices sustinet, quia uterque incognitæ valor duplicem intersectionem, atque adeo solutionem duplicem exhibet.

55. Animadvertendum nunc est, binas solutiones, quas suppeditat semicirculus, cujus diameter est AG, nunquam posse deficere. Quum enim sit $AG = \sqrt{aa+bb}+a$ semper major quam $2a$, semicirculus in duobus punctis rectam DC productam necessario secabit. At non idem accidit alteri semicirculo; etenim quum $\sqrt{aa+bb}-a$, cui æqualis est diameter A2G, possit esse vel major, vel æqualis, vel etiam minor quam $2a$, hinc fiet, ut aliquando semicirculus in duobus punctis lineam secet, & duæ sint solutiones, aliquando eam tangat, adeoque unicam præbeat solutionem, aliquando tandem omnino fugiat, & solutio quælibet imaginaria, seu nulla sit.

56. Determinatio casus medii, a quo reliqui duo pendent, facile obtineri potest. Is siquidem postulat, ut sit $\sqrt{aa+bb}-a=2a$; ergo $aa+bb=9aa$, seu $bb=8aa$, unde $b=2a\sqrt{2}$; atqui $2a\sqrt{2}$ est dupla diagonalis quadrati dati; ergo si data erit linea b æqualis duplæ diametro quadrati ABCD, tunc semicirculus diametri A2G latus DC productum tanget, & punctum contactus determinabit minimam rectam, quæ in angulo BCD per punctum A duci possit. Si vero b sit major dupla diametro, necesse est, semicirculum in duobus punctis secare CD, & duas præbere solutiones; si minor, constat intersectionem nullam haberi, adeoque nullam solutionem.

57. Eadem exhiberi potest methodus, etiamsi (*Fig.* 27.) ABCD non quadratum fuerit, sed rombus. Ducenda nempe erit EG, ut angulus AEG = ABC, tum EH, ut EHG = ABC, unde sequitur EH = AB; demum EM sit normalis AB. Constat, ea triangula, quæ similia, aut æqualia erant in hypothesi quadrati, nunc quoque esse similia, & æqualia; ergo eædem valebunt analogiæ, si easdem retineas denominationes. Vocetur præterea MH $=c$. Evidens est, $AG^2-2AG.MH=AE^2+GE^2$, sive analytice $aa+2ax+xx-2ac-2cx=bb+2by+2yy$. Altera æquatio eadem manet, scilicet $aa+ax=by+yy$. Hæc multiplicata per 2 deducatur a prima, ut reliqua sit $-aa+xx-2ac-2cx=bb$; ergo $xx-2cx+cc=bb+\overline{a+c}^2$, unde $x-c=\pm\sqrt{bb+\overline{a+c}^2}$.

58. Ex analysi hæc profluit constructio; a puncto C si demittatur perpendicularis CP, erit BP = MH, & $AP=a+c$; igitur accepta PQ = AP, eique perpendiculari ducta $QL=b$, si jungas PL, hæc $=\sqrt{bb+\overline{a+c}^2}$. Cape ergo PG, P2G = PL, & habebis duos valores $x-c$. His effectis super AG describatur segmentum circuli capiens angulum dato ABC æqualem. Hoc rectam DC in duobus punctis secabit E, 2E, quæ, ut supra advertimus, duas dabunt problematis solutiones.

59. Idem faciendum est super A2G, ut solutiones reliquas obtineamus. Verum dubium oritur, utrum segmentum describendum angulum continere debeat ABC, an potius complementum ad duos rectos. Id ut palam fiat, atten-

te

te constructionem superiorem consideremus. Duximus rectam EG ita, ut esset angulus AEG = ABF; ergo posita recta 4E4F = b, ducenda erit 4E2G ita, ut sit angulus A4E2G = AB4F; sed hic est angulus complens duos rectos cum angulo ABC; ergo tale debebit esse segmentum describendum super A2G, ut angulum contineat æqualem complemento anguli ABC ad duos rectos, cujus segmenti intersectiones cum CD producta reliquas solutiones problematis exhibebunt.

60. Problema decimumquartum. Dato circulo (*Fig.* 28.) ABP, illius chorda AB, in eaque punctis duobus K, D, invenire punctum P, unde ductis PKN, PDM, & juncta MN, hæc sit chordæ AB parallela. Hoc ad illud problematum genus spectat, quæ per speciosam analysim haud ita facile est solvere, alia methodo solvuntur facillime. Verum ut ista legentibus notum sit, quantum industria valeat, opportunum esse duximus, quo melius eorum progressui consuleremus, algebraicam solutionem hujus problematis exhibere. Existimemus factum, quod postulatur, sitque RS diameter parallela chordæ datæ AB, in eamque demittantur normales NL, MO, PI, quæ secent chordam in punctis F, G, E. Ex centro C perpendicularis diametro RS erigatur CT, quæ chordas omnes eidem diametro parallelas bifariam partitur. Sint circuli radius $= r$, HD $= n$, KH $= m$, CH $= a$, CL = CO $= x$, LN = QM $= y$, CI $= z$, PI $= q$. Hinc erunt FK $= x - m$, DG $= x - n$, PE $= q + a$, DE $= n - z$, KE $= m + z$, NF = MG $= y - a$. His positis ex circuli natura, quæ nos monet quadratum sinus æquare rectangulum segmentorum diametri, ultro se nobis offerunt æquationes duæ $r^2 - x^2 = y^2$, $r^2 - z^2 = q^2$. Similia triangula PEK, NFK dant PE:EK::NF:FK, seu $q + a : m + z :: y - a : x - m$; tum triangula PED, MGD pariter similia dant PE:ED::MG:GD, aut $q + a : n - z :: y - a : x - n$; quas analogias si inter se comparemus notum fiet, esse $m + z : n - z :: x - m : x - n$, & componendo $m + n : n - z :: 2x - m - n : x - n$; ergo $n - z = \frac{mx + nx - mn - nn}{2x - m - n}$, seu $z = n + \frac{mn + nn - mx - nx}{2x - m - n} = \frac{\overline{n-m}\cdot x}{2x - m - n}$. Si hunc valorem in prima analogia substituamus, fiet $q + a : m + \frac{\overline{n-m}\cdot x}{2x - m - n} :: y - a : x - m$, idest consequentibus multiplicatis per $2x - m - n$, divisisque per $x - m$, $q + a : m + n :: y - a : 2x - m - n$; ergo $q = \frac{my - ma + ny - na}{2x - m - n} - a = \frac{\overline{m+n}\cdot y - 2ax}{2x - m - n}$, & quadrando $q^2 = \frac{\overline{m+n}^2\cdot y^2 - 4axy\cdot\overline{m+n} + 4a^2x^2}{\overline{2x - m - n}^2}$. In hanc formulam introducantur valores q^2, y^2 ex duabus primis æquationibus eruti, & orietur $r^2 - z^2 = \frac{\overline{m+n}^2\cdot r^2 - x^2 - 4axy\cdot\overline{m+n} + 4a^2x^2}{\overline{2x - m - n}^2} = r^2 - \frac{x^2\cdot\overline{n-m}^2}{\overline{2x-m-n}^2}$, posito nempe pro zz ejus valore paullo ante invento. Hæc vero æquatio, si liberetur

tur a diviſoribus, in ſequentem mutatur $4r^2x^2 - 4mr^2x - 4nr^2x + m^2r^2 + 2mnr^2 + n^2r^2 - n^2x^2 + 2mnx^2 - m^2x^2 = m^2r^2 + 2mnr^2 + n^2r^2 - m^2x^2 - 2mnx^2 - n^2x^2 - 4maxy - 4naxy + 4a^2x^2$; deletiſque terminis, qui eliduntur $4r^2x^2 - 4a^2x^2 + 4mnx^2 - 4mr^2x - 4nr^2x = -4maxy - 4naxy$, & dividendo per $4x$, $r^2 - a^2 + mn \cdot x - mr^2 - nr^2 = -ay \cdot \overline{m+n}$, ſive $\frac{r^2 - a^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2 - ay$. Quoniam vero $r^2 - a^2 = AH^2$, ſi vocetur AH $= b$, erit $\frac{b^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2 - ay$. Qui præcedentes æquationes ita tractaſſet, ut incognitæ ſupereſſent z, q, is habuiſſet $\frac{b^2 - mn}{n - m} \cdot z = rr + aq$.

61. Utraque formula non ineleganter conſtrui poteſt; ſed primam attentius inſpiciamus, curemuſque, ut expeditior etiam, ſi fieri poteſt, evadat. Manifeſtum eſt inter coſinum, & ſecantem medium proportionalem eſſe radium; ſed coſinus arcus AT eſt CH $= a$; ergo ſi vocemus ſecantem $= s$, erit $rr = as$. Pariter quum ſinus AH $= b$ ſit medius proportionalis inter coſinum & ſecantem coſinu diminutam, erit $bb = as - aa$. Hiſce igitur valoribus in formula ſubſtitutis, habebimus $\frac{as - a^2 + mn}{m+n} \cdot x = as - ay$, ſeu $m+n : s - a + \frac{mn}{a} :: x : s - y$. Hinc ad conſtructionem gradum facientibus primo quærenda eſt quarta proportionalis poſt CH, HK, HD, quæ invenitur juncta CK, & ducta DV ita, ut angulus HDV æquet angulum KCH; patet enim, tunc fore HV $= \frac{mn}{a}$. Compleatur jam parallelogrammum KDVX, & ſit AZ tangens circuli diametro CT productæ occurrens in Z. Erit CZ ſecans arcus AT, quam vocavimus $= s$, & ZV $= s - a + \frac{mn}{a}$, & XV $= m + n$. Ducatur recta ZX; punctum, in quo ea circumferentiam ſecat, erit punctum quæſitum, & NQ diametro perpendicularis $= x$, QC $= y$; habebimus enim XV : VZ :: NQ : QZ, ſeu $m+n : s - a + \frac{mn}{a} :: x : s - y$; adeoque ſi recta ducatur per puncta N, K, ea in circumferentia punctum P determinabit, quod problemati ſatisfaciet. Quia linea ZX ſi circumferentiam ſecat in puncto N, neceſſe eſt, ut illam ſecet alio etiam in puncto n, ideo duplicem ſolutionem fore cognoſcimus; recta enim per n, K ducta in circuli peripheria punctum aliud aſſignaret puncto P analogum.

62. Conſtructio non deficit, etiamſi puncta K, D data ſint extra circulum; at deficit, ſi ipſa jaceant in diametro AB; in hac enim hypotheſi habemus $a = o$, $s = \infty$. Revertamur ergo ad formulam $\frac{b^2 + mn}{m+n} \cdot x = r^2 - ay$, & nonnulla advertamus. Quoniam $a = o$, evaneſcit terminus ay, & evadit $b = r$; igitur

igitur formula nostra in hanc vertitur $\frac{r^2+mn}{m+n}.x=r^2$, quæ facta $mn=pr$, in hanc transit $x=r.\frac{m+n}{r+p}$. Itaque juncta (*Fig.* 29.) KT, & ducta DV in angulo CDV=CTK, constat fore CV$=p$. Compleatur parallelogrammum KDVX, & jungatur XT secans AB in F. Per F normarlis diametro AB excitetur Nn. Puncta N, n ea sunt, per quæ habetur solutio. Nam triangula similia dant TV:VX::TC:CF, sive $r+p:m+n::r:x$, ut necesse erat.

63. Quamvis haud ineleganti constructione problema solvimus, tamen si alia utamur methodo multo potest solvi elegantius. Aliam itaque constructionem indicabimus, ut discant studiosi non illud tantum curare, ut quod propositum est assequantur, sed ut assequantur etiam quam maxime fieri potest eleganter. Ex puncto (*Fig.* 30.) T, quod bifariam partitur arcum ATB, si ducatur TP, ea in duas partes æquales dividet angulum NPM, & AB secabit in H ita ut sit KH:DH::PK:PD. Scimus esse PD.DM=AD.DB, item PK.KN=AK.KB; ergo descripto super AB semicirculo AGB, erectisque ordinatis KF, DG, quarum quadrata sunt rectangulis AK.KB, AD.DB respective æqualia, valebit

$PK.KN:PD.DM::KF^2:DG^2$; sed ex similitudine triangulorum

$PK:PD::KN:DM$; ergo $PK^2:PD^2::KF^2:DG^2$, &
PK:PD::KF:DG: atqui PK:PD::KH:DH; ergo
KH:DH::KF:DG. Dividenda igitur est recta KD in ratione data KF:DG. Quod ut præstes, sufficit producere GD in E, ut sit DE=GD, & ducere FE; quod est evidens ex triangulorum similitudine. Itaque si ex T per H, in quo puncto FE secat KD, ducatur recta, hæc determinabit punctum P, ex quo ductis PKN, PDM, erit MN datæ chordæ AB parallela. Si ex t vertice arcus APB, rectam aliam ducas per H, determinabitur in circumferentia punctum alterius solutionis. Si recta AB esset diameter, constructio facilior evaderet; tunc enim semicirculus AGB cum ATB coincideret. Quum vel utrumque, vel alterutrum ex punctis datis extra circulum cadit, tum loco ordinatarum ad semicirculum AFB, quæ impossibiles fiunt, ad eumdem tangentes ducendæ essent, & ratiocinio eodem perficienda constructio.

64. Verum elegantissima omnium est solutio, quam attulit Pappus. Ea est hujusmodi. Ex puncto (*Fig.* 31.) N ducatur tangens NL concurrens cum data chorda producta in puncto L. Certum est angulum LNK=NMP=KDP; ergo similia sunt triangula LNK, PDK; ergo LK:KP::NK:KD, & LK.KD=NK.KP; sed NK.KP=AK.KB; igitur LK.KD=AK.KB, unde KD:AK::KB:LK. Jam perfecta res est; quum enim tres primi termini dati sint, quartus determinatur, quo habito si ex L ducatur ad circulum tangens LN, determinabitur N. Tangens altera Ln secundæ solutioni servit. Hæc methodus locum habet, seu in diametro, seu extra circulum data sint puncta.

65. Problema decimumquintum. Ex dato puncto D (*Fig.* 32.), quod situm est in trianguli BAC latere CB producto, ducere lineam DNM, ut triangulum DNB: ANM sit in data ratione $m:n$. Quoniam anguli DNB, ANM æquales sunt, erit triangulum DNB:ANM, aut $m:n$ in ratione DN:NM. Ex puncto D
composita BN:NA
duc DE parallelam BA, quæ cum CA producta concurrat in E, & ex A duc AF

AF parallelam BC, quæ concurrat in F cum DM producta. His factis ob triangula similia constat esse DN : MN :: EA : AM, præterea BN : NA :: DB : AF; ergo rationibus substitutis erit $m : n$ in ratione EA : AM composita DB : AF; atqui ex similitudine triangulorum DMC, AMF habemus DC : MC :: AF : AM, unde $AF = \frac{DC.AM}{MC}$; ergo $m : n$ in ratione EA : AM composita DB : $\frac{DC.AM}{MC}$; ergo $\frac{m.DC.AM^2}{MC} = n.EA.DB$, sive $AM^2 = \frac{n.EA.DB.MC}{m.DC}$; sed DC : DB :: EC : EA, adeoque $\frac{DB}{DC} = \frac{EA}{EC}$; ergo substitutione facta $AM^2 = \frac{n.EA^2.MC}{m.EC}$. Abscinde EG tertiam proportionalem post EC, EA, ut sit $EG = \frac{EA^2}{EC}$, & fac $m : n$ :: EG : AL; ita habebis $AL = \frac{n.EG}{m} = \frac{n.EA^2}{m.EC}$. Quapropter inventa æquatio in hanc vertetur $AM^2 = AL.MC$. Vocetur $AC = a$, $AL = b$, $AM = x$, unde $MC = a - x$; igitur æquatio analytice erit $x^2 = b.\overline{a - x}$, seu $x^2 + bx = ab$, cui eleganter accomodari potest methodus P. Rabuelis, quam superiori capite tradidimus.

66. In angulo quovis ducatur $AH = AC = a$, abscindatur $HI = AL$, & per tria puncta A, L, I circulus describatur, cui alter circulus sit concentricus transiens per punctum H. Circulus iste secabit AC in punctis M, P, quorum primum est inter puncta C, A, alterum post ipsa, & utrumque exhibet solutionem. Ut expeditior constructio fiat, sit AH normalis AC, jungaturque LI, quæ bifariam dividatur in K. Patet, hoc punctum esse centrum circuli transeuntis per puncta L, A, I. Quare si centro K radio KH circulus describatur, hic per duplicem intersectionem cum linea AC duplicem solutionem dabit.

67. Analysim, & constructionem hæ determinationes sequuntur. Si n, atque adeo $b = o$, duæ solutiones in unam abeunt, punctis M, P cum puncto A coeuntibus. Si n sit quantitas positiva, punctum M, quod radicem positivam determinat, semper cadit inter A, C, neque ad C perveniet, nisi quum n est infinita. Punctum vero P, a quo radicis negativæ magnitudo dependet, cadit intra A, E, si $n < m$; cadit in E, si $n = m$; cadit ultra puncta A, E, si $n > m$, & ad distantiam progreditur infinitam, facta n infinita. Quod si n, adeoque etiam b esset quantitas negativa, problema esset impossibile, & utraque solutio imaginaria, si $b < 4a$; duæ solutiones in unam coeunt, si $b = 4a$; si $b > 4a$, uterque valor x est $> a$, alter vero $< 2a$, alter $> 2a$. Tandem si b infinita sit, intersectionum alia erit in puncto C, alia in puncto infinite remoto.

68. Ut qui analysim colunt, diversis modis problema tentare discant, aliam propositi problematis solutionem placet addere, quæ nobis videtur elegantissima. Ex dato puncto (*Fig.* 33) D ducatur DV parallela AC, quæ secet AB productam in V. Divisa bifariam BV in X, describatur centro X circulus

BSV,

BSV, & ratio data sit ut $BX^2 : AR^2$, quæ AR statuatur in puncto A normalis AB. Ex R ducatur tangens circuli RS, hæc secabit AB in aliquo puncto N, per quod si ex D transeat linea DNM, obtinebimus triangula $DNB : ANM :: BX^2 : AR^2$.

69. Etenim $DNB : DNV :: NB : NV :: NS^2 : NV^2$; sed $DNV : ANM :: NV^2 : NA^2$; ergo ex æquo $DNB : ANM :: NS^2 : NA^2$; sed propter similitudinem triangulorum NSX, NAR est $NS : NA :: SX = BX : AR$; ergo $DNB : ANM :: BX^2 : AR^2$. Quod spectat ad determinationes; quæcumque sit longitudo lineæ AR, si ex puncto R ducatur tangens in semicirculum BSV, hæc secabit AB inter puncta A, B, ac proinde M cadet inter puncta A, C ita, ut si AR sit nulla, puncta M, N cadent in A, & si infinita, punctum N cadet in B, & M in C. Sed quoniam ex eodem puncto R duci tangens potest etiam ad semicirculum B 2 S V, per tangentem R 2 S aliam obtinebis problematis solutionem. Si AR minor est radio XB, tangens R 2 S secabit AB productam post puncta B, A, ut in 2 N, cadente interea puncto M post puncta C, A ut in 2 M. Verum si AR radio circuli sit æqualis, quum tangens R 2 S fiat parallela lineæ AB, punctum 2 N in infinitum recedet, punctum vero 2 M manebit in distantia finita; sed nihilominus triangulum utrumque infinitum evadet. Denique si RA major sit radio circuli, tangens R 2 S secabit AB post puncta B, V, & punctum 2 M situm semper erit post puncta C, A ita, ut si AR infinita sit, ipsum quoque in infinitum abeat, cadente in ea hypothesi puncto 2 N in V.

70. Quamvis vel maxime elegans visa sit nobis hæc solutio; suspicio tamen aliqua suborta est, per illam non omnino exhauriri problema, quum viderimus, punctum intersectionis N nunquam cadere posse in partem BV lineæ AB productæ, quia tangens non potest intra circulum secare diametrum. Atqui ducta ex puncto D linea secante AB intra puncta B, V, oriri possunt triangula duo, quæ datam rationem habeant. Res digna erat inquisitione. Ducta itaque, ut antea (*Fig.* 34.) DV parallela AC, quæ secet AB in V, descripto supra BV semicirculo BSV, acceptaque quacumque AT, cui normalem constituamus TR ita, ut sit $TR^2 : TA^2$ in ratione data, jungamus AR, quæ producta secet circulum in puncto S. Dicimus, ordinatam SN normalem diametro punctum N determinare, per quod ducta DNM fit triangulum $DNB : ANM :: TR^2 : TA^2$. Demonstratio. Triangulum $DNB : DNV :: BN : NV :: SN^2 : NV^2$; sed triangulum $DNV : ANM :: NV^2 : AN^2$; ergo ex æquo $DNB : ANM :: SN^2 : NA^2 :: TR^2 : TA^2$. Q.E.D.

71. Quoniam AS producta circulum secat in alio puncto 2 S, illinc secundam solutionem haberi constat. Verum solutiones non semper sunt possibiles. Nam si fuerit $AR : TR :: AX : BX$, patet AR fore tangentem circuli, quo in casu duplex solutio in unam coit. Si TR fuerit major, AR circulum non secat, adeoque solutio utraque imaginaria. Demum si TR fuerit minor duplex erit intersectio, & duplex solutio; & ipsæ intersectiones fient in punctis B, V, si $TR = 0$. In hac solutione punctum N, per quod DM est ducenda, semper cadit inter puncta B, V. Quare si hæc cum priore conjungatur, omnia,

quæ-

quascumque problema nostrum suscipit solutiones, obtinebuntur. Hinc discant geometriæ cultores, quam diligenter sint illis omnia circumspicienda, antequam pronuncient, adhibitam constructionem undequaque perfectam esse, & problematis solutiones omnes exhibere.

72. Problema decimumsextum. In circuli dati (*Fig.* 35.) MBN peripheria punctum B reperire, ex quo ductæ rectæ BM, BCX, BN, quarum duæ ad extrema datæ chordæ puncta tendunt, tertia per centrum ad chordam pervenit, sint in continua proportione. Ex puncto B in datam chordam demittatur perpendicularis BV, producatur BX in I, jungaturque IN, & ex centro C ducatur normalis CS. Triangula duo rectangula BVM, BNI similia sunt, quia anguli in M, I eidem arcui insistentes sunt æquales; ergo BV : BM :: BN : BI; ergo BV . BI = BM . BN = BX^2 ex conditione problematis; ergo BI : BX :: BX : BV :: CX : CS. Sit jam CX = y, BI = $2a$, CS = c, unde BX = $a + y$. Ita erit analogia $2a : a + y :: y : c$; ergo $2ac = y^2 + ay$, & $\overline{y + \frac{a}{2}}^2 = 2ac + \frac{aa}{4}$, adeoque $y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{2ac + \frac{aa}{4}}$.

73. Ut valores geometricos constituas, divide radium utrumque (*Fig.* 36.) CA, CZ bifariam in P, Q, & accepta OQ = $2c + \frac{a}{4}$, super QP fac semicirculum QTP; constat, normalem OT fore = $\sqrt{2ac + \frac{aa}{4}}$; ergo si centro O intervallo OT determines in linea AQ puncta L, l, habebis CL = $\sqrt{2ac + \frac{aa}{4}} - \frac{a}{2}$, & Cl = $-\sqrt{2ac + \frac{aa}{4}} - \frac{a}{2}$, hoc est utrumque valorem y. Primo valore si utaris, & puncta X, X invenias ita, ut CX = CL, hæc puncta intra circulum cadent; at si utaris altero, puncta x, x extra circulum sita erunt. De primis ut dicamus, & quidem de uno tantum (ex alio enim solutio provenit omnino priori analoga) per (*Fig.* 35.) X ducatur CX. Hæc producta designat in circumferentia punctum B, unde ductæ BM, BX, BN sunt continue proportionales. Verum advertendum est CX productam non solum secare circumferentiam in B, sed etiam in I. Quid huic intersectioni cum problemate nostro? an aliam indicat solutionem? Minime sane; imo ad aliud longe diversum problema pertinet, ad illud scilicet in quo quis postularet in circumferentia locum I, unde ducta diametro ICB secante datam chordam MN in X, junctisque IM, IN, esset IM : IX :: BX : IN: quod ita demonstramus. Quoniam CX = $y = \sqrt{2ac + \frac{aa}{4}} - \frac{a}{2}$, erit $y + \frac{a}{2} = \sqrt{2ac + \frac{aa}{4}}$, & $y^2 + ay = 2ac$; ergo $2a : a + y :: y : c$, seu IB : BX :: CX : CS; sed ducta normali IH est CX : CS :: IX : IH; ergo IB : BX :: IX : IH; sed triangula IHM, IBN rectangula in H, N habent præterea angulos IMH, IBN æquales, utpote eidem arcui insistentes; sunt igitur similia; ergo IM : IX :: BX : IN. Solum igitur punctum B problemati proposito inservire potest.

74. Nunc si puncta (*Fig.* 36.) x, x, quæ extra circulum cadunt, inspiciamus, linea CX secat pariter circumferentiam in punctis duobus B, I. At quodnam eorum

eorum solvit problema nostrum, quodnam illud, de quo modo egimus? Si animadvertas esse $CI = \frac{a}{2} + \sqrt{2ac + \frac{aa}{4}}$, eodem, quo supra, ratiocinio reperies, punctum B, quod propius est chordæ MN, dare tres lineas BM, BX, BN continue proportionales, ex remotiore vero I haberi analogiam $IM : Ix :: Bx : IN$. Si quis vellet $OT = \sqrt{2ac + \frac{aa}{4}}$ invenire ope solius dati circuli ZBA, is possit hoc pacto id assequi: fiat, ut $PQ : PO ::$ (*Fig.* 35.) $ZA : AR$, & ex R normali RD erecta, ducatur AD, quæ producatur, donec in E occurrat perpendiculari erectæ ex centro circuli C. Erit $CE =$ (*Fig.* 36.) OT.

75. Non erit inutile secundam addere solutionem. Ex B (*Fig.* 37.) ducatur BH diametro ZA perpendicularis. Sit radius $= a$, $MS = b$, $CS = c$, $CH = x$, $HB = y$. Constat, has haberi æquationes $aa = bb + cc$, $aa = xx + yy$, & ex similitudine triangulorum CHB, CSX esse $BX = \frac{a \cdot \overline{c+x}}{x}$. Est præterea

$$BM = \sqrt{\overline{c+x}^2 + \overline{b+y}^2} = \sqrt{\begin{matrix} cc + 2cx + xx \\ bb + 2by + yy \end{matrix}} = \sqrt{2aa + 2cx + 2by}.$$ Pariter

$$BN = \sqrt{\overline{c+x}^2 + \overline{b-y}^2} = \sqrt{\begin{matrix} cc + 2cx + xx \\ bb - 2by + yy \end{matrix}} = \sqrt{2aa + 2cx - 2by};$$ ergo

$BM.BN = 2\sqrt{a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 - b^2y^2}$, in qua pro yy substitue $aa - xx$, ut sit

$$BM.BN = 2\sqrt{\begin{matrix} a^4 & + 2a^2cx + c^2x^2 \\ -a^2b^2 & + b^2x^2 \end{matrix}} = 2\sqrt{a^2c^2 + 2a^2cx + a^2x^2} = 2a.\overline{c+x}$$

atqui conditio problematis postulat, ut $BM.BN = BX^2 = \frac{a^2 . \overline{c+x}^2}{x^2}$: ergo provenit æquatio $2a.\overline{c+x} = \frac{a^2 . \overline{c+x}^2}{x^2}$, seu $2x^2 - ax = ac$, quæ de more resoluta præbet $x = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a}{4} . \frac{a}{4} + 2c}$.

76. Hanc analyticam resolutionem constructio sequitur valde simplex. Centro (*Fig.* 38.) S intervallo SC circulum describe, & accepta $CL = \frac{1}{4} CZ$, duc LF tangentem. Patet, hanc fore $= \sqrt{\frac{a}{4} . \frac{a}{4} + 2c}$; ergo si capias $LH = Lh = LF$, erunt CH, Ch incognitæ nostræ valores. Quare ductis per puncta H, h normalibus, determinabuntur duo puncta B, 2B, item b, 2b, quæ propositum problema solvunt.

77. Problema, quo punctum (*Fig.* 37.) I tale quærimus, ut sit $IM.IN = IX.BX$, eadem fere analysi resolvi potest. Ducatur IK parallela datæ chordæ, & vocetur $CK = x$, $KI = y$, reliquis ut supra denominationibus retentis.

tis. Quoniam eſt CK:CI::CS:CX, ſeu $x:a::c:CX = \frac{ac}{x}$, erit $IX = a.\frac{\overline{x-c}}{x}$, $BX = \frac{a.\overline{x+c}}{x}$, & rect. $IX.BX = \frac{a^2.\overline{x^2-c^2}}{x^2}$. Præterea

$$IM = \sqrt{\overline{x-c}^2 + \overline{b-y}^2} = \sqrt{c^2 - 2cx + xx + b^2 - 2by + yy} = \sqrt{2aa - 2cx - 2by}.$$ Item

$$IN = \sqrt{\overline{x-c}^2 + \overline{b+y}^2} = \sqrt{c^2 - 2cx + xx + b^2 + 2by + yy} = \sqrt{2aa - 2cx + 2by}:$$ ergo

$$IM.IN = 2\sqrt{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 - b^2y^2} = 2\sqrt{a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 - a^2b^2 + b^2x^2}$$

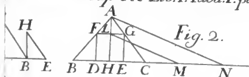
$$= 2\sqrt{a^2c^2 - 2a^2cx + a^2x^2} = 2a.\overline{x-c}:$$ ergo ex problematis conditione $2a.\overline{x-c} = \frac{a^2.\overline{x^2-c^2}}{x^2}$, ſeu $2x^2 - ax = ac$. Quæ æquatio ſimilis omnino eſt præcedenti: quare x in hoc problemate illis æquales ſunt, quas ſupra invenimus, neque ab illis differunt niſi poſitione; has enim in oppoſitam partem accipere neceſſe eſt. Quum ſolutio hæc duo diverſa problemata non permiſceat, hac de cauſſa priori videtur anteferenda.

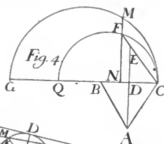
CAPUT DECIMUM.

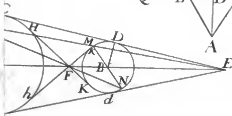
Principia Calculi ſinuum, & coſinuum, ejuſque uſus.

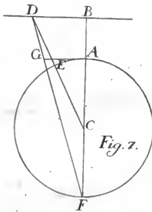
CL. Eulerus omnium primus ſinus, coſinus, aliaſque lineas trigonometricas in analyſim introduxit, iiſque in multis inventu ſane difficillimis plurimum, feliciterque uſus eſt. Novum hunc calculum utilitate permoti, quæ in eo eſt maxima, gentium omnium præcipui Analyſtæ, tanti viri veſtigiis inſiſtentes, cupide ſequuti ſunt. Nos etiam deinceps eo utemur ſæpiſſime; ideoque illius principia hic tradere, ac demonſtrare, neceſſe eſt.

1. Eſto circulus quicumque ANBM, in cujus centro (*Fig.* 1.) C diametri duo AB, MN ad angulos rectos ſeſe interſecant; ducaturque linea CSQ, quæ angulum quemlibet cum AC efficiat: ex puncto S, ubi hæc recta circumferentiam ſecat, demittatur SF perpendicularis ad AB; & ex punctis A, N tangentes ducantur, quæ eo uſque productæ ſint, donec rectam CS pariter, quantum opus eſt, productam ſecent in P, & Q. Radius circuli CA dicitur ſinus totus, eumque nos vocabimus $= r$; recta SF dicitur ſinus arcus AS, atque adeo ſinus anguli ACS; ſunt enim in circulo anguli ad centrum ſnis arcubus proportionales; hunc ſinum hoc ſigno *Sc* indicabimus, quod ſinum circularem ſignificat. Quum puncta F, S, P, Q abſque numeris aſſumimus, ea, quæ dicimus, intelligenda ſunt iis omnibus circuli punctis convenire, quæ in figura iis litteris indi-

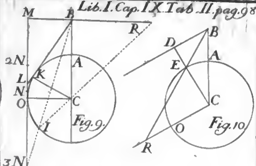

H
B E
A
F L G
B D H E C M N
Fig. 2.

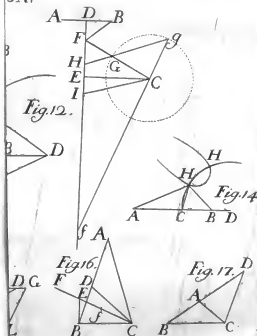

M
F
E
Fig. 4.
N
G Q B D C
A


H
M
D
K
B
F
E
N
h
K
d


D B
G A
E
C
Fig. 7.
F


D N
F
H


M
B
R
2N
A
K
L
N
O
C
I
Fig. 9.
3N
D
B
A
E
C
O
Fig. 10.
R


A
D
B
F
g
H
G
E
C
I
Fig. 12.
D
H
H
Fig. 14.
A
C
B
D
f
A
Fig. 16.
D G
F
D
E
f
B
C
Fig. 17.
D
A
B
C

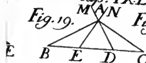
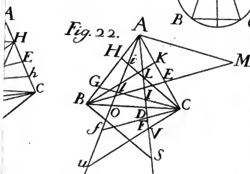
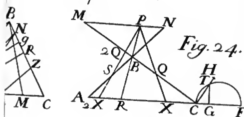
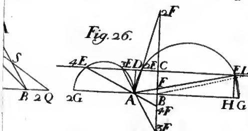

Fig. 19.
M
A
N
B
E
D
C

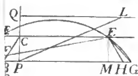

Fig. 20.
A
D
E
B
C

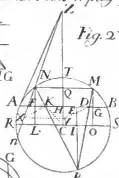

Fig. 22.
A
H
i
K
M
L
E
G
l
I
B
C
O
D
F
f
V
S
u

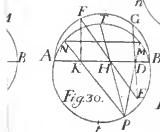

M
P
N
Fig. 24.
2Q
S
B
Q
H
T
A
2X
R
X
C
G
F

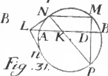

2F
Fig. 26.
4E
3E
D
5E
C
EL
F
2G
A
B
4F
3F
H
G

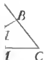
Cap. IX. Lib. I. Tab. IV. pag. 98.

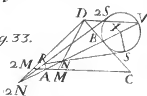


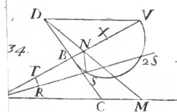












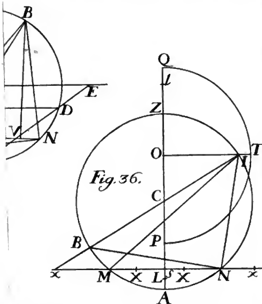


Fig. 36.

Fig. 38.

indicantur; quum vero litteræ numerum addimus, tunc de eo puncto sermo erit, ubi litera cum addito numero reperietur. Recta C F vocatur cosinus, & notabitur signo *Cc*, quod idem est ac cosinus circularis. A P tangens arcus distinguetur signo *Tc*; N Q vero tangens complementi arcus ad quadrantem dicitur arcus cotangens, quæ vocabitur *Ctc*, idest cotangens circularis. Recta C P est secans, C Q cosecans, idest secans arcus complementi: primam dicemus *Sec*, alteram *Csc*. Hæ denominationes omnes relate ad arcum A S, sive ad angulum A C S intelligi debent. Arcus circuli a nobis græcis litteris indicabuntur; ita *Sc*. π sinum significabit arcus π; *Ctc*. μ cotangentem arcus μ &c.

2. Quoad sinus, & cosinus hæc sunt animadvertenda. Quando est sinus S F $=o$, tunc erit cosinus C F $=r$, cui pariter æqualis erit secans C P, tangens A P erit $=o$; at C Q cosecans, & cotangens Q N evadent infinitæ. Si vero supponamus cosinum decrescere, & fieri C F $=o$, sinus, & cosecans erunt $=r$, cotangens $=o$, tangens, & secans evadent infinitæ; unde quum sinus, aut cosinus sunt $=o$, lineæ reliquæ trigonometricæ partim sunt $=o$, partim $=r$, partim infinitæ. Quum sinus æquat cosinum, tunc etiam tangens æquabit cotangentem, secans cosecantem, & angulus ad centrum semirectus, adeoque arcus dimidium quadrantis; quæ omnia sunt per se apertissima.

3. Posito igitur arcu A 1 S $=o$, erit sinus 1 S 1 F $=o$, & cosinus positivus C 1 F $=r$: posito arcu eodem minore circuli quadrante, sinus 1 S 1 F, & cosinus C 1 F positivi erunt: si arcus A 1 S æquet quadrantem A N, sinus erit æqualis radio circuli positivus, & cosinus $=o$: si adhuc crescat arcus, sed minor sit semicircumferentia, tunc erit sinus 2 S 2 F adhuc positivus, & cosinus C 2 F negativus: si arcus semicircumferentiam A N B æquabit, sinus erit $=o$, & cosinus negativus radio æqualis. Quum autem arcus semicircumferentiam superat, sed minor est tribus quadrantibus, verbi gratia quum est arcus A B 3 S, tunc & sinus 3 S 3 F, & cosinus C 3 F ambo negativi sunt; si arcus æquat tres quadrantes, ut A N B M, sinus fit $=r$ negativus, cosinum iterum $=o$; crescente adhuc arcu, sed ita ut minor sit circumferentia, sinus 4 S 4 F negativus esse perseverabit, at cosinus C 4 F fiet positivus; tandem si arcus æquet circumferentiam, redit sinus $=o$, & cosinus positivus $=r$, quemadmodum in primo casu.

4. Quod si arcus accipiatur circumferentia major, qualis esset arcus A N B M A S constans integra circumferentia aucta arcu quocumque A S, iidem illi sinus, ac cosinus S F, C F convenient, qui simplici arcui A S responderent ita, ut circumferentia illa addita nihil quantitatem sinuum, & cosinuum prorsus immutet; quod inde etiam discere potes, quod paullo ante videris, sinum, & cosinum eundem pertinere tum ad arcum nullum tum ad integram circumferentiam. Idem sentiendum omnino est si arcui A S duæ, tres, vel infinitæ etiam addantur circumferentiæ; idem etiam de lineis reliquis intelligendum tangente scilicet, cotangente &c., quæ eædem sunt tum relate ad simplicem arcum A S, tum ad illius summam, & quarumlibet circumferentiarum.

5. Si vero arcus negativus acciperetur quadrante minor, uti esset arcus A 4 S, sinus illi respondens erit 4 S 4 F negativus, & cosinus positivus C 4 F. Hinc videre est sinum negativum cum cosinu positivo ad duplicem arcum pertinere, nempe & ad arcum positivum tribus quadrantibus majorem, & ad arcum negativum, qui minor quadrante sit. Si arcus negativus quadrantem superet, sed minor sit semiperipheria, ut A 3 S, sinus, & cosinus sunt negativi; adeoque sinus, & cosinus negativi spectant & ad arcum positivum semicircumferentia majorem sed minorem tribus quadrantibus, & ad arcum negativum, quem modo

 assum-

assumpsimus. Si arcus negativus sit major duobus quadrantibus, sed minor tribus, veluti A B 2 S sinus erit positivus, cosinus negativus, prout contingit in arcu positivo, qui sit major quadrante, sed minor semicircumferentia. Tandem quum arcus negativus major est tribus quadrantibus, quemadmodum arcus A B 1 S, tunc sinus, & cosinus positivi erunt, quod idem de positivo arcu, qui quadrante minor sit, diximus paullo ante. Constat igitur, quamlibet sinuum, & cosinuum combinationem ad duos diversos arcus pertinere alterum positivum, negativum alterum; nos tamen in praxi, quotiescumque sinus erit positivus, quicumque tandem fuerit cosinus, positivos arcus accipiemus; & contra negativos, quum sinus erit negativus; ita enim arcus semper habebimus semicircumferentia minores; quare ab arcubus ad angulos transitu facto, erunt hi semper duobus rectis minores, quod necessarium est, ut sinuum canones possint triangulis applicari.

6. Quod spectat ad tangentes, & cotangentes, si arcus A 1 S fuerit positivus quadrante minor, ejus tangens A 1 P, & cotangens N 1 Q ambæ sunt positivæ: Si arcus fuerit quadrante major, sed minor semicircumferentia, tangens, & cotangens sunt negativæ. Mirum id fortasse videbitur tironibus; at si apud se recte statuant, tangentem arcus semper esse debere in linea 1 P 2 P, quæ circulum tangit in puncto, unde arcus ipse originem ducit, & eam puncto P definiri, quod est intersectio radii producti, & lineæ 1 P 2 P, admiratio omnis evanescet. Etenim evidens omnino est, radium C 2 S productum ex parte 2 Q lineæ A 1 P occurrere non posse; futurum autem ut eam secet, si ex opposita parte producatur, unde in casu tangens A 2 P sit negativa. Quoad cotangentem, quæ semper accipienda est in linea 1 Q 2 Q tangente circulum in puncto, quod ab initio arcus quadrante distat, res alia explicatione non indiget. Si arcus fuerit major duobus quadrantibus, sed tribus minor, tangens, & cotangens fient iterum positivæ, quod simili, ac antea, ratiocinio potest ostendi. Denique tangens, & cotangens sunt iterum negativæ, si arcus tribus quadrantibus sit major, sed minor circumferentia.

7. Si vero accipiatur arcus A 4 S negativus, ejus tangens, & cotangens sunt negativæ; arcui negativo A 3 S respondebunt tangens, & cotangens positivæ; in arcu negativo A 2 S iterum fient negativæ; & positivæ in arcu negativo A 1 S. Patet igitur, tangentem, & cotangentem positivam quatuor arcus indicare, nempe arcum positivum quadrante minorem, arcum positivum majorem semicircumferentia, at minorem tribus quadrantibus, arcum negativum majorem quadrante, at minorem semicircumferentia, & arcum negativum majorem tribus quadrantibus, at minorem integra circumferentia. Totidem pariter designant arcus tangens, & cotangens negativa, iique erunt, quos antea nominavimus, si positivos arcus in negativos mutes, & contra. Infer primo tangentem, & cotangentem positivam, tangentem, & cotangentem negativam semper indicare posse arcus semicircumferentia minores, seu angulos minores duobus rectis. Infer secundo arcus, quibus tangens positiva sit, & cotanges negativa, vel viceversa, absurdos esse arcus, & impossibiles.

8. Notandum est etiam, unum, eundemque sinum F S, tangentem A P, & secantem C P ad arcum A S pertinere, & ad arcum S B, qui est illius complementum ad semicircumferentiam A S B. Hinc si quadrantem circuli, aut angulum rectum voces $=\omega$, & quemcumque arcum alium, aut angulum $=\mu$, quatuor arcus, seu anguli μ, $2\omega-\mu$, $-2\omega+\mu$, $-\mu$ habent æquales sinus, cosinus &c.; hoc tantum discrimine, quod aliquando absolute æquales sunt, aliquando, ut æqualitas habeatur, oportet alterum ex ipsis accipere negativum.

Exhi-

Exhibebimus ea, quæ in finibus, & cofinibus accidunt, quum facile fit deinde rem omnem ad reliquas etiam lineas trigonometricas extendere. En igitur æqualitates: $Sc.\overline{2\omega-\mu} = Sc.\mu$; $Sc.\overline{-2\omega+\mu} = Sc.-\mu = -Sc.\mu$; $Cc.-\mu = Cc.\mu$; $Cc.\overline{2\omega-\mu} = Cc.\overline{-2\omega+\mu} = -Cc.\mu$.

9. Ex fimilitudine triangulorum FCS, ACP hæ defcendunt proportiones, five analogiæ:

CF : FS :: CA : AP, ideft $Cc : Sc :: r : Tc$
CF : CS :: CA : CP $\quad Cc : r :: r : Sec$
FS : AP :: CS : CP $\quad Sc : Tc :: r : Sec$
Ex fimilitudine triangulorum ACP, NCQ eft
AP : CA :: CN : NQ, ideft $Tc : r :: r : Ctc$
AC : CP :: NQ : QC $\quad r : Sec :: Ctc : Csc$
AP : PC :: CN : CQ $\quad Tc : Sec :: r : Csc$
Ex fimilitudine triangulorum FCS, NCQ habemus
FS : CF :: CN : NQ, ideft $Sc : Cc :: r : Ctc$
CF : CS :: NQ : QC $\quad Cc : r :: Ctc : Csc$
FS : CS :: CN : CQ $\quad Sc : r :: r : Csc$

Patet notum fieri finum, fi detur cofinus, & viciffim e cognito finu haberi cofinum. Etenim, cum radius fit conftans, valebit femper $\overline{CS}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{SF}^2$, feu $r^2 = \overline{Cc}^2 + \overline{Sc}^2$.

10. Sed tranfeamus jam ad propofitiones, quæ hujufce calculi tanquam bafes exiftimandæ funt. Propofitio prima. Datis finibus (*Fig.2.*) PR, QF, & cofinibus CR, CF duorum arcuum PQ, QA, invenire PL finum arcus AQP, qui æquat datorum fummam. Sinus PR producatur, donec fecet radium CA productum, fi opus eft, in T. Vocato arcu $PQ = \pi$, arcu $QA = \mu$, ob fimilitudinem triangulorum CFQ, CRT erit $Cc.\mu : Sc.\mu :: Cc.\pi : RT$; ergo $RT = \frac{Sc.\mu.\,Cc.\pi}{Cc.\mu}$; & $PT = \frac{Sc.\mu.\,Cc.\pi + Sc.\pi.\,Cc.\mu}{Cc.\mu}$. At ex fimilitudine triangulorum CFQ, LPT eruitur, $r : Cc.\mu :: \frac{Sc.\mu.\,Cc.\pi + Sc.\pi.\,Cc.\mu}{Cc.\mu} : LP = Sc.\overline{\pi+\mu}$; ergo erit $Sc.\overline{\pi+\mu} = \frac{Sc.\mu.\,Cc.\pi + Sc.\pi.\,Cc.\mu}{r}$, hoc eft finus fummæ duorum arcuum μ, π æquat duo producta finus μ in cofinum π, finus π in cofinum μ, divifa per radium. Q. E. O.

11. Corollarium primum fi duo arcus μ, π æquales fint, patet, finum fummæ fore $Sc.\overline{\mu+\pi} = Sc.2\mu = \frac{2\,Sc.\mu.\,Cc.\mu}{r}$; hoc eft quartam proportionalem poft radium, poft cofinum arcus dimidii, & ejufdem finum bis acceptum. Corollarium fecundum. Invento finu fummæ arcuum duorum, facile eft invenire finum fummæ arcuum trium, quatuor &c.; Etenim invento finu arcus, qui eft fumma duorum, eodem pacto invenietur finus fummæ hujus, & alterius arcus, & fic deinceps; quare patet, hoc problemate viam aperiri, qua finum arcus multipli fecundum quemcumque numerum reperiamus, de quo alibi erit fermo.

12. Pro-

12. **Propositio secunda.** Datis sinibus, & cosinibus duorum arcuum inæqualium PA, QA, invenire sinum eorum differentiæ PQ. Esto arcus $PA = \pi$, arcus $QA = \mu$. Ob similia triangula CLO, CFQ est, $Cc.\mu : Sc.\mu :: Cc.\pi :$ $LO = \frac{Sc.\mu . Cc.\pi}{Cc.\mu}$; Ergo $PO = \frac{Sc.\pi . Cc.\mu - Sc.\mu . Cc.\pi}{Cc.\mu}$; ex similitudine vero triangulorum CFQ, ORP habemus, $r : Cc.\mu :: \frac{Sc.\pi . Cc.\mu - Sc.\mu . Cc.\pi}{Cc.\mu}$ $: PR = Sc.\overline{\pi - \mu}$; ergo $Sc.\overline{\pi - \mu} = \frac{Sc.\pi . Cc.\mu - Sc.\mu . Cc.\pi}{r}$. Q. E. O.

Si arcui positivo addendus esset arcus negativus, manifestum est summam in subtractionem transire; & contra subtractionem in summam, si arcus negativus e positivo sit detrahendus. Si igitur in superiore propositione arcus QA assumptus fuisset negativus, formula sinus prodiisset, quam in hac invenimus, & vicissim formula inventa in propositione hac, posito arcu QA negativo, esset ea, quam invenimus in antecedenti propositione.

13. Propositio tertia. Datis sinibus QF, PR, & cosinibus CF, CR arcuum QA, PQ, invenire cosinum arcus PA, qui est eorum summa. Sint arcus $QA = \mu$, $PQ = \pi$. Similia triangula CQF, POR dant $Cc.\mu : Sc.\mu$ $:: Sc.\pi : RO = \frac{Sc.\mu . Sc.\pi}{Cc.\mu}$; ergo $CO = \frac{Cc.\pi . Cc.\mu - Sc.\mu . Sc.\pi}{Cc.\mu}$. Ex triangulis autem CQF, COL est, $r : Cc.\mu :: \frac{Cc.\pi . Cc.\mu - Sc.\mu . Sc.\pi}{Cc.\mu} : CL = Cc.\overline{\pi + \mu}$ $= \frac{Cc.\pi . Cc.\mu - Sc.\mu . Sc.\pi}{r}$. Q. E. O.

14. Si esset $\pi = \mu$, formula prodiret $\frac{\overline{Cc.\mu}^2 - \overline{Sc.\mu}^2}{r}$.

15. Idem ex propositione prima elici potuisset; verum calculo quodam trigonometrico opus fuisset, quem hic addendum in juvenum gratiam existimamus. Invenimus propositione prima $Sc.\overline{\mu + \pi} = \frac{Sc.\mu . Cc.\pi + Sc.\pi . Cc.\mu}{r}$:

ergo quadrando, $\overline{Sc.\mu + \pi}^2 = \frac{\overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 + 2\, Sc.\mu . Cc.\pi . Sc.\pi . Cc.\mu + \overline{Sc.\pi}^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{r\, r}$

At $\overline{Cc}^2 = r^2 - \overline{Sc}^2$; ergo $\overline{Cc.\mu + \pi}^2 =$

$\frac{r^4 - \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 - 2\, Sc.\mu . Cc.\pi . Sc.\pi . Cc.\mu - \overline{Sc.\pi}^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{r\, r}$; Sed $r^2 = \overline{Cc.\mu}^2$ $+ \overline{Sc.\mu}^2$, $r^2 = \overline{Cc.\pi}^2 + \overline{Sc.\pi}^2$; ergo utramque æquationem invicem multiplicando erit, $r^4 = \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 + \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Sc.\pi}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Sc.\pi}^2$, quo r^4 valore substituto, erit, $\overline{Cc.\mu + \pi}^2$

=

$$= \frac{\overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 - 2\, Sc.\mu . Cc.\pi . Sc.\pi . Cc.\mu + \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Sc.\pi}^2 - \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 - \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Sc.\pi}^2}{rr};$$

deletis terminis, qui eliduntur, & radice extracta, erit tandem, $Cc.\overline{\mu + \pi} = \frac{Cc.\mu . Cc.\pi - Sc.\mu . Sc.\pi}{r}$, ut antea inventum fuerat.

16. Propositio quarta. Datis finibus, & cofinibus duorum inæqualium arcuum P A, Q A, invenire cofinum differentiæ P Q. Sint arcus Q A $= \mu$, P A $= \pi$. Ex similibus triangulis C Q F, P L T habemus $Cc.\mu : Sc.\mu :: Sc.\pi : LT = \frac{Sc.\mu . Sc.\pi}{Cc.\mu}$; ergo $CT = \frac{Sc.\mu . Sc.\pi + Cc.\mu . Cc.\pi}{Cc.\mu}$. Ex triangulis similibus C Q F, C T R habemus $r : Cc\mu :: \frac{Sc.\mu . Sc.\pi + Cc.\mu . Cc.\pi}{Cc.\mu} : CR = Cc.\overline{\pi - \mu} = \frac{Sc.\mu . Sc.\pi + Cc.\mu . Cc.\pi}{r}$. Si arcus Q A in superiori propositione fuisset negativus, hanc eandem formulam cosinus summæ invenissemus; quæ formula etiam ex propositione secunda erni potuisset, in qua sinum differentiæ arcuum quæsivimus. Calculus illi, quem paulo ante tradidimus, omnino fuisset similis; adeoque illum brevitatis gratia prætermittimus.

17. Propositio quinta. Datis tangentibus (*Fig.3.*) A D, S R duorum arcuum A S, S U, summæ tangentem A F invenire. Vocentur arcus A S $= \mu$, S U $= \pi$. Ducatur D Q parallela ad S R; & ex puncto Q duæ perpendiculares demittantur Q O ad C A, Q L ad A D. Quoniam angulus C D Q rectus est, anguli duo simul Q D L, C D A unum rectum efficiunt; atqui etiam duo anguli A C D, C D A unum rectum æquant; Ergo hi duo duobus illis æquales sunt; Ergo si detrahas utrinque angulum C D A communem, supererit angulus A C D æqualis angulo Q D L. Igitur triangula C A D, Q D L, quæ habent præterea angulos rectos in A, & L, similia erunt; adeoque C D : C A = C S :: Q D : D L; atqui ob similitudinem triangulorum C D Q, C S R est etiam C D : C S :: Q D : S R; ergo D L = S R, & A L = Q O erit summa tangentium A D, S R. Habemus præterea C A : A D :: D L : L Q = A O, hoc est $r : Tc.\mu :: Tc.\pi : AO = \frac{Tc.\mu . Tc.\pi}{r}$; & ex similibus triangulis C O Q, C A F est, $r - \frac{Tc.\mu . Tc.\pi}{r} : r :: Tc.\mu + Tc.\pi : AF$; ergo $AF = \frac{r^2 . \overline{Tc.\mu + Tc.\pi}}{r^2 - Tc.\mu . Tc.\pi}$. Q. E. O.

18. Idem ex sinuum regulis jam traditis alio modo obtineri potuisset. Scimus enim esse, $r : Tc :: Cc : Sc$; adeoque $r : Tc.\overline{\mu + \pi} :: Cc.\overline{\mu + \pi} : Sc.\overline{\mu + \pi}$: Si igitur accipiamus $Cc.\overline{\mu + \pi}$ inventum in propositione tertia, & $Sc.\overline{\mu + \pi}$ ex propositione prima; & denominatorem communem ejiciamus, erit, $r : Tc.\overline{\mu + \pi} :: Cc.\mu . Cc.\pi - Sc.\mu . Sc.\pi : Sc.\pi . Cc.\mu + Sc.\mu . Cc.\pi$; & divisis postremis

mis duobus terminis per $Sc.\pi . Cc.\mu$, erit $r : Tc.\overline{\mu + \pi} :: \frac{Cc.\pi}{Sc.\pi} - \frac{Sc.\mu}{Cc.\mu} : 1 + \frac{Cc.\pi}{Sc.\pi} . \frac{Sc.\mu}{Cc.\mu}$, seu pro fractionibus his aliis substitutis, quas iis æquales esse novimus, $r : Tc.\overline{\mu + \pi} :: \frac{r}{Tc.\pi} - \frac{Tc.\mu}{r} : 1 + \frac{r}{Tc.\pi} . \frac{Tc.\mu}{r}$, erit tandem,

$$Tc.\overline{\mu + \pi} = \frac{r^2 . \overline{Tc.\mu + Tc.\pi}}{r^2 - Tc.\mu . Tc.\pi}$$; ut supra.

19. Si arcus μ, π æquales supponantur, patet, formulam esse, $\frac{r^2 . 2 Tc.\pi}{r^2 - \overline{Tc.\pi}^2}$.

20 Propositio sexta. Datis A F, A D duorum inæqualium arcuum A U, A S tangentibus, tangentem S R differentiæ S U invenire. Sint arcus A U $= \pi$, A S $= \mu$. E puncto D ducatur D Q, quæ angulum rectum faciat cum C D, quæque proinde tangenti quæsitæ sit parallela, & ex Q ducatur Q L parallela ad C A. Erunt duo triangula C A D, Q D L similia, & D L $=$ S R, ut in propositione superiore probatum est. His positis, F L : D L est in ratione F L : L Q composita L Q : D L; ergo quia F L : L Q :: F A : A C, & L Q : D L :: A D : A C, erit, rationibus substitutis, F L : D L in ratione F A : A C composita A D : A C; seu F L : D L :: F A . A D : $\overline{AC}^2$; & componendo, F D : D L $=$ S R :: F A . A D $+ \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2$, sive $Tc.\pi - Tc.\mu : Tc.\overline{\pi - \mu} :: Tc.\pi . Tc.\mu + r^2 : r^2$; ergo tandem, $Tc.\overline{\pi - \mu} = \frac{r^2 . Tc.\pi - Tc.\mu}{r^2 + Tc.\pi . Tc.\mu}$. Q.E.O. Idem elicitur ex sinuum, & cosinuum doctrina; & calculus illi similis, quo usi sumus in propositione antecedente.

21. Propositio septima. Datis cotangentibus duorum arcuum μ, π cotangentem summæ invenire. Ex iis, quæ præmisimus N. 9., radius est medius proportionalis inter cotangentem, & tangentem; ergo $Ctc.\mu + \pi : r :: r : Tc.\overline{\mu + \pi}$; sed tangens arcus $\mu + \pi$ ex propositione quinta est $\frac{r^2 . \overline{Tc.\pi + Tc.\mu}}{r^2 - Tc.\pi . Tc.\mu}$; ergo $Ctc.\overline{\mu + \pi} : r :: r : \frac{r^2 . \overline{Tc.\pi + Tc.\mu}}{r^2 - Tc.\pi . Tc.\mu} :: r^2 - Tc.\pi . Tc.\mu : r . \overline{Tc.\pi + Tc.\mu}$; & substituto loco tangentium ipsarum valore dato per radium, & cotangentem, $Ctc.\overline{\pi + \mu} : r :: r^2 - \frac{r^4}{Ctc.\pi . Ctc.\mu} : r . \frac{r^2}{Ctc.\pi} + \frac{r^2}{Ctc.\mu} :: \frac{Ctc.\pi . Ctc.\mu - r^2}{Ctc.\pi . Ctc.\mu} : \frac{r}{Ctc.\pi} + \frac{r}{Ctc.\mu} :: Ctc.\mu . Ctc.\pi - r^2 : r . \overline{Ctc.\mu + Ctc.\pi}$; ergo

Ctc

$Ctc.\overline{\pi+\mu} = \frac{Ctc.\pi.\ Ctc.\mu - r^2}{Ctc.\pi + Ctc.\mu}$. Q. E. O.

22. Propositio octava. Datis cotangentibus duorum arcuum inæqualium π, μ, cotangentem differentiæ invenire. Ex dictis in propositione superiore est $Ctc.\ \overline{\pi-\mu} : r :: r : Tc.\ \overline{\pi-\mu}$; sed ex propositione sexta $Tc.\overline{\pi-\mu} = \frac{r^2.Tc.\pi - Tc.\mu}{r^2+Tc.\pi.Tc.\mu}$; ergo erit $Ctc.\overline{\pi-\mu} : r :: r : r^2.\ \frac{Tc.\pi - Tc.\mu}{r^2+Tc.\pi.\ Tc.\mu} ::$ $r^2 + Tc.\pi.Tc.\mu : r.\ \overline{Tc.\pi - Tc.\mu} :: r^2 + \frac{r^4}{Ctc.\pi\ .\ Ctc.\mu} : r.\ \frac{r^2}{Ctc.\pi} - \frac{r^2}{Ctc.\mu}$ $:: Ctc.\pi.Ctc.\mu + r^2 : r.\ \overline{Ctc.\mu - Ctc.\pi}$; ergo $Ctc.\overline{\pi-\mu} = \frac{Ctc.\pi.Ctc.\mu + r^2}{Ctc.\mu - Ctc.\pi}$. Q. E. O.

23. Propositio nona. Datis Tangentibus, & secantibus duorum arcuum π, μ, secantem summæ invenire. Sint arcus AS $=\mu$, SU $=\pi$. Ex similibus triangulis CSR, CDQ est CS : CD :: CR : CQ $= \frac{CD.\ CR}{CS}$; & ex aliis similibus COQ, CAF est OQ : AF :: $\frac{CD.CR}{CS}$: CF; idest $Tc.\ \mu + Tc.\pi$ (prop. 5.) : $r^2.\ \frac{Tc.\mu + Tc.\pi}{r^2 - Tc.\pi.Tc.\mu}$ (prop. 5.) $:: \frac{Sec.\mu.Sec.\pi}{r} : Sec.\overline{\pi+\mu}$; igitur $Sec.\ \overline{\mu+\pi} = r.\ \frac{Sec.\mu.Sec.\pi}{r^2 - Tc.\mu.Tc.\pi}$. Q. E. O. Patet hinc rationem tangentis summæ arcuum ad ejus secantem esse, $r.\overline{Tc.\mu + Tc.\ \pi} : Sec.\ \mu.\ Sec.\pi$.

24. Propositio decima. Datis tangentibus, & secantibus duorum arcuum, secantem differentiæ invenire. Sint arcus AS $=\mu$, AU $=\pi$. Propter triangula similia CAF, QLF est CQ $= \frac{CF.\ AL}{AF}$; & propter alia similia triangula CDQ, CSR est CD : CS :: $\frac{CF.AL}{AF}$: CR :: CF.AL : CR.AF; idest $Sec.\mu : r :: Sec.\pi.(Tc.\mu + r^2.\ \frac{Tc.\pi - Tc.\mu}{r^2 + Tc.\pi.Tc.\mu})$ (prop. 5., & 6.) : $Sec.\overline{\pi-\mu}.$ $Tc.\pi :: Sec.\pi.\ \frac{Tc.\pi.\overline{Tc.\mu}^2 + r^2}{r^2 + Tc.\pi.Tc.\mu} : Sec.\overline{\pi-\mu}.\ Tc.\pi$; & his duobus terminis divisis per $Tc.\pi$, loco $\overline{Tc.\mu}^2 + r^2$ substituto $\overline{Sec.\mu}^2$, est $Sec.\mu : r ::$

$\frac{\overline{Sec.\pi.Sec.\mu}^2}{r^2+Tc.\pi.Tc.\mu} : Sec.\overline{\pi-\mu}$; ergo $Sec.\overline{\pi-\mu} = r.\frac{Sec.\pi.Sec.\mu}{r^2+Tc.\pi.Tc.\mu}$. Q. E. O.
Ex hac formula, & ex illa, qua tangens arcuum differentiæ exprimitur, conſtat ſecantem differentiæ eſſe ad ejuſdem tangentem :: $Sec.\pi.Sec.\mu : r.\overline{Tc.\pi - Tc.\mu}$. Si ex his autem formulis ſecantium ſummæ, aut differentiæ arcuum tangentes eliminare volumus, id faciliimum eſt, quum habeamus ſemper $Tc = \sqrt{\overline{Sec}^2 - r^2}$.

25. Propoſitio undecima. Datis coſecantibus & cotangentibus arcuum π, μ, ſummæ coſecantem invenire. Ex Numero 9 eſt $Csc : r :: Sec : Tc$; ergo $Csc.\overline{\pi+\mu} : r :: Sec.\overline{\pi+\mu} : Tc.\overline{\pi+\mu} :: Sec.\mu.Sec.\pi : r.\overline{Tc.\mu + Tc.\pi}$ (prop. 9.); unde $Csc.\overline{\pi+\mu} = \frac{Sec.\mu.Sec.\pi}{Tc.\mu+Tc.\pi}$; ſed $Sec = \frac{Tc.Csc}{r}$; & $Tc = \frac{r^2}{Ctc}$; ergo ſubſtitutionibus factis erit, $Csc.\overline{\pi+\mu} = \frac{Csc.\pi.Csc.\mu}{Ctc.\pi+Ctc.\mu}$. Q. E. O.

26. Propoſitio duodecima. Datis coſecantibus, & cotangentibus duorum arcuum π, μ inæqualium, differentiæ coſecantem invenire. Ex eodem Numero 9 $Csc.\overline{\pi-\mu} : r :: Sec.\overline{\pi-\mu} : Tc.\overline{\pi-\mu} :: Sec.\pi.Sec.\mu : r.\overline{Tc.\pi - Tc.\mu}$ (prop. 10.); ergo erit $Csc.\overline{\pi-\mu} = \frac{Sec.\pi.Sec.\mu}{Tc.\pi-Tc.\mu}$; factiſque, ut in propoſitione antecedente ſubſtitutionibus $Csc.\overline{\pi-\mu} = \frac{Csc.\pi.Csc.\mu}{Ctc.\pi-Ctc.\mu}$. Q. E. O. Quum ſit $Ctc = \sqrt{\overline{Csc}^2 - r^2}$ poterunt coſecantes ſummæ, & differentiæ arcuum per ſolas coſecantes cognitas obtineri.

27. Propoſitio decimatertia. Anguli cujuſcumque ſinus eſt ad ſummam coſinus & radii, ut tangens dimidii anguli ad radium. Deſcripto ſemicirculo A D B, cujus centrum C, ſit angulus (*Fig.4.*) A C D $= \varepsilon$, ſinus illius D E, tangens A O, & coſinus E C. Ducta recta D B, erit angulus D B A $= \frac{\varepsilon}{2}$; huic D B ſi ex centro parallelam facias C F, erit angulus A C F $=$ D B A $= \frac{\varepsilon}{2}$, ejuſque tangens A F. At ex ſimilitudine triangulorum D E B, F C A eſt D E : E B :: F A : A C; ergo $Sc.\varepsilon : Cc.\varepsilon + r :: Tc.\frac{\varepsilon}{2} : r$. *Q. E. D.*

28. Hoc etiam modo propoſitio potuiſſet oſtendi. Ex corollariis prop. 2., 3. eſt $Sc.\varepsilon = 2\frac{Sc.\frac{\varepsilon}{2}.Cc.\frac{\varepsilon}{2}}{r}$, $Cc.\varepsilon = \frac{\overline{Cc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 - \overline{Sc.\frac{\varepsilon}{2}}^2}{r}$; ergo $Sc.\varepsilon$:

r+

$r + Cc.\varepsilon :: 2Sc.\frac{\varepsilon}{2}.Cc\frac{\varepsilon}{2} : r^2 + \overline{Cc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 - \overline{Sc.\frac{\varepsilon}{2}}^2$; At $r^2 - \overline{Sc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 = \overline{Cc.\frac{\varepsilon}{2}}^2$;

ergo $Sc.\varepsilon : r + Cc.\varepsilon :: 2Sc.\frac{\varepsilon}{2}.Cc.\frac{\varepsilon}{2} : 2.\overline{Cc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 :: Sc.\frac{\varepsilon}{2} : Cc.\frac{\varepsilon}{2} :: Tc.\frac{\varepsilon}{2} : r$.

Extendamus propositionem, & demonstremus, sinum anguli esse ad differentiam sinus totius & cosinus, ut sinus totus ad tangentem dimidii. Ex similitudine triangulorum FAC, ADE erit, DE:AE::CA:AF; idest $Sc.\varepsilon : r - Cc.\varepsilon :: r : Tc.\frac{\varepsilon}{2}$. Aliter $Sc.\varepsilon : r - Cc.\varepsilon :: 2Sc.\frac{\varepsilon}{2}.Cc.\frac{\varepsilon}{2} : r^2 - \overline{Cc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 + \overline{Sc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 = 2.\overline{Sc.\frac{\varepsilon}{2}}^2 :: Cc.\frac{\varepsilon}{2} : Sc.\frac{\varepsilon}{2} :: r : Tc.\frac{\varepsilon}{2}$.

29. Corollarium. Ex formulis hujus propositionis alias deducamus, quas sæpe utiles esse, experti sumus. Quoniam $Sc.\varepsilon : Cc.\varepsilon + r :: Tc.\frac{\varepsilon}{2} : r$, erit etiam $Sc.\varepsilon : Cc.\varepsilon + r :: r : Ctc.\frac{\varepsilon}{2}$; est enim radius medius proportionalis inter tangentem, & cotangentem; atqui vocato $= \omega$ quadrante circuli $Ctc.\frac{\varepsilon}{2} = Tc.\omega - \frac{\varepsilon}{2} = Tc.\frac{\omega}{2} + \frac{\omega - \varepsilon}{2}$: ergo vocato $\omega - \varepsilon = \Phi$; quum constet $Sc.\varepsilon = Cc.\Phi$, & $Cc.\varepsilon = Sc.\Phi$, erit $Cc.\Phi : Sc.\Phi + r :: r : Tc.\frac{\omega + \Phi}{2}$. Similiter quum sit $Sc.\varepsilon : r - Cc.\varepsilon :: r : Tc.\frac{\varepsilon}{2}$, erit $Sc.\varepsilon : r - Cc.\varepsilon : Ctc.\frac{\varepsilon}{2} = Tc.\omega - \frac{\varepsilon}{2} = Tc.\frac{\omega}{2} + \frac{\omega - \varepsilon}{2} : r$; vocatoque ut antea $\omega - \varepsilon = \Phi$, fiet $Cc.\Phi : r - Sc.\Phi :: Tc.\frac{\omega + \Phi}{2} : r$. His, quæ veluti fundamenta sunt calculi trigonometrici, præmissis gradum jam faciamus ad ea Theoremata demonstanda, quæ ad triangulorum doctrinam pertinent.

30. Theorema primum. In quolibet triangulo (*Fig.* 5.) ABC latera sunt inter se ut sinus angulorum oppositorum. Per tria puncta A, B, C describatur circulus, cujus centrum sit Q. Ex centro ducatur radius QA, & QM perpendicularis ad latus AC. Quoniam recta QM bifariam dividit arcum AC, erit angulus AQM æqualis angulo ABC (Eucl. lib. 3.), & AR dimidium lateris AC; atqui AR est sinus anguli AQR = ABC, posito sinu toto QA; Ergo AC est duplum sinus anguli oppositi B. Idem potest de aliis lateribus AB, BC demonstrari; ergo erunt latera omnia dupla sinus angulorum oppositorum; adeoque inter se ut ipsi sinus.

31. Si angulus ABC esset obtusus, producatur (*Fig. 6.*) RQ in M. Arcus AMC erit bisectus in M; ergo angulus AQM = ABC, & AR ut antea dimidium lateris AC; sed AR est sinus anguli AQM; ergo etiam in hac hypothesi est latus AC duplum sinus anguli oppositi B.Q.E.D.

32. Theorema secundum. In quocumque triangulo si latus unum AC (*Fig.* 7.)

bisariam dividatur in M, & ex opposito angulo B ducatur BM, erit angulus B in duos divisus ABM, quem vocamus $=\mu$, CBM $=\pi$, quorum sinus erunt inter se ut sinus angulorum A, C. Demonstratio; Ex præcedenti theoremate est $Sc.\pi : Sc.C :: CM : BM$, $Sc.\mu : Sc.A :: AM : BM$; sed ex hypothesi $CM = AM$; ergo $Sc.\pi : Sc.C :: Sc.\mu : Sc.A$, & convertendo $Sc.\pi : Sc.\mu :: Sc.C : Sc.A$. *Q. E. D.* Erit igitur etiam $Sc.\pi : Sc.\mu :: BA : BC$.

33. Theorema tertium. In quolibet triangulo ABC ducta, ut supra, BM, & præterea qualibet ducta recta QN, quæ BM secet in X, erit $QX : XN :: BC.QB : AB.BN$. Dem. Fiant hæ denominationes. Angulus ABM $=\mu$, CBM $=\pi$, BQN $=\varepsilon$, QNB $=\lambda$. Constat esse

QX : XN in ratione $QX : XB :: Sc.\mu : Sc.\varepsilon$ (ex Theor. primo), seu
composita $XB : XN :: Sc.\lambda : Sc.\pi$

QX : XN in ratione $Sc.\mu : Sc.\pi$
composita $Sc.\lambda : Sc.\varepsilon$;

at per Theorema superius $Sc.\mu : Sc.\pi :: BC : BA$, & per primum $Sc.\lambda : Sc.\varepsilon :: QB : BN$; ergo erit

QX : XN in ratione BC : BA
composita QB : BN $:: BC.QB : AB.BN$. Q.E.D.

34. Theorema quartum. In quocumque triangulo BAC summa duorum laterum BA, BC est ad eorum differentiam ut tangens semisummæ angulorom oppositorum C, A ad tangentem eorumdem angulorum semidifferentiæ. Dem. Sit BA $=a$, BC $=b$, semisumma angulorum C, A $=\varepsilon$, semidifferentia $=\lambda$. Erit igitur angulus major ex. gr. C $=\varepsilon+\lambda$, minor A $=\varepsilon-\lambda$; ergo per theorema primum $a : b :: Sc.\overline{\varepsilon+\lambda} : Sc.\overline{\varepsilon-\lambda} ::$ (prop. 1, 2) $Sc.\varepsilon.Cc.\lambda + Sc.\lambda.Cc.\varepsilon : Sc.\varepsilon.Cc.\lambda - Sc.\lambda.Cc.\varepsilon$, & opportune argumentando $a+b : a-b :: 2Sc.\varepsilon.Cc.\lambda : 2Sc.\lambda.Cc.\varepsilon :: \frac{Sc.\varepsilon}{Cc.\varepsilon} : \frac{Sc.\lambda}{Cc.\lambda} :: Tc.\varepsilon : Tc.\lambda$. *Q.E.D.*

35. Theorema quintum. Si producatur latus BA anguli (*Fig.* 8.) BAC, & ducta quacumque EF, fiat AD illi parallela, erit sinus anguli BAD ad sinum anguli DAC ut AE : AF. Dem. Quum AD, EF sint parallelæ, angulus BAD æquabit angulum F, & angulus DAC angulum AEF; atqui sinus angulorum F, & AEF (per theor. primum) sunt ut latera AE, AF; ergo sinus anguli BAD ad sinum anguli DAC :: AE : AF. Q. E. D. Si recta EF secet ipsum latus (*Fig.* 9.) AB non productum, ipsique sit AD, ut antea, parallela, adhuc tamen erit sinus anguli BAD ad sinum anguli CAD :: AE : AF. Etenim adhuc erit angulus AFE æqualis angulo BAD, & angulus FEA eumdem habet sinum ac angulus FEC $=$ DAC, cum quo duos rectos complet; ergo sinus anguli BAD ad sinum anguli CAD :: AE : AF.

36. Corollarium primum. Hinc habes, quomodo angulus ita dividi, vel augeri possit, ut partium sinus sint in data ratione. Sit angulus dividendus BAC (*Fig.* 8.) cape AE quamcumque, & produc BA ut sit AE : AF in data ratione; junge deinde EF, & ducta AD parallela ad EF, erit angulus BAC divisus, ut quærebatur. Si angulum BAC (*Fig.* 9.) ita augere velis angulo BAD, ut hujus sinus habeat rationem datam ad sinum anguli CAD, seca AE, AF in eadem ratione data, puncta E, F junge recta EF, huic duc parallelam AD, & factum erit, quod postulas. Si autem quis angulum DAC (*Fig.* 8.) augere ita cupiat, ut

sinus

ſinus incrementi ſit ad ſinum anguli DAC in ratione pariter data; is ſi rectam quamcumque EF ducat parallelam ad AD, & factis EA, AF in data ratione, producat AF verſus B, problema ſibi propoſitum ſolvit.

37. Corollarium ſecundum. In quocumque triangulo (*Fig* 8. 9.) HAE ducta ex angulo A in baſim linea AK, erit ſinus anguli HAK ad ſinum anguli KAE ut AE.HK : AH.KE. Etenim quum ſinus angulorum ſint ut AE, AF, erunt in ratione AE:AH
compoſita AH:AF ; ſed AH:AF::HK:KE
propter ſimilia triangula HAK, HFE; ergo erunt
in ratione AE:AH
compoſita HK:KE ::AE.HK:AH.KE.

38. Corollarium tertium. Si eſſet AE: AH :: KE: HK, quoniam tunc AE. HK = AH.KE, anguli HAK, EAK vel æquales eſſent, ut in Figura octava; vel ſimul duos efficerent rectos; ut in Figura nona. Corollarium quartum. Si fuerit AE:AH::HK:KE, tunc patet ſinus angulorum futuros ut $\overline{AE}^2 : \overline{AH}^2$ Corollarium quintum. Si tandem ſupponamus HK = KE, erunt ſinus angulorum in ratione laterum AE, AH in figura octava. In figura nona fieri nunquam poteſt, ut ſit HK = KE, niſi punctum K infinite diſtet; adeoque ſit AK parallela ad EH; hoc tamen paralleliſmo ſuppoſito eadem eſt etiam in hoc caſu ſinuum ratio.

39. Problema primum. Datis duobus lateribus (*Fig.* 10.) AB, AC trianguli ABC, & ab ipſis intercepto angulo, latus aliud invenire, & reliquos angulos una cum perpendicularibus BD, AE, & interceptis BE, EC, CD, DA. Vocentur latera AB = a, AC = b, & angulus BAC = ε. Ex primo theoremate eſt $r : Cc.\varepsilon :: a : AD = \frac{a.Cc.\varepsilon}{r}$; $r : Sc.\varepsilon :: a : BD = \frac{a.Sc.\varepsilon}{r}$; ergo trianguli area $= \frac{BD.AC}{2} = \frac{ab.Sc.\varepsilon}{2r}$; & $DC = b - \frac{a.Cc.\varepsilon}{r}$. Iam vero ex Euclide (lib. 2. prop. 13.) eſt $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2AC.AD + \overline{AC}^2$; igitur $\overline{BC}^2 = a^2 - \frac{2ab.Cc.\varepsilon}{r} + b^2$; ideſt $BC = \sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.\varepsilon}{r} + b^2}$. Animadvertendum eſt diligenter, hanc radicalem formulam baſim trianguli indicare, cujus latera ſunt a, & b, quæ angulum ε efficiunt; id enim ad elegantiſſimas geometricas constructiones conferre plurimum poteſt.

40. Anguli B, C hoc modo inveniuntur. Fiat BC : AB :: Sc.BAC : Sc.ACB, ideſt $\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.\varepsilon}{r} + b^2} : a :: Sc.\varepsilon : Sc.ACB = \frac{a.Sc.\varepsilon}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.\varepsilon}{r} + b^2}}$.

Eodem pacto invenietur $Sc.ABC = \frac{b.Sc\varepsilon}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.\varepsilon}{r} + b^2}}$. Ut nota fiat perpendicularis AE, ſufficit animadvertere AE. BC = BD.AC; igitur AE

=

$= \frac{BD.AC}{BC} = \frac{ab.Sc.e}{r\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}}$.

41. Segmenta CE, BE determinantur habitis angulorum ACB, ABC cosinibus per sinus datos: ita erit $\overline{Cc.ACB}^2 = r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.e}^2}{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}$

$= \frac{a^2r^2 - 2abr.Cc.e + b^2r^2 - a^2.\overline{Sc.e}^2}{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}$; sed $r^2 - \overline{Sc.e}^2 = \overline{Cc.e}^2$; ergo

$\overline{Cc.ACB}^2 = \frac{a^2.\overline{Cc.e}^2 - 2abr.Cc.e + b^2r^2}{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}$; & $Cc.ACB = \frac{\sqrt{a^2.\overline{Cc.e}^2 - 2abr.Cc.e + b^2r^2}}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}}$;

atqui est, $r : Cc.ACB :: AC : CE$; ergo $r : \frac{\sqrt{a^2.\overline{Cc.e}^2 - 2abr.Cc.e + b^2r^2}}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}}$

$:: b : CE = \frac{b.\sqrt{a^2.\overline{Cc.e}^2 - 2abr.Cc.e + b^2r^2}}{r.\sqrt{a^2 - \frac{2ab.Cc.e}{r} + b^2}}$. Eadem methodo poterit etiam segmentum BE inveniri.

42. Problema secundum. Datis duobus trianguli lateribus (Fig. 11.) BA, AC, & angulo ab ipsis non comprehenso B, angulos A, C, & basim BC invenire. Sit $BA = a$, $AC = b$, & angulus $ABC = e$; Igitur $b : a :: Sc.e :$

$Sc.C = \frac{a.Sc.e}{b}$, adeoque $Cc.C = \sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.e}^2}{b^2}}$. Nunc demittatur perpendicularis AE, & fiat $r : Sc.e :: a : AE = \frac{a.Sc.e}{r}$; & $r : Cc.e :: a : BE$

$= \frac{a.Cc.e}{r}$; & $r : Cc.C = \sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.e}^2}{b^2}} :: b : CE = \frac{b}{r}\sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.e}^2}{b^2}}$;

ergo erit $BC = \frac{a.Cc.e}{r} \pm \frac{b}{r}\sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.e}^2}{b^2}}$. Signum illud duplex,

quo

quo quantitas radicalis afficitur, duplex triangulum indicat, & basim duplicem. Et revera si ductam intelligas A c, & utrumque triangulum ABC, ABc attente inspicias, utrumque iisdem præditum conditionibus invenies; igitur quoad primum triangulum, ut patet, erit accipienda quantitas radicalis positiva, & erit angulus ACB acutus; negativa quoad alterum, cujus angulus AcB erit obtusus.

43. Ut angulum A obtineamus, fiat AC : BC :: $Sc.\varepsilon$: $Sc.A$; ideft

$$b : \frac{a.Cc.\varepsilon}{r} \pm \frac{b}{r}\sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.\varepsilon}^2}{b^2}} :: Sc.\varepsilon : Sc.A$$

$$= \frac{a.Cc.\varepsilon.Sc.\varepsilon \pm b.Sc.\varepsilon.\sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.\varepsilon}^2}{b^2}}}{rb};$$

44. Problema tertium. Datis lateribus trianguli ABC, reliqua omnia invenire. Fiat $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, angulus $B = \lambda$, $A = \mu$, $C = \pi$. Erit $b : a :: Sc.\lambda : Sc.\pi = \frac{a.Sc.\lambda}{b}$; $b : c :: Sc.\lambda : Sc.\mu = \frac{c.Sc.\lambda}{b}$; ergo

$$Cc.\pi = \sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}; \ \& \ Cc.\mu = \sqrt{r^2 - \frac{c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}};$$ at $Sc.\overline{\pi + \mu} = Sc.\lambda$,

quia angulus λ est complementum ad duos rectos angulorum μ, π; ergo $Sc.\lambda$

$$= \frac{Sc.\pi.Cc.\mu + Sc.\mu.Cc.\pi}{r} \text{ (prop. 2.)} = \frac{a.Sc.\lambda}{rb}.\sqrt{r^2 - \frac{c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}$$

$$+ \frac{c.Sc.\lambda}{rb}.\sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}; \text{ ergo } rb = a.\sqrt{r^2 - \frac{c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}$$

$$+ c.\sqrt{r^2 - \frac{a^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}, \ \& \text{ quadrando } r^2b^2 - 2rba.\sqrt{r^2 - \frac{c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}$$

$$+ a^2r^2 - \frac{a^2c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2} = c^2r^2 - \frac{a^2c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}, \text{ ideft } r^2.\overline{b^2 + a^2 - c^2}$$

$$= 2rba.\sqrt{r^2 - \frac{c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}; \ \& \text{ quadrando iterum } r^4.\overline{b^2 + a^2 - c^2}^2$$

=

$= 4r^4b^2a^2 - 4r^2a^2c^2.\overline{Sc.\lambda}^2$, & $\overline{Sc.\lambda}^2 = \frac{r^2}{4a^2c^2}.\overline{4b^2a^2 - \overline{b^2 - a^2 + c^2}^2} =$

$\frac{r^2}{4a^2c^2}.\overline{2b^2a^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$, & $Sc.\lambda =$

$\frac{r}{2ac}.\sqrt{\overline{a+b+c}.\overline{a+b-c}.\overline{a-b+c}.\overline{-a+b+c}}$. Eadem methodo reliquorum angulorum sinus facile invenientur.

45. Idem problema solvi etiam potest per cosinuum formulas, iisdem retentis denominationibus. Etenim $Cc.\lambda = -Cc.\overline{\pi+\mu} = \frac{-Cc.\pi.Cc.\mu + Sc.\pi.Sc.\mu}{r}$;

& substitutis valoribus antea inventis, $r.Cc.\lambda = -\sqrt{r^2 - \frac{c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}.$

$\sqrt{\frac{r^2 - a^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}} + \frac{ac}{b^2}.\overline{Sc.\lambda}^2$, & quadrando $\overline{r^2 - c^2.\frac{\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}}.\overline{r^2 - a^2.\frac{\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}} =$

$= \overline{\frac{ac}{b^2}.\overline{Sc.\lambda}^2 - r.Cc.\lambda}^2$; & $r^4 - \frac{r^2a^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2} - \frac{r^2c^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}$

$+ \frac{a^2c^2}{b^4}.\overline{Sc.\lambda}^4 = \frac{a^2c^2}{b^4}.\overline{Sc.\lambda}^4 - \frac{2rac}{b^2}.\overline{Sc.\lambda}^2.Cc.\lambda + r^2.\overline{Cc.\lambda}^2$, sive

$r^4 - r^2.\overline{Cc.\lambda}^2 = \frac{r^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}.\overline{a^2 + c^2} - \frac{2rac}{b^2}.\overline{Sc.\lambda}^2.Cc.\lambda$, idest

$r^2.\overline{Sc.\lambda}^2 = \frac{r^2.\overline{Sc.\lambda}^2}{b^2}.\overline{a^2 + c^2} - \frac{2arc}{b^2}.\overline{Sc.\lambda}^2.Cc.\lambda$; ergo

$r^2b^2 = r^2.\overline{a^2 + c^2} - 2arc.Cc.\lambda$; demum $Cc.\lambda = \frac{r}{2ac}.\overline{a^2 + c^2 - b^2}$. Ita etiam cosinus reliquorum angulorum poterunt inveniri.

46. Hanc modo inivimus viam potius ut calculi trigonometrici praxis, & usus ostenderetur, quam ut angulos trianguli inveniremus, qui expeditius sane obtineri possunt. Etenim si ex puncto C in latus oppositum perpendicularis CD (*Fig.* 12.) ducatur, & eædem quæ antea denominationes retineantur, erit $r : Cc.\lambda :: c : BD = \frac{c.Cc.\lambda}{r}$; at (Eucl. lib. 2. prop. 13.) $\overline{CA}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{CB}^2$

— 2

$- 2AB \cdot BD$, seu $b^2 = a^2 + c^2 - \frac{2ac \cdot Cc.\lambda}{r}$; ergo $Cc.\lambda = \frac{r}{2ac} \cdot \overline{a^2 + c^2 - b^2}$, ut supra; eritque $BD = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, & $DA = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$; & $DC = \frac{\sqrt{\overline{a+b+c} \cdot \overline{a+b-c} \cdot \overline{a-b+c} \cdot \overline{-a+b+c}}}{2a}$; adeoque area trianguli $= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}}$.

47. Problema quartum. In triangulo ABC data duorum laterum AB, AC (*Fig.* 10.) summa, dato angulo ab ipsis lateribus non comprehenso B, & data CE intercepta inter angulum alium, & perpendicularem AE ductam ex vertice A in BC, invenire latera omnia, angulos A, C, & aream trianguli. Sint hæ denominationes $BA = x$, $CE = b$, summa laterum data $= a$, angulus $ABC = \pi$. Erit $r : Sc.\pi :: x : AE = \frac{x \cdot Sc.\pi}{r}$, $AC = a - x$; igitur $\overline{a-x}^2 = \frac{x^2 \cdot \overline{Sc.\pi}^2}{r^2} + b^2$, seu $\overline{r^2 - \overline{Sc.\pi}^2} \cdot x^2 - 2r^2 a x = r^2 \cdot \overline{b^2 - a^2}$; at $r^2 - \overline{Sc.\pi}^2 = \overline{Cc.\pi}^2$; ergo $x^2 - \frac{2r^2 a x}{\overline{Cc.\pi}^2} = \frac{r^2 b^2 - r^2 a^2}{\overline{Cc.\pi}^2}$, completoque primi membri quadrato $x^2 - \frac{2r^2 a}{\overline{Cc.\pi}^2} \cdot x + \frac{r^4 a^2}{\overline{Cc.\pi}^4} = \frac{r^4 a^2}{\overline{Cc.\pi}^4} + \frac{r^2 b^2 - r^2 a^2}{\overline{Cc.\pi}^2} = \frac{a^2 r^2 \cdot \overline{Sc.\pi}^2}{\overline{Cc.\pi}^4} + \frac{r^2 b^2}{\overline{Cc.\pi}^2}$ (est enim sicuti $\overline{Sc.\pi}^2 = r^2 - \overline{Cc.\pi}^2$, ita $\frac{a^2 r^2 \cdot \overline{Sc.\pi}^2}{\overline{Cc.\pi}^4} = \frac{r^4 a^2}{\overline{Cc.\pi}^4} - \frac{r^2 a^2}{\overline{Cc.\pi}^2}$) $= \frac{a^2 \cdot \overline{Tc.\pi}^2 + r^2 b^2}{\overline{Cc.\pi}^2}$, quum sit $\frac{r^2 \cdot \overline{Sc.\pi}^2}{\overline{Cc.\pi}^2} = \overline{Tc.\pi}^2$; ergo erit $x = \frac{r^2 a}{\overline{Cc.\pi}^2} \pm \sqrt{\frac{a^2 \cdot \overline{Tc.\pi}^2 + r^2 b^2}{\overline{Cc.\pi}^2}} = AB$, & $AC = a - x = a - \frac{r^2 a}{\overline{Cc.\pi}^2} \mp \sqrt{\frac{a^2 \cdot \overline{Tc.\pi}^2 + r^2 b^2}{\overline{Cc.\pi}^2}}$, $BC = \frac{ra}{Cc.\pi} \mp \frac{\sqrt{a^2 \cdot \overline{Tc.\pi}^2 + r^2 b^2}}{r} + b$.

48. Animadvertendum hic est ad solutionem problematis, prout initio pro-

P posi-

positum fuit, oportere signo inferiori radicis uti; secus valor AC negativus evaderet: adeoque, quum positivi, & negativi summa in subtractionem transeat, esset a æqualis non summæ, sed differentiæ laterum AB, AC. Hinc superius radicis signum problemati inservit, in quo data laterum AB, AC differentia, reliqua, ut supra, quærenda proponuntur; dummodo tamen valoris AC signa mutentur, & veluti positivus habeatur. Infixum itaque id tibi animo sit, etiam in formulis subsequentibus problema hoc nostrum inferius signum postulare.

49. Quum igitur nota sint nobis latera, adeoque etiam sinuum angulorum, qui ipsis opponuntur, ratio; quumque præterea datus sit anguli B sinus, patet, reliquos angulos pariter notos esse. Valor autem perpendicularis AE

$$\times.\frac{Sc.\pi}{r}=\frac{a.Tc.\pi}{Cc.\pi}\pm Tc.\pi\frac{\sqrt{\overline{Tc.\pi}^2\cdot a^2+b^2r^2}}{r}$$; ergo area Trianguli ABC

$$=\frac{AE.BC}{2}=\overline{\frac{ra}{2Cc.\pi}\pm\frac{\sqrt{a^2.\overline{Tc.\pi}^2+r^2b^2}}{2r}}+\frac{b}{2}.$$

$$\overline{\frac{a.Tc.\pi}{Cc.\pi}\pm Tc.\pi.\frac{\sqrt{\overline{Tc.\pi}^2.a^2+b^2r^2}}{r}}.$$

50. Problema quintum. Data basi BC $=b$, reliquorum laterum summa BA + AC $=a$, & angulo A $=\varepsilon$, reliqua invenire. Ducatur BD perpendicularis ad AC, sitque AB $=x$, erit AC $=a-x$. Habemus $r:Cc.\varepsilon::x:$ AD $=\frac{x.Cc.\varepsilon}{r}$; sed $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2AC.AD$; ergo b^2

$$=x^2+a^2-2ax+x^2+\frac{2x^2.Cc.\varepsilon}{r}-\frac{2ax.Cc.\varepsilon}{r};$$ idest $x^2-ax=\frac{r.\overline{b^2-a^2}}{2.\overline{r+Cc.\varepsilon}}$;

ergo $$\overline{x-\frac{a}{2}}^2=\frac{r.\overline{b^2-a^2}}{2.\overline{r+Cc.\varepsilon}}+\frac{aa}{4}=\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\varepsilon}}{4.\overline{r+Cc.\varepsilon}};$$ &

$$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\varepsilon}}{r+Cc.\varepsilon}}=AB;$$ igitur $a-x=$

$\frac{1}{2}a\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\varepsilon}}{r+Cc.\varepsilon}}=$ AC. Ex his formulis infertur duplex radicis signum non duplex indicare triangulum, sed idem inversum. Nos proinde deinceps signo tantum superiore utemur.

51. Anguli facillime reperiuntur his adhibitis proportionibus

$$b:\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\varepsilon}}{r+Cc.\varepsilon}}::Sc.\varepsilon$$ ad sinum anguli C $=$

Sc

$\frac{Sc.\epsilon}{2b}.a+\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\epsilon}}{r+Cc.\epsilon}}$. Similiter $b:\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\epsilon}}{r+Cc.\epsilon}}$

$::Sc.\epsilon$ ad ſinum anguli B $=\frac{Sc.\epsilon}{2b}.a-\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\epsilon}}{r+Cc.\epsilon}}$.

52. Supereſt determinanda area trianguli. Inveniatur igitur normalis B D analogia $r:Sc.\epsilon::\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\epsilon}}{r+Cc.\epsilon}}:$ BD $=$

$\frac{Sc.\epsilon}{2r}.a+\sqrt{\frac{2rb^2-a^2.\overline{r-Cc.\epsilon}}{r+Cc.\epsilon}}$, quæ ducta in $\frac{AC}{2}$ dabit aream triangulorem $=\frac{Sc.\epsilon}{8r}.a^2-\frac{2rb^2+a^2.\overline{r-Cc.\epsilon}}{r+Cc.\epsilon}=\frac{Sc.\epsilon}{4}.\frac{\overline{aa-bb}}{r+Cc.\epsilon}$; ſed $\frac{Sc.\epsilon}{r+Cc.\epsilon}=$

$\frac{Tc.\frac{1}{2}\epsilon}{r}$ (prop. 13.); ergo area $=\frac{Tc.\frac{1}{2}\epsilon.\overline{a^2-b^2}}{4r}$. Omnia igitur inventa ſunt, quæ erant invenienda.

53. Problema ſextum. Data laterum BA, AC, BC ſumma, ſive trianguli ABC perimetro, cujus dimidium vocetur $=a$, dataque inſuper trianguli area $=ab$, & angulo A $=\epsilon$, reliqua invenire. Ducta normali B D, ponimus BA $=x$. Jam vero eſt $r:Sc.\epsilon::x:$ BD $=\frac{x.Sc.\epsilon}{r}$, per quam lineam ſi duplum areæ, nempe $2ab$ dividatur, prodibit latus A C; ergo A C $=\frac{2rab}{x.Sc.\epsilon}$. Præterea eſt $r:Cc.\epsilon::x:$ AD $=\frac{x.Cc.\epsilon}{r}$; igitur DC $=\frac{2rab}{x.Sc.\epsilon}-\frac{x.Cc.\epsilon}{r}$; ſed $\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{DC}^2$; ergo BC $=$

$$\sqrt{\frac{x^2.\overline{Sc.\epsilon}^2}{r^2}+\frac{x^2.\overline{Cc.\epsilon}^2}{r^2}+\frac{4r^2a^2b^2}{x^2.\overline{Sc.\epsilon}^2}-\frac{4ab.Cc.\epsilon}{Sc.\epsilon}}$$

; at $\overline{Sc.\epsilon}^2+\overline{Cc.\epsilon}^2=r^2$; ergo BC $=\sqrt{x^2+\frac{4r^2a^2b^2}{x^2.\overline{Sc.\epsilon}^2}-\frac{4ab.Cc.\epsilon}{Sc.\epsilon}}$. Igitur BA + AC + BC $=x$

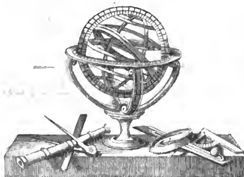
$+\frac{2rab}{x.Sc.\epsilon}+\sqrt{x^2+\frac{4r^2a^2b^2}{x^2.\overline{Sc.\epsilon}^2}-\frac{4ab.Cc.\epsilon}{Sc.\epsilon}}=2a$. Fiat $x+\frac{2rab}{x.Sc.\epsilon}=z$,

 quæ

quæ fummam exhibebit laterum BA+AC; & quadrando $x^2 + \frac{4r^2a^2b^2}{x^2 . \overline{Sc.e}^2} = z^2 - \frac{4rab}{Sc.e}$; factis fubftitutionibus multo eft fimplicior æquatio

$$z + \sqrt{z^2 - 4ab . \frac{\overline{r + Cc.e}}{Sc.e}} = 2a;$$ at $\frac{r + Cc.e}{Sc.e} = \frac{r}{Tc.\frac{1}{2}e}$; ergo

$$\sqrt{z^2 - \frac{4abr}{Tc.\frac{1}{2}e}} = 2a - z,$$ & $z^2 - \frac{4abr}{Tc.\frac{1}{2}e} = 4a^2 - 4az + z^2$; feu $z = a + \frac{rb}{Tc.\frac{1}{2}e}$ = BA+AC; adeoque latus BC $= a - \frac{rb}{Tc.\frac{1}{2}e}$. Igitur problema hoc ad antecedens redactum eft, in quo ex data bafi, & fumma laterum reliquorum cum angulo ab ipfis intercepto, reliqua invenienda proponebantur. Hifce traditis videmur nobis, quantum fatis eft, principia calculi finuum, & cofinuum ante oculos pofuiffe, ejufque ufum, qui fane in univerfa analyfi mirus eft, indicaffe. Supereft, ut juvenes, qui hæc addifcunt, etiam atque etiam hortemur, ut in eo fe diligenter exerceant; quandoquidem deinceps fæpe operam dabimus, ut hinc difficiliorum etiam problematum faciles, elegantefque folutiones obtineamus.



LIBER

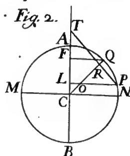


Fig. 4.

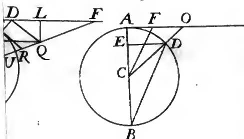
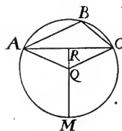


Fig. 6.



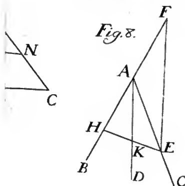
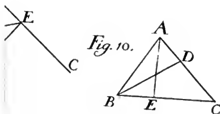
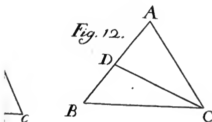


Fig. 8.
F
N
A
C
H
E
K
B
D
C



E
A
Fig. 10.
D
C
B
E
C



A
Fig. 12.
D
B
C
c

LIBER SECUNDUS

DE LINEIS, SEU LOCIS SECUNDI GRADUS

ET DE ÆQUATIONIBUS TERTII GRADUS, ET QUARTI.

CAPUT PRIMUM.

De variis linearum secundi gradus speciebus, ac peculiariter de Parabola.

I. Nullam aliam primi gradus lineam esse præter rectam, superiori libro satis est demonstratum, ubi vidimus illius ordinis esse $my + nx + p = 0$ canonicam æquationem, in qua m, n, p vel positivæ, vel negativæ accipi possunt, vel etiam nullæ. Nunc ad lineas secundi gradus accedentes ante omnia canonicam earum æquationem exhibendam ducimus, & accurate perpendendam. Ea autem est $\begin{matrix} y^2 + lxy + mx^2 + q = 0 \\ + ny + px \end{matrix}$. In hac loci omnes hujus ordinis continentur, si illos excipias, ubi deest terminus y^2, de quibus postea. Ut curvæ per formulas indicatæ diversæ sint inter se, non sufficit immutatio coefficientium unius termini, aut plurium; fieri enim potest, ut inde oriatur tantum immutatio verticis abscissarum, aut earum lineæ, curvæ interim specie eadem prorsus manente. Itaque ut variæ linearum species determinentur, quæ a formula tradita exprimuntur, aliquanto majore industria uti opus erit.

2. Sit (*Fig.* 1.) CED curva quælibet ab æquatione nostra expressa, in qua $AB = x$, $BC = y$. Facile est cognoscere duos esse oportere valores ordinatæ y, & hos in figura exhibere BC, BD. His positis, fiat $y + \frac{lx + n}{2} = u$, unde $\begin{matrix} y^2 + lxy \\ + ny \end{matrix} = u^2 - \frac{l^2x^2}{4} - \frac{lnx}{2} - \frac{n^2}{4}$: substitutione adhibita erit igitur formula in hanc mutata $\begin{matrix} u^2 - \frac{l^2}{4}.x^2 - \frac{ln}{2}.x + q = 0 \\ + mx^2 + px - \frac{n^2}{4} \end{matrix}$. Inspiciendum nunc est, ex hac formulæ conversione, quid novi oriatur in figura. Primo quidem ut valorem u inveniamus, addere oportet rectæ $BC = y$ quantitatem $\frac{n}{2}$. Id fiet, si ex puncto A ducatur $AF = \frac{n}{2}$ parallela lineæ CB & ex F ducatur FG parallela AB;

ita

ita enim erit $CG = y + \frac{n}{2}$, existente $FG = AB = x$. Deinde huic inventæ CG addenda est quantitas $\frac{lx}{2}$, quod hoc pacto præstabimus. Fiat $FI : IK :: a : l$, posita IK parallela CD, & per duo puncta F, K ducatur FKH; erit igitur $GH = \frac{lx}{2}$, adeoque $CH = y + \frac{n}{2} + \frac{lx}{2} = u$, FG permanente $= x$.

3. At quoniam æquatio habetur inter duas $CH = u$, $FG = x$, quæ veræ coordinatæ non sunt, quum in lineam abscissarum non desinant, ideo quærenda erit æquatio inter $CH = u$, & FH, quam vocabimus $= z$; supponamus itaque rationem $FI : FK$, quæ nota est ex constructione, esse ut $2 : k$; ergo erit $x : z :: 2 : k$, & $x = \frac{2z}{k}$, qui valor in formula substitutus dabit

$$\left.\begin{array}{l} u^2 - \frac{l^2}{k^2} z^2 - \frac{lnz}{k} - \frac{n^2}{4} \\ + \frac{4m}{k^2} z^2 + \frac{2p}{k} z + q \end{array}\right\} = 0.$$

Manifestum cuilibet esse potest, nos in hac æquatione invenienda nihil præstitisse aliud, quam generalem æquationem a linea abscissarum AB ad FH transferre. Hinc æquatio nuper inventa, licet in ea duo termini desint, non ideo universalis est minus, aut minus curvas omnes secundi gradus complectitur.

4. Ex æquatione constare potest, duos esse u valores inter se æquales alterum positivum, alterum negativum; ergo sicuti $CH = DH$, ita lineæ omnes parallelæ CD ad curvam hinc inde terminatæ bifariam secabuntur a linea FH, quæ ideo diameter appellatur. Hinc si ex vertice L ducatur linea parallela ad CD, ea erit tangens; si enim curvam in aliquo alio puncto secaret, jam non bifariam a diametro divideretur.

5. In ultimo inventa æquatione summa cura necesse est perpendere coefficientem secundi termini, seu quadrati z^2; ex eo scilicet integra pendet curvarum divisio. Coefficiens ille est $\frac{4m}{k^2} - \frac{l^2}{k^2}$. Jam vero tres casus esse possunt; nempe ut sit $m = \frac{l^2}{4}$, in qua hypotesi secundus terminus fit zero; deinde ut sit $m > \frac{l^2}{4}$, secundo termino positivo manente, aut tandem ut sit $m < \frac{l^2}{4}$, & secundus terminus per consequens negativus. Nunc mutata u in y, & z in x tres propositi casus tribus hisce formulis continentur.

$y^2 - bx - c = 0$ posita quantitate $4m = l^2$

$y^2 + ax^2 - bx - c = 0$ posita $-\frac{l^2}{k^2} + \frac{4m}{k^2} = a$

$y^2 - ax^2 - bx - c = 0$ posita $\frac{l^2}{k^2} - \frac{4m}{k^2} = a$

& in

& in omnibus assumpta $\frac{ln-2p}{k}=b$, & $\frac{n^2}{4}-q=c$. Species a semper positiva accipi debet, duæ reliquæ b, c vel positivæ, vel negativæ prout lubet, vel etiam nullæ.

6. In prima e tribus formulis, si x in infinitum augeri intelligatur, & ambæ b, & x positivæ sint, aut ambæ negativæ, constat duos esse valores y reales & inter se æquales alterum positivum, alterum negativum, at si altera ex speciebus b, x sit positiva, & altera negativa, valores y fore immaginarios; ergo habebit curva duos tantum ramos in infinitum a se invicem recedentes. In secunda æquatione si x aut positiva, aut negativa fiat infinita, valores y semper prodeunt imaginarii; ergo curva nullum habet infinitum ramum, & determinatis limitibus continetur. In tertia tandem si x vel positiva vel negativa in infinitum augeatur, semper y duos habebit reales valores; curva ergo quatuor prædita erit ramis in infinitum abeuntibus.

7. Quoniam evidens omnino est; curvam, quæ duos habeat ramos infinitos, eandem non esse ac illam, quæ nullum hujusmodi ramum habet, & harum neutram cum ea convenire, quæ quatuor infinitis ramis gaudet, hinc tres inter se diversæ curvarum species oriuntur, quæ loca secundi gradus appellantur. Prima species eas curvas amplectitur, quæ duobus tantum ramis abeunt in infinitum, & Parabolæ vocantur; species altera est earum, quæ nullum infinitum habent ramum & Ellipses dicuntur: tertia & postrema continet Hyperbolas, eas scilicet curvas, quæ ramis quatuor tendunt in infinitum.

8. Verum ad generalem formulam paulisper revertamur. Ostensum est modo, curvam esse parabolam, quoties sit $m=\frac{l^2}{4}$; at in hac hypothesi termini omnes simul sumpti, in quibus ambarum indeterminatarum exponentium summa $=2$, idest $y^2+lxy+mx^2$, est perfectissimum quadratum, adeoque in duos æquales factores resolvi potest; igitur quotiescumque hæc formula possit in duos æquales factores resolvi, curva erit parabola. Si vero sit $m-\frac{l^2}{4}$ quantitas positiva, quo in casu ellipsim exhiberi diximus, tunc $y^2+lxy+mx^2$ in duos reales factores resolvi non poterit; ergo quum ea formula in reales factores resolvi non poterit, curva semper erit ellipsis. Tandem formula $y^2+lxy+mx^2$ in reales factores resolvitur, si fiat $m-\frac{l^2}{4}$ quantitas negativa, quam hypothesim ad hyperbolam pertinere jam vidimus; ergo quum formula resolvi poterit in duos reales factores inæquales, æquationis curva erit hyperbola. Hujusmodi animadversio efficit, ut in ipsa generali formula tres ipsas curvarum species nullo possimus negotio deprehendere.

9. Sed jam de singulis curvis ut agamus, a parabola initium ducimus. Ejus formula est igitur $y^2-bx-c=o$, seu translatis terminis $y^2=bx+c=b.x+\frac{c}{b}$. Ponamus $x+\frac{c}{b}=z$, quam suppositionem nihil aliud præstare vi-

di-

dimus, quam ab uno ad aliud punctum abscissarum verticem transferre; erit igitur $y^2 = bz$, seu, si littera x pro z utamur $y^2 = bx$. Si (*Fig.2.*) AF sit linea abscissarum, & earum vertex A, quum in eo ipso puncto A sit $x = o$, necesse est etiam eidem respondere $y = o$; at crescente x duos esse constat valores y æquales inter se positivum alterum, alterum negativum; veluti si fiat $AF = x$; erit FD y positiva æqualis FE, quæ est y negativa, ita ut quo major sit abscissa, eo etiam magis ordinatarum valor augeatur, & si illa infinita sumatur, hæ quoque evadant infinitæ, unde duos exoriri oportet ramos in infinitum abeuntes. Si vero x negativa accipiatur ex A versus T, jam valor y erit imaginarius, igitur etiam curva erit imaginaria. Hæc in hypothesi dicta sunt, in qua b (quam deinceps parametrum parabolæ vocabimus, quæque rectangulum efficit cum abscissa æquale quadrato ordinatæ) sit positiva. Etenim si negativa esset, ut formulam haberemus $y^2 = -bx$, tunc reales y valores responderent negativis abscissis, imaginarii autem positivis.

10 Recta AF cordas omnes parallelas DE bifariam secans diameter appellatur, & axis si præterea secet perpendiculariter. Punctum A est vertex diametri, seu axis, per quem si recta ducatur ordinatis parallela, ea erit tangens curvæ; si enim alio in puncto eam secaret, jam non omnes parallelæ DE bifariam dividerentur. Etsi angulus ordinatarum quicumque esse possit, tamen ut magis elegantiæ demonstrationum, & simplicitati consulamus, cum hic rectum initio assumimus, ita ut diameter AF sit axis, & duo rami AD, AE ita in omnibus similes & æquales, ut, si alter alteri superimponatur, perfecte congruant.

11. His præmissis, sit recta quælibet DG, quæ cum axe angulum quemlibet efficiat $DGF = \mu$, ut æquationem quæramus inter AG, DG. Sit $AG = z$, $DG = u$; habebimus $r : Sc.\mu :: u : y = \frac{u.Sc.\mu}{r}$, & præterea $r : Cc\mu :: u : FG = \frac{u.Cc.\mu}{r}$; ergo erit $x = z - \frac{u.Cc.\mu}{r}$, & inventis valoribus in formula $bx = y^2$ substitutis, nova exurget æquatio $bz - \frac{bu.Cc.\mu}{r} = \frac{u^2.\overline{Sc.\mu}^2}{r^2}$, quam quærebamus.

12. Suppone modo z, idest AG imminui paullatim, & eodem tempore lineam DN semper hinc inde curva definitam, motu sibi parallelo sequi punctum G; constat, quum facta fuerit $z = o$, DN transisse in AH. At ex æquatione, si fiat $z = o$, duos invenimus valores $u = o$, $u = -\frac{br.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$; igitur $AH = \frac{br.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$. Signum negativum ostendit, lineam cadere in partes u negativæ; u vero positiva evanuit, quod ex ipso motu lineæ satis ostenditur.

13. Sed æquationem nostram ita exponamus $\frac{r^2bz}{\overline{Sc.\mu}^2} = u^2 + \frac{rbu.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$, & addi-

addito dimidii coefficientis quadrato $\frac{r^2 b}{Sc.\mu}\cdot z + \frac{br^2.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^4} = u + \frac{\overline{rb.Cc.\mu}^2}{2.\overline{Sc.\mu}^2}$.

Fiat $u + \frac{rb.Cc.\mu}{2.\overline{Sc.\mu}^2} = y$, ut fit $\frac{r^2 b}{\overline{Sc.\mu}^2}\cdot z + \frac{br^2.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^4} = y^2$, & inspiciamus quid oriatur novi ex hac substitutione. Ut y obtineatur, necesse est tantum addere quantitati $u = DG$ quantitatem $\frac{rb.Cc.\mu}{2.\overline{Sc.\mu}^2}$, quæ est dimidium rectæ AH, igitur AH bifariam divisa in K, & ducta KL axi parallela, erunt KL $= z$, DL $= y$; hoc ergo unum accidit, ut æquatio ad aliam abscissarum lineam transferatur priori parallelam.

14. Si fiat nunc hypothesis $y = o$ invenimus $z = -\frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$; igitur producta LK donec in I curvam secet, erit KI $= \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, signo $-$ indicante, quantitatem illam ex parte z negativæ sumi oportere. Sit hypothesis altera $z + \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2} = x$, in qua punctum immutatur originis abscissarum; oritur æquatio $\frac{r^2 b}{\overline{Sc.\mu}^2}\cdot x = y^2$; & quoniam IK $= \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, erit IL $= x$. Igitur IL est diameter bifariam dividens quascumque DN, cujus vertex I, & cum qua ordinatæ angulum efficiunt $= \mu$, parametro $= \frac{r^2 b}{\overline{Sc.\mu}^2}$, quam vocabimus $= m$, ut fit æquatio $mx = y^2$ illi perfecte similis, quæ axem respicit.

15. Plura hic omittimus problemata, quæ addi possent, quæque ex præmisso calculo facillime solverentur. Duo tamen silentio præterire non licet, quippe quorum usus fit maximus in analyticis inquisitionibus. Dato axe AF, illius vertice A, & parametro $= b$, invenire diametrum, cum qua ordinatæ angulum contineant $= \mu$, ejusque parametrum. Ex A axis vertice ducatur in angulo HAF $= \mu$ linea AH, eaque fiat $= \frac{br.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$. Hæc divisa bifariam in K ducatur axi parallela KL, quæ erit diametri positio. Capiatur deinde

$KI = \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, quo facto prodit necessario parameter $= \frac{br^2}{\overline{Sc.\mu}^2}$: & omnia, quae postulabantur, inventa sunt. Sicuti autem AH ex utraque axis parte duci potest, ita constat, duas esse problematis solutiones.

16. Problema alterum sit: data diametro IL, ejus vertice I, parametro $= m$ & angulo ordinatarum $= \mu$, axem, axis verticem, ipsiusque parametrum invenire. Quoniam $\frac{r^2 b}{\overline{Sc.\mu}^2} = m$, erit $b = \frac{m.\overline{Sc.\mu}^2}{r^2}$, unde axis parameter determinatur. Hoc habito si abscindatur $IK = \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, & in dato angulo ducatur $KA = \frac{rb.Cc.\mu}{2.\overline{Sc.\mu}^2} = \frac{m.Cc.\mu}{2r}$, erit A vertex quaesitus, ex quo demissa AF parallela ad IL, ea erit axis. Animadvertendum tamen est, punctum A verticem non esse axis, nisi angulus IKA sit acutus.

17. Quod ad tangentem spectat, haec tantum addimus. In aequatione, quam supra invenimus inter lineas quascumque $AG = z$, & $DG = u$, idest in aequatione $\frac{r^2 bz}{\overline{Sc.\mu}^2} = u^2 + \frac{rbu.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$, duos valores u tunc facto calculo aequales esse deprehendentur, quum erit $\frac{r^2 bz}{\overline{Sc.\mu}^2} + \frac{r^2 b^2.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^4} = o$, seu quum erit

$z = -\frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$. Si ergo accipiatur $AT = \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$ (signum enim $-$ indicat, eam quantitatem sumendam ex parte z negativae) & ducatur IT, haec parabolam tanget in puncto I, adeoque ordinatis DN erit parallela. Ex eodem puncto I ad axem ordinetur IS, voceturque $AS = x$, $IS = y$, $AT = z$, unde fit $z = \frac{b.\overline{Cc.\mu}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, & $TS = x + z$. Quoniam ex similitudine triangulorum TIS, DGF, $x+z : y :: Cc.\mu : Sc.\mu$, erit $\frac{\overline{x+z}^2}{y^2} = \frac{\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\mu}^2}$; ergo

$z =$

$z = \frac{b.\overline{x+z}^2}{4y^2}$: sed $bx = y^2$; ergo $z = \frac{\overline{x+z}^2}{4x}$, seu $4xz = x^2 + 2xz + z^2$, seu $x^2 - 2xz + z^2 = 0$, & radice extracta $x - z = 0$, unde $x = z$, sive AT = AS. Hinc relate ad axem pulcherrima tangentis fit nota proprietas, nempe si ex quocumque puncto I curvæ tangens ducatur, quæ axi occurrat in T, & in axem ordinata IS demittatur, discimus, lineam TS semper a parabolæ vertice A bifariam dividi. Hinc etiam sequitur, quod si AR parabolam tangat in vertice A, & producatur LI in R, recta ipsa AR a tangente IT bifariam secabitur in puncto Q. Etenim ex similibus triangulis est TA : AQ :: TS : SI; atqui TA est dimidium TS; ergo AQ erit dimidium SI = AR.

18. Hujusmodi proprietas ad quascumque diametros pertinet. Sit AF diameter quædam, cum qua ordinatæ DF $= y$ angulum faciant DFA $= \pi$, & æquatio illius $mx = y^2$. Ducatur linea quæcumque DG in angulo DGF $= \mu$, unde erit angulus GDF $= \pi - \mu$. Ut æquationem habeamus inter AG $= z$, & DG $= u$, fiat $y : u :: Sc.\mu : Sc.\pi$; ergo $y = \frac{u.Sc.\mu}{Sc.\pi}$; iterum u : FG :: $Sc.\pi : Sc.\overline{\pi-\mu}$; ergo FG $= \frac{u.Sc.\overline{\pi-\mu}}{Sc.\pi}$; ergo $x = z - \frac{u.Sc.\overline{\pi-\mu}}{Sc.\pi}$. Facta itaque valorum substitutione, erit æquatio $mz - \frac{mu.Sc.\overline{\pi-\mu}}{Sc.\pi} = \frac{u^2.\overline{Sc.\mu}^2}{\overline{Sc.\pi}^2}$, seu $\frac{mz.\overline{Sc.\pi}^2}{\overline{Sc.\mu}^2} = u^2 + \frac{mu.Sc.\pi.Sc.\overline{\pi-\mu}}{\overline{Sc.\mu}^2}$. Ex hujus resolutione deprehendetur, valores u æquales esse non posse (quod sane requiritur, ut ordinata in tangentem transeat), nisi fit $\frac{m.\overline{Sc.\pi}^2}{\overline{Sc.\mu}^2}.z + \frac{m^2.\overline{Sc.\pi}^2.\overline{Sc.\overline{\pi-\mu}}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^4} = 0$, sive $z = -\frac{m.\overline{Sc.\overline{\pi-\mu}}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$. Itaque si, ut signum — ostendit, accipiatur AT $= \frac{m.\overline{Sc.\overline{\pi-\mu}}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, & ducatur TI, hæc curvam tanget in puncto I. Vocetur nunc TA $= z$, ut fit $z = \frac{m.\overline{Sc.\overline{\pi-\mu}}^2}{4.\overline{Sc.\mu}^2}$, ordinata IS $= y$, abscissa AS $= x$. Habebimus quemadmodum antea $z + x : y :: Sc.\overline{\pi-\mu} : Sc.\mu$; ergo

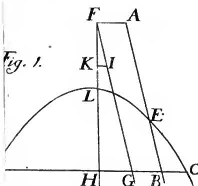
$z+$

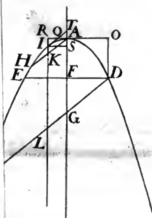
$\frac{\overline{z+x}^2}{y^2} = \frac{\overline{Sc.\overline{\pi-\mu}}^2}{\overline{Sc.\mu}^2}$, & $z = \frac{m.\overline{z+x}^2}{4y^2} = \frac{\overline{z+x}^2}{4x}$, unde $z=x$, & reliqua fluent consectaria.

19. Posita AO tangente, & A vertice diametri AF cujuslibet, ducatur DO ipsi diametro parallela ex puncto D, ex quo pariter intelligamus ductam ordinatam DF. Quoniam demonstratum est rectangulum ex parametro, & abscissa æquare quadratum ordinatæ, verum erit pariter, rectangulum sub parametro, & recta DO æquare quadratum AO; Igitur vocatis $AO=x$, $OD=y$, & parametro $=m$, erit $x^2=my$. Patet hanc æquationem ad parabolam pertinere, sed abscissas x in tangente accipiendas, & ordinatas y esse rectas diametro parallelas.

20. Hinc facile est demonstrare, æquationem generalissimam semper esse ad parabolam, quotiescumque desit in ea præter quadratum y^2 etiam rectangulum xy. Iis enim terminis deficientibus poterit ea æquatio semper ad hanc formam redigi $x^2+px+ny+q=o$; ergo addito & subtracto $\frac{pp}{4}$, erit $x^2+px+\frac{pp}{4}+ny+\begin{matrix}q\\-\frac{pp}{4}\end{matrix}=o$. Si fiat $x+\frac{p}{2}=z$, quæ substitutio immutat tantum verticem abscissarum, habebimus $z^2+ny+\begin{matrix}q\\-\frac{pp}{4}\end{matrix}=o$, seu $z^2=\frac{p^2}{4}-q-ny = n.\overline{\frac{p^2}{4n}-\frac{q}{n}-y}$. Si ponamus iterum $\frac{p^2}{4n}-\frac{q}{n}-y=u$, quæ substitutio quum nihil præstet aliud, quam ex nota recta abscindere y, æquationem ad lineam abscissarum priori parallelam transferet; orietur $z^2=nu$ æquatio ad parabolam, in qua abscissæ z in tangente capiuntur, ordinatæ autem u parallelæ ducuntur diametro, cujus est parameter $=n$. Animadvertere hic plane oportet, curvam realem esse, si posita n positiva, u etiam positiva accipiatur, & contra si u sit negativa, curvam esse imaginariam. Viceversa si ponas n negativam, & u positivam accipias, curva erit imaginaria, si negativam realis. Hæc patent vel leviter consideranti. Hactenus de Parabola egimus omnium linearum secundi gradus facillima; ad alias nunc est transeundum, quæ majorem sane requirunt industriam.

CA-


Fig. 1.
F
A
K
I
L
E
H
G
B
C


R
Q
T
A
O
I
S
H
K
E
F
D
G
L

CAPUT SECUNDUM.

De Ellipsi.

1. Inspiciamus jam formulam secundam (Cap. I. N. 5.) $y^2+ax^2-bx-c=0$, sive $\frac{y^2}{a}+x^2-\frac{bx}{a}-\frac{c}{a}=0$, seu $\frac{y^2}{a}+x^2-\frac{bx}{a}-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}=0$, quam ad ellypsim pertinere diximus ramis infinitis carentem. Si transferamus originem abscissarum facto $x-\frac{b}{2a}=z$, oritur aequatio simplicior $\frac{y^2}{a}+z^2-\frac{b^2}{4a^2}=0$, seu $\frac{y^2}{a}=\frac{b^2}{4a^2}-z^2$. Patet y adeoque etiam curvam imagina-

$-\frac{c}{a}$ $+\frac{c}{a}$

riam necessario fore, quotiescumque $-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$ sit quantitas negativa. Nunc ut aequationem ad commodiorem formam perducamus, sit b^2 loco $\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}$, & $\frac{b^2}{c^2}$ loco $\frac{1}{a}$, & x loco z: ita erit $y^2=\frac{c^2}{b^2}.\overline{b^2-x^2}$.

2. Radice extracta est $y=\pm\frac{c}{b}\sqrt{b^2-x^2}$, unde discimus, ordinatae y duos esse valores positivum alium, alium negativum. (*Fig.* 1.) Si $x=0$, erit $y=\pm c$; ergo posita linea abscissarum CF, & C earum initio, si accipiatur linea $CB=Cb=c$ in quocumque tandem angulo cum linea abscissarum, puncta B, b ad curvam, de qua loquimur, pertinebunt. Si nunc supponamus x non amplius esse $=0$, sed paullatim crescere, sive id fiat positive, sive negative, quod rem non immutat, quantitas $\frac{c}{b}\sqrt{b^2-x^2}$ minui quoque paulatim debet, atque adeo etiam y, donec sit prorsus nulla, quum facta est $x=b$. Igitur si in linea abscissarum secemus $CA=Ca=b$, puncta A, a erunt in curva, ultra quos limites y, & curva fieret imaginaria. Necesse est ergo, curvam hanc spatio finito contineri, atque in se ipsam redire, ut in figura apparet.

3. Linea A a, quia rectas omnes parallelas ad Bb, & hinc inde ad curvam terminatas bifariam dividit, vocatur diameter, & eadem de causa diameter appellabitur Bb, quae pariter bifariam dividit parallelas omnes ad A a. Rem ita se habere facillimum est ostendere; nam acceptis CF, & cf aequalibus, ex aequatione constat eosdem utrique respondere valores y; ergo $FD=fd$, adeoque dD aequalis, & parallela ad fF; atqui fF bifariam dividitur a Bb in puncto C; ergo

ergo etiam d D bifariam ab eadem dividetur in puncto O. Demonstrationem cuilibet alii parallelæ applicari posse, manifestum est. Duæ diametri A a, B b, quarum quælibet bifariam dividit rectas ad aliam parallelas, dicuntur diametri conjugatæ. Sciendum est etiam, quotiescumque diameter usurpatur tamquam linea determinata, intelligi etiam hinc inde per curvæ interſectionem definitam, ejusque ita acceptæ dimidium semidiametrum appellari.

4. Si antecedentem æquationem in analogiam vertamus, erit $b^2 - x^2 : y^2 :: b^2 : c^2$; unde constat, sumpta quacumque $CF = x$ esse rectangulum $aFA : \overline{FD}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$. Tertia proportionalis post A a, B b, quam voco $= c$, dicitur parameter diametri A a; unde habebimus $b^2 - x^2 : y^2 :: 2b : c$. Eadem æquatio potest ita disponi $\frac{b^2}{c^2} . \overline{c^2 - y^2} = x^2$; igitur $c^2 - y^2 : x^2 :: c^2 : b^2$, seu rectang. $bOB : \overline{OD}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$. Et inventa tertia proportionali post B b, A a, quæ vocabitur parameter diametri B b, erit $c^2 - y^2 : x^2 :: 2c$ ad parametrum inventam. Ex his facile apparet, eandem æquationem, easdemque proprietates ad utramque conjugatam diametrum pertinere. Nos deinceps parametris omissis formulas tantum, quæ respiciunt diametros, retinebimus.

5. Quamvis autem coordinatarum angulus pro libito assumi possit, illum tamen, ut in parabola præstitimus, rectum accipiemus, quo in casu diametri axes appellantur. Ratio cur id faciamus est, quod recto angulo assumpto, & eadem demonstrantur, quæ etiam ad obliquos angulos pertinent, & nitidiores profluunt calculi. In hac hypothesi si duos ellipseos semiaxes C A, C B æquales sint, quum sit $b = c$, erit etiam $b^2 - x^2 = y^2$; adeoque $b^2 = x^2 + y^2$, & $b = \sqrt{x^2 + y^2}$. Atqui si ducatur C D, ea erit $= \sqrt{x^2 + y^2}$; ergo $CD = b = CA$, quæ est circuli natura; ellipsis igitur, cujus duo axes æquales sint, est circulus.

6. Positis, ut antea $CF = x$, $FD = y$, $CA = b$, $CB = c$ æquationem nostram $\frac{b^2 y^2}{c^2} = b^2 - x^2$ attente pertractemus. Ducatur recta D G, quæ cum axe A a efficiat angulum $DGa = \mu$, sitque sinus totus $= r$. Vocabis $CG = z$, $DG = u$: habebimus $u : y :: r : Sc.\mu$, unde $y = \frac{u.Sc.\mu}{r}$; pariter $r : Cc.\mu :: u : FG = \frac{u.Cc.\mu}{r}$; ergo $CG = z = x + \frac{u.Cc.\mu}{r}$, adeoque $x = z - \frac{u.Cc.\mu}{r}$. Si valores isti x, y, quos modo invenimus, in æquatione substituantur, fiet illa $\frac{b^2 u^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{c^2 r^2} = b^2 - z^2 + \frac{2zu.Cc.\mu}{r} - \frac{u^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{r^2}$; ergo

u^2.

$$u^2 \cdot \frac{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{r^2 c^2} - \frac{2zu.Cc.\mu}{r} = b^2 - z^2.$$

7. Ex C, quod centrum ellipseos deinceps vocabimus, ducatur CM parallela DG, & supponamus punctum G successive moveri in linea CA, & DG motu sibi parallelo punctum G comitari, ita tamen ut semper hinc puncto G, illinc curva terminetur; patet quum G in C incidet, hoc est quum facta erit $CG = z = o$, lineam DG incidere in CM; at in hac hypothesi æquatio nostra ultima est $u^2 . \frac{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{r^2 c^2} = b^2$; ergo

$$u = \frac{rcb}{\sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}} = CM,$$ quam brevitatis gratia vocabimus $= n$. Ita æquatio erit $\frac{b^2}{n^2} . u^2 - \frac{2zu.Cc.\mu}{r} = b^2 - z^2$. Nunc si fit $z = b$ constat esse $\frac{b^2}{n^2} . u^2 = \frac{2bu.Cc.\mu}{r}$; unde duo oriuntur valores $u = o$, $u = \frac{2n^2.Cc.\mu}{rb}$; igitur si ex puncto A ducatur AH parallela DG, erit AH $= \frac{2n^2.Cc.\mu}{rb}$, quam dicemus $= 2p$.

8. Nostra æquatio, si primus terminus a coefficiente liberetur, est $u^2 - \frac{2n^2}{b^2} . \frac{Cc.\mu}{r} . zu = n^2 - \frac{n^2 z^2}{b^2}$, & introducta $2p$ in hanc formam mutabitur $u^2 - \frac{2p}{b} . zu = n^2 - \frac{n^2}{b^2} . z^2$, additoque dimidii coefficientis quadrato $\frac{p^2 z^2}{b^2}$ & posita quantitate $u - \frac{pz}{b} = y$, erit $y^2 = n^2 - z^2 . \frac{n^2 - p^2}{b^2}$, (hæc y tamen longe alia est ab ea, qua usi sumus num. 1., quæque respondet lineis DE ad axem ordinatis: propterea vide ne eas invicem confundas). Esto igitur CKI recta secans $LG = \frac{pz}{b}$, sequetur esse $DL = y$, cujus patet ex æquatione duos esse valores, eosdemque inter se æquales, alterum scilicet positivum, negativum alterum; ergo lineæ omnes DN bifariam in L dividentur, adeoque bifariam divisa

visa erit AH in K, & AK $= p$; quod etiam ex eo fit manifestum, quod, posita in æquatione $z = b$, superfit $y^2 = p^2$.

9. Ut autem æquationem ad lineam CI perducamus, vocetur angulus ICA $= \pi$, unde sequitur, esse angulum DLC $= \pi + \mu$. Ex his denominationibus est $b : p :: Sc.\overline{\mu + \pi} : Sc.\pi$; adeoque $p = \frac{b.Sc.\pi}{Sc.\overline{\mu + \pi}}$. Præterea $Sc.\overline{\mu + \pi} : Sc.\mu :: b : CK = \frac{b.Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu + \pi}}$. Jam vero si vocetur CL $= x$, erit $z : x :: Sc.\overline{\mu + \pi} : Sc.\mu$, ergo $z = \frac{x.Sc.\overline{\mu + \pi}}{Sc.\mu}$, unde æquatio in hanc vertetur $y^2 = n^2 - \frac{x^2 \overline{Sc.\mu + \pi}^2}{\overline{Sc.\mu}^2} . \frac{n^2 - p^2}{b^2}$. Facta $y = o$ invenimus $x^2 = \frac{n^2 b^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{\overline{n^2 - p^2} . \overline{Sc.\mu + \pi}^2}$; ergo $x = \frac{nb.Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu + \pi}.\sqrt{n^2 - p^2}} =$ CI, qui valor vocetur $= m$, unde necessario sequitur $\frac{\overline{Sc.\mu + \pi}^2 . \overline{n^2 + p^2}}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2} = \frac{n^2}{m^2}$. Æquatio erit $y^2 = n^2 - \frac{n^2 x^2}{m^2}$, seu $\frac{m^2 y^2}{n^2} = m^2 - x^2$, illi perfecte similis, quam ad axes spectare jam vidimus; quare necesse est, CI, CM duas esse semidiametros conjugatas.

10. Antequam progrediamur ulterius, quæramus quinam sit angulus ICM a duabus diametris comprehensus. Ut id assequamur, animadvertendum est, duos esse valores p numeris 7, & 9 inventos, nempe $p = \frac{n^2.Cc.\mu}{rb} = \frac{b.Sc.\pi}{Sc.\overline{\mu + \pi}}$; quapropter quoniam supra invenimus $n^2 = \frac{r^2 c^2 b^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}$, æquationem hanc obtinebimus $\frac{r^2 c^2 b^2 . Cc.\mu}{rb.\overline{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2}} = \frac{b.Sc.\pi}{Sc.\overline{\mu + \pi}}$, hoc est $rc^2.Sc.\overline{\mu + \pi}.Cc.\mu = Sc.\pi . b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2$; at cap. 10. lib. 1. scimus $r.Sc.\overline{\mu + \pi} = Sc.\mu.Cc.\pi + Sc.\pi.Cc.\mu$; ergo $c^2.Sc.\mu.Cc.\mu.Cc.\pi$ +

$+ c^2 . \overline{Cc.\mu}^2 . Sc.\pi = b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 . Sc.\pi + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2 . Sc.\pi$, deletisque terminis, qui invicem eliduntur, & divisione facta per $Sc.\mu$, erit $c^2 . Cc.\mu . Cc.\pi = b^2 . Sc.\mu . Sc.\pi$; sed ex eodem cap. constat $Cc.\mu . Cc.\pi - Sc.\mu . Sc.\pi = r . Cc.\overline{\mu+\pi}$, seu $Cc.\mu . Cc.\pi = r . Cc.\overline{\mu+\pi} + Sc.\mu . Sc.\pi$; ergo substitutione facta $c^2 r . Cc.\overline{\mu+\pi} + c^2 . Sc.\mu . Sc.\pi = b^2 . Sc.\mu . Sc.\pi$, seu $Cc.\overline{\mu+\pi} = \frac{b^2 - c^2 . Sc.\mu . Sc.\pi}{c^2 r}$.

11. Si $b = c$, qua in hypothesi ellipsis in circulum vertitur, cosinus anguli DLC $= \mu + \pi$ nullus est; atqui angulus, cujus cosinus sit nullus, est rectus; ergo in circulo diametri omnes axes erunt. Posito angulo DGC $= \mu$ acuto, si $b > c$, cosinus anguli DLC $= \mu + \pi$ erit positivus; ergo ipse angulus DLC acutus, adeoque MCI ejus ad duos rectos complementum erit obtusus. Contra accidit si $b < c$. Hinc sequitur ita sibi invicem occurrere diametros conjugatas, ut earum acutus angulus a majore axe dividatur, obtusus a minore. Idem infertur etiam si angulus (*Fig.* 2.) DGC $= \mu$ sit obtusus. Etenim tunc angulus GCL $= \pi$ erit negativus, & negativus pariter ejus sinus; angulus vero DLC æquabit $\mu - \pi$, ergo erit formula $Cc.\overline{\mu - \pi} = -\left(\frac{b^2 - c^2 . Sc.\mu . Sc.\pi}{c^2 r}\right)$; Ideo si $b > c$, cosinus anguli DLC $= \mu - \pi$ est negativus; ergo angulus DLC obtusus, & MCL acutus, qui secatur ab axe majore CA; oppositum accideret, si $b < c$. Animadvertendum est (*Fig.* 1.) angulum π esse angulum, quem diameter CI efficit cum axe, & angulum μ esse angulum MCa, quam diameter conjugata MC facit cum axe eodem CA in partem alteram producto.

12. Ex æquationibus, quas superiori calculo obtinuimus, facile alter angulorum μ, π ex altero inveniri poterit, suppositis axibus b, c. Aperte id constat ex æquatione $c^2 . Cc.\mu . Cc.\pi = b^2 . Sc.\mu . Sc.\pi$. At in hunc finem commodius accidit, rem ad tangentes transferre: itaque quum sit $\frac{c^2}{b^2} = \frac{Sc.\mu . Sc.\pi}{Cc.\mu . Cc.\pi}$, & ex (lib. 1. cap. 10.) $\frac{Sc}{Cc} = \frac{Tc}{r}$, necesse est esse $\frac{c^2}{b^2} = \frac{Tc.\mu . Tc.\pi}{r^2}$, ubi adnotandum, r^2 per tangentem divisum cotangentem æquare. At si quis sinus, & cosinus retinere cuperet, idem assequi posset, etsi minus aliquanto simplici expressione, hoc scilicet pacto. Paulo ante exposita æquatio ad quadratum perducta est $b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 . \overline{Sc.\pi}^2 = c^4 . \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Cc.\pi}^2 = c^4 . \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{r^2 - Sc.\pi}^2$; ergo $b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^4 . \overline{Cc.\mu}^2 . \overline{Sc.\pi}^2 = r^2 c^4 . \overline{Cc.\mu}^2$; ergo $Sc.\pi =$

$\frac{r c^2 . Cc.\pi}{\sqrt{b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^4 . \overline{Cc.\mu}^2}}$, unde dato angulo μ angulus π eruitur, & methodo eadem ex dato angulo π angulus μ invenietur.

13. At si dato angulo $\mu + \pi$, quem diametri duæ comprehendunt, quærantur anguli μ, π, quos efficiunt cum axe b, hac via incedere possumus. Assumpta iterum æquatione $b^2 . Sc.\mu . Sc.\pi = c^2 . Cc.\mu . Cc.\pi$, animadvertimus $r . Cc.\overline{\mu + \pi} = Cc.\mu . Cc.\pi - Sc.\mu . Sc.\pi$, $r . Cc.\overline{\mu - \pi} = Cc.\mu . Cc.\pi + Sc.\mu . Sc.\pi$. Harum æquationum facta additione, & subtractione, oriuntur $r . \frac{Cc.\overline{\mu + \pi} + Cc.\overline{\mu - \pi}}{2} = Cc.\mu . Cc.\pi$, $r . \frac{Cc.\overline{\mu - \pi} - Cc.\overline{\mu + \pi}}{2} = Sc.\mu . Sc.\pi$, qui valores in reassumpta æquatione substituti dabunt $b^2 . \overline{Cc.\overline{\mu - \pi} - Cc.\overline{\mu + \pi}} = c^2 . \overline{Cc.\overline{\mu - \pi} + Cc.\overline{\mu + \pi}}$; ergo $\overline{b^2 - c^2} . Cc.\overline{\mu - \pi} = \overline{b^2 + c^2} . Cc.\overline{\mu + \pi}$. Hinc dato angulo $\mu + \pi$ habebitur angulus $\mu - \pi$; at summa data ac differentia, statim quantitates fiunt cognitæ; ergo cogniti fient anguli μ, π. Si esset $c = b$ manifeste apparet futurum $Cc.\overline{\mu + \pi} = o$, unde deducitur angulus $\mu + \pi$ semper rectus; hinc impossibile est in hac hypothesi, in qua se omnes diametri conjugatæ orthogonaliter secant, angulos determinare, quos ipsæ efficiunt cum axe. Quod si $c > b$, quum $\mu + \pi$ recto major esse debeat, ejus cosinus erit negativus, adeoque positivus valor $Cc.\overline{\mu - \pi}$. Hisce inspectis, quæ ad angulos pertinent, nonnullas diametrorum conjugatarum proprietates demonstrare opus est, quæ usum habent quam maximum.

14. Accipiantur iterum valores n, m & duplex valor p, scilicet

$$n = \frac{rbc}{\sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}, \quad m = \frac{nb . Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu + \pi} . \sqrt{n^2 - p^2}},$$

$p = \frac{n^2 . Cc.\mu}{rb} = \frac{b . Sc.\pi}{Sc.\overline{\mu + \pi}}$. Si primus ex his valoribus p in valorem m introducatur, habemus $m = \frac{nb . Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu + \pi} . \sqrt{n^2 - \frac{n^4 . \overline{Cc.\mu}^2}{r^2 b^2}}}$

$= \frac{rb^2 . Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu + \pi} . \sqrt{r^2 b^2 - n^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}$, in qua formula posito valore n, erit

$m =$

$$m = \frac{r\,b^2 . Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu+\pi}.\sqrt{r^2 b^2 - \frac{r^2 b^2 c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}}\text{; ergo } m = \frac{\sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\pi}}.$$

Hinc multiplicando m per n fit $mn = \frac{rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}}$, seu $\frac{mn . Sc.\overline{\mu+\pi}}{r} = bc$.
Ostendit hæc ultima æquatio, ductis duabus rectis MI, BA triangula MCI, BCA æqualia esse, quod sane est evidens. Namque quum sit $MC = n$, $CI = m$, & perpendicularis cadens ex M in IC productam, si opus fuerit, semper esse debeat $= \frac{n . Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}$, erit semper ex vi æquationis $\frac{mn . Sc.\overline{\mu+\pi}}{2r} = \frac{bc}{2}$.
Hinc etiam sequitur æqualia esse inter se parallelogrammata omnia, quæ ellipsi inscribi possunt ita, ut eorum diagonales sint duæ diametri conjugatæ, quæ proprietas diligenter est animadvertenda.

15. Ex duobus valoribus p, quos supra invenimus, & ex valore n scimus esse $Sc.\overline{\mu+\pi} = Sc.\pi . \frac{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{rc^2 . Cc.\mu}$, qui valor si in

$\frac{\sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu+\pi}} = m$ substituatur, erit

$$m = \frac{rc^2 . Cc.\mu}{Sc.\pi . \sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}\text{; ergo } m^2 = \frac{r^2 c^4 . \overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\pi}^2 . b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2};$$

sed ex num. 12. est $\frac{r^2 c^4 . \overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\pi}^2} = b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^4 . \overline{Cc.\mu}^2$; ergo substitutione adhibita erit $m^2 = \frac{b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^4 . \overline{Cc.\mu}^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}$; sed $n^2 = \frac{r^2 b^2 c^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}$;

ergo æquationibus summatis erit $m^2 + n^2 = \frac{b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^4 . \overline{Cc.\mu}^2 + r^2 b^2 c^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}$;

sed est $r^2 = \overline{Sc.\mu}^2 + \overline{Cc.\mu}^2$; igitur $m^2 + n^2$

=

$= \frac{b^4.\overline{Sc.\mu}^2 + b^2c^2.\overline{Cc.\mu}^2 + b^2c^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^4.\overline{Cc.\mu}^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 + c^2.\overline{Cc.\mu}^2} = b^2 + c^2$. Ex qua finali æquatione illud eſt manifeſtum, quadrata duo ſemidiametrorum conjugatarum duo æquare quadrata ſemiaxium, adeoque etiam quadrata duo prima in quibuſcumque diametris conjugatis conſtantem ſummam exhibere.

16. Hæ duæ proprietates, quas demonſtravimus, plurium problematum ſolutioni viam parant, quorum in curvæ hujus uſu maxima eſt utilitas. Hoc primum eſto. *Datis duobus ſemiaxibus b, c, duas ſemidiametros invenire, quarum angulus dato $\mu + \pi$ ſit æqualis.* Duæ ſunt æquationes inventæ $m^2 + n^2 = b^2 + c^2$, $mn = \frac{rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}}$. Si primæ addatur, & deinde ſubtrahatur ſecunda per 2 multiplicata, duæ habentur æquationes $m^2 + 2mn + n^2 = b^2 + \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2$, $m^2 - 2mn + n^2 = b^2 - \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2$, ex quibus extractis radicibus, oriuntur $m + n = \sqrt{b^2 + \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2}$, $m - n = \sqrt{b^2 - \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2}$, unde juxta ſæpe explicatam methodum eſt

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2},$$

$$n = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} + c^2}.$$ Q. E. I.

Si $\frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} = b^2 + c^2$, quum radix ſecunda fiat $= 0$, duæ ſemidiametri m, n æquales fiunt, nempe $= \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$, & ſinus anguli in quo concurrunt erit $\frac{Sc.\overline{\mu+\pi}}{r} = \frac{2bc}{b^2+c^2}$. At ſi $\frac{2rbc}{Sc.\overline{\mu+\pi}} > b^2 + c^2$, ſemidiametri evadunt imaginariæ. Impoſſibile igitur eſt duas habere diametros in angulo concurrentes, cujus ſinus per ſinum totum diviſus minor ſit quam $\frac{2bc}{b^2+c^2}$. Duarum ſemidiametrorum conjugatarum quantitate inventa, earum poſitio determinatur determinatis angulis μ, π, quos efficiunt cum axe, quemadmodum num. 13. eſt demonſtratum.

17. Problema alterum. *Duabus ſemidiametris m, n datis, & earum angulo $\mu + \pi$, ſemiaxes b, c invenire.* Duæ æquationes ita diſponantur $b^2 + c^2 = m^2 + n^2$, $bc = \frac{mn.Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}$, poſtrema hæc multiplicata per 2 primæ ad-da-

datur, & subtrahatur successive; & habebimus $b^2+2bc+c^2=m^2 + \frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2$, $b^2-2bc+c^2=m^2-\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2$;

ergo eductis radicibus, $b+c=\sqrt{m^2+\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2}$,

$b-c=\sqrt{m^2-\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2}$, unde $b=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2}$

$+\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2}$, $c=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2}$

$-\frac{1}{2}\sqrt{m^2-\frac{2mn.\,Sc.\overline{\mu+\pi}}{r}+n^2}$, Q. E. I. Quoniam semper $Sc.\overline{\mu+\pi}<r$ (supponuntur enim m, n non esse axes) fieri numquam poterit, ut radices sint imaginariæ; ergo quæcumque sint semidiametri datæ, & quicumque datus angulus, semper determinantur semiaxes. Diametrorum vero magnitudo, & anguli, in quo concurrunt, non curvæ naturam, sed magnitudinem tantum axium, eorumque proportionem immutat. Posset etiam problema solvi, quo ex datis duabus diametris earumque angulo, duæ quæruntur aliæ diametri, quæ angulum alium datum efficiant. At quoniam ex problemate secundo didicimus ex diametris axes invenire, & ex primo quascumque diametros ex axibus; ideo superfluum ducimus in hisce tempus terere.

18. Etsi monuimus rectam ab extremitate axis vel diametri cujuscumque ductam, quæ parallela sit axi vel diametro conjugatæ, ellypsim tangere; nihilominus utile fuerit simplicissimo calculo ostendere, tangentem ad quamcumque aliam diametrum translatam pulcherrima donatam esse proprietate, quæ hic sane silentio tegi non debet. Ut id primo demonstremus quoad axem, in memoriam revocare oportet, accepta in axe $CG=z$, $DG=u$, quæ cum axe efficiat angulum $=\mu$, nos invenisse jam num. 6. valere hanc æquationem

$$u^2.\frac{b^2.\overline{Sc.\mu}^2+c^2.\overline{Cc.\mu}^2}{r^2c^2}-\frac{2zu.Cc.\mu}{r}=b^2-z^2,\ \text{seu}\ u^2$$

$$-2u.\frac{rc^2.Cc.\mu.z}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2+c^2.\overline{Cc.\mu}^2}=\frac{r^2c^2b^2-r^2c^2z^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2+c^2.\overline{Cc.\mu}^2}.$$ Ex hac facile est inferre, posita quacumque z, duos fore u valores. Donec sit $z<CA$, valorum alter erit positivus, alter negativus, posita $z=CA$ unus e valoribus erit $=0$, realis alter; facta demum $z>CA$ uterque valor aut positivus erit, aut negativus; ita ut adhuc crescente z valores ad æqualitatem accedant, deinde æquales fiant, ultra quem limitem fit uterque imaginarius. Sit CT illa abscissa z, cui duo æquales respondent valores u, iique sint TI. Constat TI esse tangentem curvæ. Ducatur IS normalis axi CA. Ut proprietatem tangentis TI reperiamus, videndum est, quinam debeat esse z valor, ut duæ æquationis nostræ radices æquales fiant. Hac de causa addito quadrato dimidii coefficientis, erit

erit $\overline{u - \frac{rc^2 . Cc.\mu . z}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}^2 = \frac{r^2 c^2 b^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}$

$+ \frac{r^2 c^4 . \overline{Cc.\mu}^2 . z^2}{\overline{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}^2} - \frac{r^2 c^2 z^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2} = \frac{r^2 b^2 c^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}$

$+ \frac{r^2 c^4 . \overline{Cc.\mu}^2 - r^2 b^2 c^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - r^2 c^4 \overline{Cc.\mu}^2}{\overline{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}^2} . z^2 = \frac{r^2 b^2 c^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}$

$- \frac{r^2 b^2 c^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{\overline{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}^2} . z^2$. Jam vero, ut duæ radices, seu duo valores u æquales sint, necesse est ut homogeneum comparationis evadat $= 0$, hoc est, fit $\frac{r^2 b^2 c^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2} = \frac{r^2 b^2 c^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{\overline{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}^2} . z^2$; ergo tunc habebimus $b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^2 . \overline{Cc.\mu}^2 = \overline{Sc.\mu}^2 . z^2$, seu $z^2 = b^2 + c^2 . \frac{\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\mu}^2}$. In hac hypothesi vocata $CS = x$, $SI = y$, $ST = z - x$, habemus $y : z - x :: Sc.\mu : Cc.\mu$; ergo substitutione facta in valore z^2 supra invento, erit $z^2 = b^2 + c^2 . \frac{\overline{z-x}^2}{y^2}$; sed ex curvæ indole, ut initio capitis observatum est, $\frac{c^2}{y^2} = \frac{b^2}{b^2 - x^2}$; ergo $z^2 = b^2 + b^2 . \frac{\overline{z-x}^2}{b^2 - x^2}$, ideſt $b^2 z^2 - x^2 z^2 = b^4 - b^2 x^2 + b^2 z^2 + b^2 x^2 - 2 b^2 x z$, deletiſque terminis, qui mutuo eliduntur, $b^4 - 2 b^2 x z + x^2 z^2 = 0$; unde radice extracta $b^2 - xz = 0$ prodit $b^2 = xz$; ergo $x : b :: b : z$, ideſt $CS : CA :: CA : CT$. Hinc ex quocumque puncto I tangente ducta, quæ cum axe in aliquo puncto T concurrat, & ex contactu demiſſa ad eundem axem normali IS, erunt ſemper CS, CA, CT continue proportionales.

19. Hoc theorema non in ſolis axibus locum habet, ſed ad diametros etiam qualcumque pertinet. CA, CB diametros conjugatas eſſe ſupponamus non ortho-

orthogonaliter, sed oblique sibi occurrentes, easque vocemus m, n, ad quas, ut jam novimus, spectat æquatio $m^2 y^2 = n^2 \cdot \overline{m^2 - x^2}$. Angulus DFC sit $= \pi$, & ducatur quælibet DG cum CA efficiens angulum DGC $= \mu$, unde evadat angulus FDG $= \pi - \mu$, & quæratur æquatio respectu linearum CG $= z$ & DG $= u$. Habebimus $y : u :: Sc.\mu : Sc.\pi$; ergo $y = \frac{u . Sc.\mu}{Sc.\pi}$. Præterea erit $u : FG :: Sc.\pi : Sc.\overline{\pi - \mu}$; ergo FG $= \frac{u . Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\pi}$; ergo $x = z - \frac{u . Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\pi}$, qui valores x & y in æquatione substituti dant

$$\frac{m^2 u^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{\overline{Sc.\pi}^2} = n^2 . m^2 - z^2 + \frac{2zu . Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\pi} - \frac{u^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}{\overline{Sc.\pi}^2}$$, seu

$$\frac{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}{\overline{Sc.\pi}^2} . u^2 - \frac{2n^2 . Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\pi} . zu = m^2 n^2 - n^2 z^2,$$

seu $u^2 - \frac{2n^2 . Sc.\pi . Sc.\overline{\pi - \mu} . zu}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2} = \frac{m^2 n^2 . \overline{Sc.\pi}^2 - n^2 z^2 . \overline{Sc.\pi}^2}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}$. Ut duæ hujus æquationis radices æquales sint, necesse omnino est, ut homogeneum comparationis una cum quadrato dimidii coefficientis u sit $= o$. Hinc divisione facta per $n^2 . \overline{Sc.\pi}^2$, & multiplicatione per $m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2$, orietur $\frac{n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2 . z^2}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2} - z^2 + m^2 = o$, seu $m^2 = \frac{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 . z^2}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 + n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}$, seu $m^2 + \frac{n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}{\overline{Sc.\mu}^2} = z^2$. Jam vero sit in hac hypothesi CT $= z$, TI tangens, & IS ordinata. Vocetur CS $= x$, IS $= y$, ST erit $= z - x$. Habebimus $y : z - x :: Sc.\mu : Sc.\overline{\pi - \mu}$; ergo $\frac{z - x}{y} = \frac{Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\mu}$, adeoque substitutione valorum facta $z^2 = m^2 + \frac{n^2 . \overline{z - x}^2}{y^2}$: at ex æquatione num. 9. est $\frac{n^2}{y^2} = \frac{m^2}{m^2 - x^2}$; ergo $z^2 = m^2 + \frac{m^2 . \overline{z - x}^2}{m^2 - x^2}$, unde

sicuti

ficuti antea (num. 8.) eruitur $m^2 = zx$, feu $x : m :: m : z$, ideft CS:CA :: CA : CT. Q. E D. Eadem de caufa fi diameter conjugata CB producta intelligatur donec tangentem IT fecet in puncto t, erit IS : CB :: CB : Ct; ergo IS. Ct $= \overline{CB}^2$.

20. Ex punctis A, a diametri Aa verticibus tangentes ducantur AX, ax parallelæ diametro conjugatæ Bb, quæ cum tangente IT concurrant in punctis X, x. Ob fuperiorem demonftrationem valet CS : CA :: CA : CT; ergo dividendo CS : SA :: CA : AT, & permutando CS : CA :: SA : AT, & componendo CS + CA = aS : CA :: ST : AT, & permutando aS : ST :: CA : AT, & componendo aT : ST :: CT : AT; atqui hifce quatuor propter triangulorum fimilitudinem proportionales funt ax, IS, Ct, AX; ergo ax : IS :: Ct : AX; ergo AX . ax = IS . Ct; at paullo ante probatum eft IS . Ct $= \overline{CB}^2$; ergo AX : CB :: CB : ax, quæ pulcherrima eft tangentium proprietas.

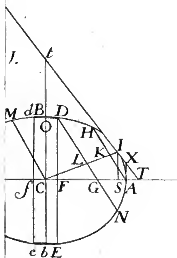
CAPUT TERTIUM.

De Hyperbola :

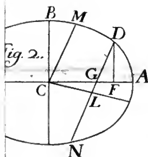
1. SUpereft ut tertiam formulam aggrediamur $y^2 - ax^2 - bx - c = o$ pertinentem ad curvam quatuor in infinitum abeuntibus ramis præditam, quam hyperbolam vocari diximus. Æquationem dividamus per a, ut fit $\frac{y^2}{a} - x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{c}{a} = o$, huic fi addamus fimul & fubtrahamus $\frac{b^2}{4a^2}$ quadratum dimidii coefficientis incognitæ x, habebimus $\frac{y^2}{a} - x^2 - \frac{bx}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = o$, & fubftitutione $x + \frac{b}{2a} = z$ facta $\frac{y^2}{a} - z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = o$. Jam vero quum tria poffint accidere, nempe ut $\frac{b^2}{4a^2}$ fit major quantitas, quam $\frac{c}{a}$, vel æqualis, vel minor, fingula hic erunt perpendenda.

2. Ordiamur a primo cafu. Ut formula commodiorem accipiat formam, loco quantitatis $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ fcribatur b^2, & loco $\frac{1}{a}$ fit $\frac{b^2}{c^2}$, & z vertatur in x,

erit



1.
t
M dB D
O
H
I
K
X
L
T
f C F G S A
N
e b E



B M
D
ig. 2.
G
A
C
F
L
N

erit æquatio $\frac{b^2}{c^2}.y^2 - x^2 + b^2 = o$, seu $y^2 = \frac{c^2}{b^2}.\overline{x^2 - b^2}$; ergo extracta radice, $y = \pm \frac{c}{b}.\sqrt{x^2 - b^2}$, unde duos esse discimus valores y inter se æquales, alterum positivum, alterum negativum. Si sit $x = o$, erit y imaginaria, imo imaginaria erit, quoties x vel positiva, vel negativa accipietur minor quam b. Igitur, posito C initio abscissarum (*Fig.* 1.) si abscindantur CA, Ca $= b$, inter puncta A, a nulla erit curva: ipsis vero punctis A, a, quoniam tunc $x = \pm b$, respondebunt $y = o$. At crescentibus adhuc abscissis x vel positive vel negative; patet fore etiam, ut crescant ordinatæ y tum positive, tum negative, adeoque quatuor illi efformentur rami, de quibus diximus, quorum duo ad x negativas, duo ad positivas pertinebunt.

3. Ex puncto C, quod centrum appellabimus, ducatur Bb parallela ordinatis. Linea Aa ex utraque parte producta quum bifariam secet cordas hyperbolæ omnes, quæ parallelæ sunt ad Bb, qualis esset corda DE, diameter dicitur. Si lineæ ducantur Dd diametro Aa parallelæ, hæ bifariam secabuntur a recta Bb, quæ, ut vidimus, numquam occurret hyperbolæ. Ratio est manifesta; nam duabus acceptis æqualibus abscissis CF positiva, & Cf negativa, patet ex formula eundem prodire valorem y; ergo FD, fd inter se parallelæ æquales sunt; ergo Dd parallela erit, & æqualis lineæ Ff; ergo Quum hæc bifariam dividatur a CB, quæ est parallela ordinatis, etiam Dd necessario ab eadem dividetur bifariam in puncto O. Igitur etiam Bb erit diameter, & Aa Bb vocabuntur diametri conjugatæ, ita ut, quæ curvam secat, nempe Aa dicatur prima, alia vero secunda.

4. In ellypsi sermonem habuimus sæpe de diametris conjugatis, veluti de lineis determinatis, & eæ revera duabus curvæ sectionibus definiebantur. At hoc pacto in hyperbola nequit determinari nisi diameter Aa $= 2b$, secunda vero nequaquam, quum nulquam curvam inveniat. Ut tamen determinetur ex quadam analogia ad ellypsim, fiat $x = o$, & habebimus $y = c\sqrt{-1}$, quæ est quantitas imaginaria. Mutemus itaque signum quantitatis sub radice existentis, & erit $y = \pm c$, quam tamen cave, ne existimes esse ordinatam curvæ. Ita acceptis CB, Cb $= c$ erit nobis deinceps Bb diameter secunda hyperbolæ.

5. Ex æquatione habemus analogiam $x^2 - b^2 : y^2 :: b^2 : c^2$, quæ nos monet rectangulum aFA esse ad quadratum FD :: $\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$. Si post aA, bB inveniatur tertia proportionalis, quæ sit $= e$, hæc vocabitur parameter diametri aA, & analogia poterit in hanc verti $x^2 - b^2 : y^2 :: 2b : e$. Potest etiam æquatio hac forma exhiberi $\frac{b^2}{c^2}.\overline{y^2 + c^2} = x^2$, unde $y^2 + c^2 : x^2 :: c^2 : b^2$; ergo summa quadratorum CO, CB est ad quadratum OD, ut $\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$. Inventa autem tertia proportionali post bB, aA, quæ erit secundæ diametri parameter, nova consurget analogia, quæ ostendet esse $\overline{CO}^2 + \overline{CB}^2 : \overline{OD}^2$, ut bB ad suam parametrum.

6. Proprietas hæc, quæ ad secundam diametrum pertinet, non ita leviter est prætereunda, quia maximi est usus. Vocata igitur $CO = x$, $OD = y$, & reliquis ut supra denominationibus retentis, erit $x^2 + c^2 = \frac{c^2 y^2}{b^2}$. Revocemus æquationem $\frac{y^2}{a} - z^2 + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = o$, & supponamus $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ esse quantitatem negativam, de qua hypothesi nondum est actum. Si pro $\frac{1}{a}$ scribamus $\frac{c^2}{b^2}$, & c^2 pro $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$, & x pro z, habemus $\frac{c^2 y^2}{b^2} = x^2 + c^2$. Hæc igitur formula non ad aliam curvam spectabit, sed ad hyperbolam, eo tantum discrimine, quod ubi in priore formula x accipiebantur in prima diametro, & y erant secundæ parallelæ, in hac x accipiendæ sunt in diametro secunda, positis y primæ parallelis. Altera igitur formularum in alteram vertitur, si abscissæ in ordinatas transeant, & vicissim ordinatæ in abscissas.

7. Reliquum est, ut agamus breviter de hypothesi tertia, in qua $\frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$. Posito $\frac{b^2}{c^2}$ pro $\frac{1}{a}$, & x pro z, oritur æquatio $\frac{b^2}{c^2} . y^2 = x^2$, & extracta radice $y = \pm \frac{c}{b} x$, quæ formula duplicem rectam indicat. Facta CF linea abscissarum, sit $CA = b$, & parallelæ ordinatis ducantur $AP = AQ = c$: si jungantur CP, CQ, hæ lineæ in infinitum protractæ erunt locus æquationis, in quo CF erunt x, FX erunt y positivæ, FY negativæ.

8. Jam vero si hyperbolam cum rectis, quas modo descripsimus, conferre velimus, primo dicimus semper fore $FX > FD$. Etenim quum ex superioribus habeamus $FX = \frac{c}{b} . x$; & $FD = \frac{c}{b} . \sqrt{x^2 - b^2}$, quumque sit $x > \sqrt{x^2 - b^2}$, necessario etiam erit $\frac{c}{b} . x > \frac{c}{b} . \sqrt{x^2 - b^2}$, seu $FX > FD$. Igitur lineæ CP, CQ hyperbolam amplectuntur, totæque extra curvam cadunt. Deinde quoniam invenimus $DX = \frac{c}{b} . x - \sqrt{x^2 - b^2}$, $DY = \frac{c}{b} . x + \sqrt{x^2 - b^2}$, erit rectangulum $XDY = \frac{c^2}{b^2} . x^2 - x^2 + b^2 = c^2 = \overline{AP}^2 =$ rect. PAQ. Ergo rect. XDY est constans; sed patet DF, atque adeo etiam DY crescere, quo major fit x; ergo DX debet imminui, & quoniam DF, DY in infinitum crescunt, crescente in infinitum x, ita DX in infinitum minuetur, & per consequens recta CP semper ad curvam magis accedet, quin tamen illam umquam tangat.

9. Idipsum ex secundæ diametri proprietatibus facile demonstrari potest. Etenim

tenim vocata $CO = x$, erit $OR = \frac{b}{c}.x$, & $OD = \frac{b}{c}\sqrt{x^2 + c^2}$; atqui $\sqrt{x^2 + c^2} > x$; ergo $\frac{b}{c}.\sqrt{xx + cc} > \frac{b}{c}.x$, seu $OD > OR$. Hinc erit $RD = \frac{b}{c}.\overline{\sqrt{x^2 + c^2} - x}$, & $rD = \frac{b}{c}.\overline{\sqrt{x^2 + c^2} + x}$; ergo rect. $rDR = \frac{b^2}{c^2}.\overline{x^2 + c^2 - x^2} = b^2 = \overline{CA}^2 =$ rect. a CA constanti; sed crescente in infinitum $CO = x$ crescunt in infinitum OD, & rD; ergo in infinitum decrescat oportet RD; ergo CP semper curvæ propinquior fiet, sed numquam ad contactum deveniet. Hæ lineæ, quæ hoc pacto ad quatuor curvæ ramos accedunt, quin umquam illos assequantur, hyperbolæ assymptoti dicuntur.

10. Interim ad primam diametrum redeuntes illam tamquam axem consideremus, supposito angulo coordinatarum recto, qua in hypothesi, si duo axes æquales sint, hyperbola vocatur æquilatera. Sit recta DG, quæ cum axe angulum efficiat $= \mu$, & iisdem, quæ supra retentis denominationibus, vocetur $CG = z$, $DG = u$. Occurrunt continuo hæ analogiæ $u : y :: r : Sc.\mu$, unde $y = \frac{u.Sc.\mu}{r}$; $r : Cc.\mu :: u : FG = \frac{u.Cc.\mu}{r}$; unde $x = z - \frac{u.Cc.\mu}{r}$. His valoribus substitutis in æquatione $\frac{b^2}{c^4}.y^2 = x^2 - b^2$, orietur $\frac{b^2 u^2.\overline{Sc.\mu}^2}{r^2 c^2} = z^2 - \frac{2zu.Cc.\mu}{r} + \frac{u^2.\overline{Cc.\mu}^2}{r^2} - b^2$. Angulus μ is modo sit, ut habeamus $b.Sc.\mu > c.Cc.\mu$. Supponamus $z = o$, & inveniemus $b^2 = u^2.\frac{c^2.\overline{Cc.\mu}^2 - b^2.\overline{Sc.\mu}^2}{r^2 c^2}$; ergo $u = \frac{rcb}{\sqrt{c^2.\overline{Cc.\mu}^2 - b^2.\overline{Sc.\mu}^2}}$, qui valor in ea, in qua sumus hypothesi, imaginarius quum sit, sequitur numquam futurum, ut CM parallela rectæ DG curvam inveniat. Nihilominus, ut analogiam cum ellipsi servemus, signa quantitatis sub radicali existentis immutemus, sitque $CM = \frac{rcb}{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}$, quam deinceps vocabimus $= n$. Hinc inventa æquatio fiet $\frac{b^2}{n^2}.u^2 + \frac{2zu.Cc.\mu}{r} = z^2 - b^2$.

11. Si nunc constituamus esse $z = b$, duos invenimus valores $u = o$; $u = -\frac{2n^2.Cc.\mu}{rb}$, quam nos expeditius dicemus $= 2p$. Signum $-$ indicat

 lineam

lineam cadere in partes u negativæ. Introducta p in æquationem, eam sic ex ponimus $u^2 + \frac{2p}{b} . zu = \frac{n^2 z^2}{b^2} - n^2$, addito utrinque dimidii coefficientis quadrato, & posita $u + \frac{p}{b} . z = y$, habebimus $y^2 = z^2 . \frac{\overline{n^2 + p^2}}{b^2} - n^2$. Esto CIK linea, quæ secet $GL = \frac{pz}{b}$, erunt tunc DL, NL duo æquales valores y alter positivus, alter negativus; igitur omnes DN bifariam secabuntur in L, atque adeo etiam AH bifariam dividitur in K, atque est $AK = p$; & revera si fiat $z = b$, prodit ex æquatione $y = \pm p$.

12. Sed ut æquationem ad lineam CK transferamus, vocetur angulus $KCA = \nu$, unde angulus $CLG = \mu - \nu$. Ex his denominationibus est $b : p ::$ $Sc . \overline{\mu - \nu} : Sc . \nu$, novusque oritur valor $p = \frac{b . Sc . \nu}{Sc . \overline{\mu - \nu}}$. Præterea est $Sc . \overline{\mu - \nu} :$ $Sc . \mu :: CA : CK$; ergo $CK = \frac{b . Sc . \mu}{Sc . \overline{\mu - \nu}}$. Vocata nunc $CL = x$, erit $z : x ::$ $Sc . \overline{\mu - \nu} : Sc . \mu$; ergo $z = \frac{x . Sc . \overline{\mu - \nu}}{Sc . \mu}$. Hinc superior æquatio in hanc transibit $y^2 = \frac{x^2 . \overline{Sc . \overline{\mu - \nu}}^2}{\overline{Sc . \mu}^2} . \frac{\overline{n^2 + p^2}}{b^2} - n^2$. Nunc facta $y = o$, erit x^2 $= \frac{n^2 b^2 . \overline{Sc . \mu}^2}{\overline{n^2 + p^2} . \overline{Sc . \overline{\mu - \nu}}^2}$; ergo $x = \frac{nb . Sc . \mu}{\sqrt{n^2 + p^2} . Sc . \overline{\mu - \nu}} = CI$. Hanc vocabimus $= m$, ut sit $\frac{\overline{n^2 + p^2} . \overline{Sc . \overline{\mu - \nu}}^2}{b^2 . \overline{Sc . \mu}^2} = \frac{n^2}{m^2}$; unde $y^2 = \frac{n^2 x^2}{m^2} - n^2$, seu $\frac{m^2 y^2}{n^2} = x^2 - m^2$, quæ æquatio perfecte similis illi est, quæ ad axem CA pertinet; adeoque constat CI, CM duas esse semidiametros conjugatas.

13. Comparemus jam inter se duos valores p, ut aliqua inveniatur æqualitas inter quantitates ad angulos μ, ν pertinentes. Habemus igitur $\frac{n^2 . Cc . \mu}{rb}$ $= \frac{b . Sc . \nu}{Sc . \overline{\mu - \nu}}$, & subrogato valore $n^2 = \frac{r^2 c^2 b^2}{b^2 . \overline{Sc . \mu}^2 - c^2 . \overline{Cc . \mu}^2}$, æquatio est $rc^2 . Cc . \mu . Sc . \overline{\mu - \nu} = Sc . \nu . b^2 . \overline{Sc . \mu}^2 - c^2 . \overline{Cc . \mu}^2$. Itaque quotiescumque hæc æquatio locum habeat, semper linea CIL diameter erit in æquales partes secans quamcumque cordam DN.

14. Re-

14. Relicta hic paullisper hyperbola animum ad asymptotos iterum convertamus. Sint lineæ (*Fig.* 2.) CP, CQ, quarum angulum PCQ bifariam dividit recta CAG, quæ pariter eadem ratione dividit quascumque PQ ad ipsam perpendiculares. Ducatur quælibet PGN faciens angulum $PGC = \mu$, quæritur quænam erit linea CL, quæ ipsam PN, atque illi parallelas omnes bifariam secat. Denominemus angulum $GCL = \nu$, $CA = b$, $AP = AQ = c$, & ducamus QM parallelam lineæ AG; propter similia triangula PAG, PQM erit $PG = GM$, & $QM = 2GA$. His positis habemus $S c . \mu : r :: c : PG = \frac{cr}{S c . \mu}$,

& $S c . \mu : C c . \mu :: c : AG = \frac{c . C c . \mu}{S c . \mu}$, ergo $QM = \frac{2c . C c . \mu}{S c . \mu}$. Triangula vero similia CGN, QMN dant $CG : QM :: GN : MN$, & dividendo $CG - QM : QM :: GM : MN$, seu $GA - AG : 2AG :: PG : MN$, & analitice $b - \frac{c . C c . \mu}{S c . \mu} : \frac{2c . C c . \mu}{S c . \mu} :: \frac{cr}{S c . \mu} : MN = \frac{2rc^2 . C c . \mu}{S c . \mu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}}$.

At PN est dupla PL, & PM dupla PG; ergo erit $MN = 2GL$; ergo $GL = \frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \mu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}}$. Jam vero quum sit angulus $GLC = \mu - \nu$, patet futurum $S c . \overline{\mu - \nu} : S c . \nu :: CG : GL$, seu $S c . \overline{\mu - \nu} : S c . \nu :: b + \frac{c . C c . \mu}{S c . \mu} :$

$\frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \mu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}}$; ergo $S c . \overline{\mu - \nu} : S c . \nu :: b . S c . \mu + c . C c . \mu :$

$\frac{rc^2 . C c . \mu}{b . S c . \mu - c . C c . \mu}$, & $rc^2 . C c . \mu . S c . \overline{\mu - \nu} = S c . \nu . \overline{b^2 . \overline{S c . \mu}^2 - c^2 . \overline{C c . \mu}^2}$.

Quum hæc æquatio illi, quam supra vidimus ad lineam CIL (*Fig.* 1.) pertinere, perfecte identica sit, sequitur lineam eandem CIL, quæ cum axe constituat angulum $ICA = \nu$, bifariam partiri qualcumque parallelas ad Mm efficientes cum axe eodem angulum $= \mu$, sive hæ ramis curvæ, sive asymptotis terminentur. Hinc producta utrinque DN in W, U, erit semper $DU = NW$.

15. Curemus modo, ut asymptotorum æquationem reperiamus. Quoniam (*Fig.* 2.)

$PG = \frac{rc}{S c . \mu}$, $GL = \frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \mu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}}$, erit $PL = \frac{rc}{S c . \mu}$

$+ \frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \mu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}} = \frac{rcb}{b . S c . \mu - c . C c . \mu}$; sed habemus $S c . \nu :$

$S c . \mu :: GL = \frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \mu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}} : CL$; ergo $CL = \frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \nu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}}$.

Acceptis igitur in recta CL abscissis $= x$, & parallelis ad LP ordinatis $= \pm y$,

valebit hæc analogia $\frac{rc^2 . C c . \mu}{S c . \nu . \overline{b . S c . \mu - c . C c . \mu}} : \frac{rcb}{b . S c . \mu - c . C c . \mu} ::$

$c . C c . \mu$

$c.Cc.\mu : b.Sc.\nu :: x : \pm y$. Hæc est æquatio, quæ inter abscissas (*Fig.* 1.) $CL = x$, & ordinatas ad assymptotum $LU = y$ intercedit.

16. Sed videamus nonnulla, quæ ex antecedenti formula deducuntur, sunt enim plurima, quibus haud frustra utemur in posterum. Formula est $rc^2.Cc.\mu.\overline{Sc.\mu-\nu} = Sc.\nu.b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2$; atqui (ex cap. 10. lib. 1.) $r.\overline{Sc.\mu-\nu} = Sc.\mu.Cc.\nu - Sc.\nu.Cc.\mu$; ergo $c^2.Sc.\mu.Cc.\mu.Cc.\nu - c^2.Sc.\nu.\overline{Cc.\mu}^2 = b^2.Sc.\nu.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.Sc.\nu.\overline{Cc.\mu}^2$, & ejectis terminis, qui eliduntur, & divisione facta per $Sc.\mu$, oritur $c^2.Cc.\mu.Cc.\nu = b^2.Sc.\mu.Sc.\nu$. Ex hac simplici æquatione, quæ maxime nobis utilis futura est, ad aliam transeamus media formula (cap. 10. lib. 1. inventa) $Cc.\mu.Cc.\nu = r.\overline{Cc.\mu-\nu} - Sc.\nu.Sc.\mu$, ex qua, & superiore prodit $rc^2.\overline{Cc.\mu-\nu} = \overline{b^2+c^2}.Sc.\nu.Sc.\mu$; seu $\overline{Cc.\mu-\nu} = \frac{\overline{b^2+c^2}.Sc.\nu.Sc.\mu}{rc^2}$.

17. H s habitis, demonstrabimus, quod si per punctum I, in quo diameter curvam secat, ducatur linea TIS occurrens assymptotis in T, S, erit $IT = IS = n$, idest æqualis secundæ semidiametro. Etenim, quoniam æquatio ad assymptotos inventa est $c.Cc.\mu : b.Sc.\nu :: x : \pm y$, posita $x = CI = m$, erit $TI = y = \frac{mb.Sc.\nu}{c.Cc.\mu}$, & substituto valore $m = \frac{nb.Sc.\mu}{\overline{Sc.\mu-\nu}.\sqrt{n^2+p^2}}$, $TI = \frac{nb^2.Sc.\mu.Sc.\nu}{c.Cc.\mu.\overline{Sc.\mu-\nu}.\sqrt{n^2+p^2}}$. Ex inventis paulo supra valoribus, habemus $n^2+p^2 = \frac{r^2c^2b^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2} + \frac{b^2.\overline{Sc.\nu}^2}{\overline{Sc.\mu-\nu}^2}$; atqui (num. 14.) $b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2 = \frac{rc^2.Cc.\mu.\overline{Sc.\mu-\nu}}{Sc.\nu}$; ergo $n^2+p^2 = \frac{rb^2.Sc.\nu}{Cc.\mu.\overline{Sc.\mu-\nu}} + \frac{b^2.\overline{Sc.\nu}^2}{\overline{Sc.\mu-\nu}^2} = \frac{b^2r.Sc.\nu.\overline{Sc.\mu-\nu} + Cc.\mu.\overline{Sc.\nu}^2}{Cc.\mu.\overline{Sc.\mu-\nu}^2}$, sed (ex cap. 10. lib. 1.) $r.\overline{Sc.\mu-\nu} + Cc.\mu.Sc.\nu = Sc.\mu.Cc.\nu$; ergo $n^2+p^2 = \frac{b^2.Sc.\mu.Sc.\nu.Cc.\nu}{Cc.\mu.\overline{Sc.\mu-\nu}^2}$; atqui $b^2.Sc.\nu.Sc.\mu = c^2.Cc.\mu.Cc.\nu$; ergo $n^2+p^2 = \frac{c^2.\overline{Cc.\nu}^2}{\overline{Sc.\mu-\nu}^2}$, adeoque

que $\sqrt{n^2+p^2} = \frac{c.Cc.\nu}{Sc.\mu-\nu}$; ergo $TI = \frac{nb^2.Sc.\mu.Sc.\nu}{c^2.Cc.\mu.Cc.\nu} = n$. Q. E. D.

Ad hyperbolam redeuntes si ducamus rectam D2G parallelam assymptoto CQ, angulus μ, ideſt angulus B2GC æquabit angulum ACQ = ACP, qui eſt dimidium anguli ab aſſymptotis intercepti. Erit igitur $Sc.\mu : Cc.\mu :: c : b$, & $b.Sc.\mu = c.Cc.\mu$. Si per hanc æquationem dividatur formula $b^2.Sc.\mu.Sc.\nu = c^2.Cc.\mu.Cc.\nu$, habebimus $b.Sc.\nu = c.Cc.\nu$, unde eſt analogia $Sc.\nu : Cc.\nu :: c : b$; ergo neceſſe eſt, ut angulus ν, quem diameter lineæ D2G cum axe efficit, æquet ſemiangulum aſſymptotorum ACQ; adeoque conſtat diametrum C2L cum ipſo aſſymptoto confundi, neque curvam ſecare niſi in puncto infinite diſtanti. Quum itaque quantum ad hanc diametrum inutilis ſit æquatio, quam aliis inſervire vidimus, iterum de æquatione ad aſſymptotos loqui nos oportebit.

18. Si linea DG angulum faciat DGC $= \mu$ majorem angulo ACQ = ACP, erit $Sc.\mu : Cc.\mu > c : b$; ergo $b.Sc.\mu > c.Cc.\mu$, & per hanc diviſa formula $b^2.Sc.\mu.Sc.\nu = c^2.Cc.\mu.Cc.\nu$, habebimus $b.Sc.\nu < c\,Cc.\nu$; ergo $Sc.\nu : Cc.\nu : < : c : b$; ergo angulus ν = ICA minor erit quam angulus ACQ, adeoque diameter CI ſecabit angulum ACQ, & quod conſequens eſt, etiam hyperbolam in puncto I. De hoc caſu hactenus.

19. Intelligatur modo ducta D3G parallela CIL. Hæc producta ſecabit aſſymptotum CP, ramumque hyperbolæ ad in puncto n, & Dn biſariam dividetur in 3L a ſecunda diametro CM, ita ut ſpectatis tamquam abſciſſis C3L $= x$, & tamquam ordinatis 3LD $= y$, ſit æquatio ad ſecundam diametrum pertinens $x^2 + n^2 : y^2 :: n^2 : m^2$. Linea D3G efficit cum axe angulum D3GC $= \mu$ minorem angulo PCA; ergo $Sc.\mu : Cc.\mu : < : c : b$, & $b.Sc.\mu < c.Cc.\mu$. Hæc erit hypotheſis, de qua nihil hactenus dictum eſt. Poſſet ea quidem eadem methodo, qua ſupra uſi ſumus, pertractari, verum expeditius ex antecedentibus eruetur. Itaque ſi linea quæcumque D3G cum axe angulum intercipiat ſemiangulo aſſymptotorum minorem, ducatur illi parallela CIL, quæ hyperbolam ſecabit in aliquo puncto I, datuſque erit angulus ACI, quem vocabimus $= \nu$, unde vi formulæ $b^2.Sc.\mu.Sc.\nu = c^2.Cc.\mu.Cc.\nu$ determinabitur angulus μ. Hinc lineæ omnes D3Ln, quæ facient cum axe angulum A3GD $= \mu$, biſariam a ſecunda diametro CM ſecabuntur, quæ parallela eſt DG.

20. Hiſce de hyperbola demonſtratis, ut reliqua detegamus, non aliam ſequemur methodum ab illa, qua uſi ſumus quum de ellipſi ageremus; verum quum calculi ſimiles perfecte ſint, eos tantum hic innuere ſufficiet, ut brevius rem conficiamus. Quamvis in antecedente æquatione anguli μ, ν, quos utraque diameter cum axe efficit, alter per alterum determinentur; expeditior nihilominus erit formula, ſi ea ad tangentes transferatur; ita enim fiet $\frac{c^2}{b^2} = \frac{Tc.\mu.Tc.\nu}{r^2}$. Quod ſi ſinus, & coſinus retinere malimus, eædem prodibunt formulæ, quas invenimus in ellipſi (Cap. 2. num. 12.). Interim præ oculis habeatur æquatio $\frac{r^2c^4}{Cc.\mu^2}$.

$\overline{Cc.\mu}^2 = \overline{Sc.\nu}^2 . b^4 . \overline{Sc.\mu}^2 + c^4 . \overline{Cc.\mu}^2$, qua brevi necesse habebimus.

21. Dato angulo $\mu - \nu$, quem intercipiunt duæ diametri conjugatæ, ut angulos μ, ν determinemus ex calculo ellipseos (Cap. 2. num. 13.) ad æquationem hanc deveniemus $b^2 - c^2 . Cc. \overline{\mu - \nu} = b^2 + c^2 . Cc. \overline{\mu + \nu}$; cujus ope ex angulorum differentia data $\mu - \nu$, nota fit eorum summa $\mu + \nu$; sed summa, & differentia quantitatum habita, etiam ipsæ quantitates notæ hunt; ergo noti erunt anguli μ, ν. In hyperbola æquilatera, in qua $c = b$, erit $o . Cc. \overline{\mu - \nu} = b^2 + c^2 . Cc. \overline{\mu + \nu}$; ergo quum $Cc. \overline{\mu - \nu}$ infinitus esse non possit, necessario erit $Cc. \overline{\mu + \nu} = o$, idest angulus $\mu + \nu$ rectus. At si fiat $c > b$, quod in iis hyperbolis accidit, in quibus angulus asymptotorum curvam amplectens obtusus est, $Cc. \overline{\mu + \nu}$ negativus erit, &, quod consequens est, angulus $\mu + \nu$ recto major.

22. Nunc ut diametrorum, quæ conjugatæ dicuntur, proprietates demonstrari possint, revocemus valores n, m, & utrumque valorem p, idest $n = \dfrac{rbc}{\sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}$, $m = \dfrac{nb.Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu - \nu} . \sqrt{n^2 + p^2}}$, & $p = \dfrac{n^2 . Cc.\mu}{rb} = \dfrac{b.Sc.\nu}{Sc.\overline{\mu - \nu}}$. Horum primus substituatur in valore m, qui ita fiet

$$m = \frac{nb.Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu - \nu} . \sqrt{n^2 + \dfrac{n^4 . \overline{Cc.\mu}^2}{r^2 b^2}}} = \frac{rb^2 . Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu - \nu} . \sqrt{r^2 b^2 + n^2 . \overline{Cc.\mu}^2}},$$

& substituto valore n, erit $m = \dfrac{rb^2 . Sc.\mu}{Sc.\overline{\mu - \nu} . \sqrt{r^2 b^2 + \dfrac{r^2 b^2 c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}}$

$= \dfrac{\sqrt{b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu - \nu}}$. Hinc si multiplicemus m per n, habebimus $mn = \dfrac{rbc}{Sc.\overline{\mu - \nu}}$, sive $\dfrac{mn . Sc.\overline{\mu - \nu}}{r} = bc$, ex qua æquatione discimus, ductis rectis MI, BA, triangula MCI, BCA æqualia esse, & æqualia pariter esse parallelogramata quæcumque, quorum diagonales sint duæ diametri conjugatæ.

23. Ope formulæ num. 14. $Sc. \overline{\mu - \nu} = \dfrac{Sc.\nu . b^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - c^2 . \overline{Cc.\mu}^2}{rc^2 . Cc.\mu}$ elimina-

minato $Sc.\overline{\mu-\nu}$ ex sequenti æquatione $m = \frac{\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}{Sc.\overline{\mu-\nu}}$, invenimus $m = \frac{rc^2.Cc.\mu}{Sc.\nu.\sqrt{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}}$; ergo

$m^2 = \frac{r^2c^4.\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\nu}^2.b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2\overline{Cc.\mu}^2}$. At monuimus num. 20. esse $\frac{r^2c^4.\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\nu}^2}$ $= b^4.\overline{Sc.\mu}^2 + c^4.\overline{Cc.\mu}^2$; ergo $m^2 = \frac{b^4.\overline{Sc.\mu}^2 + c^4.\overline{Cc.\mu}^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}$; est autem $n^2 = \frac{r^2b^2c^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}$; ergo hac æquatione ex superiore detracta erit

$m^2 - n^2 = \frac{b^4.\overline{Sc.\mu}^2 + c^4.\overline{Cc.\mu}^2 - r^2b^2c^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}$; sed $r^2 = \overline{Sc.\mu}^2 + \overline{Cc.\mu}^2$; ergo

$m^2 - n^2 = \frac{\overline{b^4 - c^2b^2}.\overline{Sc.\mu}^2 + \overline{c^4 - c^2b^2}.\overline{Cc.\mu}^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2} = b^2 - c^2$. Hinc monemur, differentiam inter quadrata duarum quarumlibet diametrorum conjugatarum differentiæ quadratorum axium æquari, atque adeo constantem esse.

24. In hyperbola æquilatera quum sit $b = c$, sequitur, $bb - cc = o$; ergo etiam $mm - nn = o$. In hac igitur quælibet diameter sibi conjugatæ æqualis est; qua in hypothesi angulus assymptotorum rectus est. Si vero eorumdem angulus, qui curvam respicit, acutus sit, primus semiaxis b erit major secundo c; ergo etiam $m > n$, & quæcumqne diameter prima major conjugata. Contra si ille angulus obtusus fuerit, tunc quum sit $c > b$, erit etiam $n > m$, & secunda diameter major prima.

25. Ex duabus æquationibus $m^2 - n^2 = b^2 - c^2$, $\frac{mn.Sc.\overline{\mu-\nu}}{r} = bc$, problema solvitur, quo quis ex datis axibus $2b$, $2c$ duas quæreret diametros facientes angulum $= \mu - \nu$, & ejus inversum, ex datis duabus diametris conjugatis cum eorum angulo $= \mu - \nu$ axes invenire. Ut hæc resolvamus, incipimus quantitates imaginarias in calculum introducere, quæ methodus deinceps videbitur non contemnenda. Supponamus igitur primo datos axes. Æquatio altera $mn = \frac{rbc}{Sc.\overline{\mu-\nu}}$ multiplicetur per $2\sqrt{-1}$, & primæ successive addatur, & ex illa subtrahatur. Habemus

$$m^2 + 2mn\sqrt{-1} - n^2 = b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2$$
$$m^2 - 2mn\sqrt{-1} - n^2 = b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2$$

extractisque radicalibus

$$m + n\sqrt{-1} = \sqrt{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2}$$
$$m - n\sqrt{-1} = \sqrt{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2}$$

quarum summa & differentia præbet

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2}$$
$$n\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2}, \text{ seu}$$
$$n = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{b^2 + \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - \frac{2rbc\sqrt{-1}}{Sc.\mu - r} - c^2}}{\sqrt{-1}}, \text{ quæ}$$

formulæ etsi imaginaria involvant, tamen reales sunt. Quod si placeat, illas ad formam redigere, quæ careat imaginariis, eleva ad quadratum

$$m^2 = \frac{1}{2}.\overline{b^2 - c^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{b^2 - c^2}^2 + \frac{4r^2b^2c^2}{\overline{Sc.\mu - r}^2}}$$
$$n^2 = \frac{-1}{2}.\overline{b^2 - c^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{b^2 - c^2}^2 + \frac{4r^2b^2c^2}{\overline{Sc.\mu - r}^2}}$$

& radicibus iterum extractis

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}.\overline{b^2 - c^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{b^2 - c^2}^2 + \frac{4r^2b^2c^2}{\overline{Sc.\mu - r}^2}}}$$
$$n = \sqrt{\frac{-1}{2}.\overline{b^2 - c^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\overline{b^2 - c^2}^2 + \frac{4r^2b^2c^2}{\overline{Sc.\mu - r}^2}}}$$

in quibus nihil non est reale. Si $b = c$, invenimus non minus m, quam $n = \sqrt{\frac{rbc}{Sc.\mu - r}}$, id est æquales inter sese; si $b > c$, etiam $m > n$; tandem si $b < c$, erit quoque $m < n$.

26. Tran-

26. Transeamus ad problema alterum, & ex datis semidiametris m, n, cum eorum angulo $\mu - \pi$, quæramus semiaxes b, c. Eadem, qua antea, methodo obtinebimus æquationes

$$b^2 + 2bc\sqrt{-1} - c^2 = m^2 + \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2$$

$$b^2 - 2bc\sqrt{-1} - c^2 = m^2 - \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2; \text{ ergo}$$

$$b + c\sqrt{-1} = \sqrt{m^2 + \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2}$$

$$b - c\sqrt{-1} = \sqrt{m^2 - \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2}; \text{ Ergo}$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2}$$

$$c = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - \frac{2mn.\overline{Sc.\mu - \pi}.\sqrt{-1}}{r} - n^2}}{\sqrt{-1}},$$

quæ formulæ reales sunt, quæque ad realem etiam formam reducuntur, ut supra præstitum est. Longitudine diametrorum, aut axium detecta, eorum quoque positio facile determinatur, si anguli μ, π, quos diametri cum axe primo constituunt, inveniantur.

27. Oportet nunc eam tangentis proprietatem, quam ad diametros in ellypsi pertinere vidimus, in hyperbolæ quoque diametris demonstrare. Primo quidem esto CAG primus axis, linea DG cum eo angulum faciat $= \mu$. Vocatis $CG = z$ $DG = u$, demonstratum est num. 10., hanc valere æquationem

$$u^2 . \frac{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}{r^2c^2} = z^2 - \frac{2zu.Cc.\mu}{r} - b^2, \text{ seu}$$

$$u^2 + 2u.\frac{rc^2.Cc.\mu.z}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2} = \frac{r^2c^2z^2 - r^2b^2c^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}.$$

Ex hac colligimus, duos esse valores u. Donec $z > CA$, eorum alter est positivus, alter negativus; si $z = CA$, ex valoribus unus $= o$; si denique $z < b$, valor uterque aut positivus erit, aut negativus; decrescente magis z valores u ad æqualitatem accedunt, qua habita tangens quoque habetur. Hæc sit TI (*Fig.* 3.) & ducatur IS ad axem normalis. Necesse est, valorem z determinare, quo posito duæ æquationis radices æquales fiunt. Id ut eveniat esse debebit

$$r^2c^2.\overline{b^2 - z^2} = \frac{r^2c^4.\overline{Cc.\mu}^2.z^2}{b^2.\overline{Sc.\mu}^2 - c^2.\overline{Cc.\mu}^2}, \text{ seu } z^2 = b^2 - \frac{c^2.\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\mu}^2};$$

sed vocatis $CT = z$, $CS = x$, $SI = y$, $ST = x - z$, habemus $y : x - z : : Sc.\mu : Cc.\mu :$

$Sc.\mu$; ergo ſubſtitutione facta $z^2 = b^2 - \frac{c^2 . \overline{x - z}^2}{y^2}$, ſed ex curvæ æquatione eſt $\frac{c^2}{y^2} = \frac{b^2}{x^2 - b^2}$; ergo $z^2 = b^2 - \frac{b^2 . \overline{x - z}^2}{x^2 - b^2}$, ſeu $z^2 x^2 - b^2 z^2$
$= b^2 x^2 - b^4 + 2 b^2 z x - b^2 z^2$, & in unam partem reductis terminis, iis, qui
$- b^2 x^2$
delentur, deletis $z^2 x^2 - 2 b^2 z x + b^4 = 0$, & radice extracta $z x - b^2 = 0$, ſeu $z x = b b$; ergo $x : b :: b : z$, ſive CS : CA :: CA : CT.

28. Haud ita tamen hæc proprietas axem ſequitur, ut reliquas diametros reſpuere videatur. Intelligantur enim eſſe CA, CB duæ diametri conjugatæ non ſe orthogonaliter ſecantes, quæ vocentur m, n. Ad has ſpectat æquatio $m^2 y^2 = n^2 . \overline{x^2 - m^2}$. Vocetur angulus DFC $= \nu$, & ducatur DG efficiens cum CA angulum DGC $= \mu$, ut ſit angulus FDG $= \nu - \mu$. Quæratur æquatio inter CG $= z$, & GD $= u$. Habebimus $y : u :: Sc.\mu : Sc.\nu$; ergo $y = \frac{u . Sc.\mu}{Sc.\nu}$.

Præterea eſt $u :$ FG $:: Sc.\nu : Sc.\overline{\pi - \mu}$; ergo FG $= \frac{u . Sc.\overline{\mu - \pi}}{Sc.\nu}$; ergo $x = z - \frac{u . Sc.\overline{\mu - \pi}}{Sc.\nu}$, quibus valoribus in æquatione ſubſtitutis ea eſt

$$\frac{m^2 u^2 . \overline{Sc.\mu}^2}{\overline{Sc.\nu}^2} = n^2 . z^2 - \frac{2 z u . Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\nu} + \frac{u^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}{\overline{Sc.\nu}^2} - m^2,$$

ſeu $$\frac{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - n^2 . \overline{Sc.\overline{\pi - \mu}}^2}{\overline{Sc.\nu}^2} . u^2 + \frac{2 n^2 z u . Sc.\overline{\pi - \mu}}{Sc.\nu} = n^2 z^2 - m^2 n^2,$$

ſeu $$u^2 + \frac{2 n^2 . Sc.\nu . Sc.\overline{\pi - \mu} . z u}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - n^2 . \overline{Sc.\overline{\nu - \mu}}^2} = \frac{n^2 z^2 . \overline{Sc.\nu}^2 - m^2 n^2 . \overline{Sc.\nu}^2}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - n^2 . \overline{Sc.\overline{\nu - \mu}}^2}.$$ Hic ut duæ radices, ideſt, duo valores u æquales ſint, neceſſe eſt, ut quadratum dimidii coefficientis u, una cum homogeneo comparationis ſit $= 0$. Ideo expurgata formula reperietur $$\frac{n^2 . \overline{Sc.\overline{\nu - \mu}}^2 . z^2}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - n^2 . \overline{Sc.\overline{\nu - \mu}}^2} + z^2 - m^2 = 0;$$ ergo

$$\frac{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 . z^2}{m^2 . \overline{Sc.\mu}^2 - n^2 . \overline{Sc.\overline{\nu - \mu}}^2} = m^2;$$ ergo $z^2 = m^2 - \frac{n^2 . \overline{Sc.\overline{\nu - \mu}}^2}{\overline{Sc.\mu}^2}$. Sit igitur in

in hac hypothesi $CT = z$, TI tangens, voceturque $CS = x$, ordinata $IS = y$, $ST = x - z$: habemus $y : x - z :: Sc.\mu : Sc.\overline{\pi - \mu} = \frac{x - z . Sc.\mu}{y}$; quo valore substituto est æquatio $z^2 = m^2 - \frac{n^2 . \overline{x-z}^2}{y^2}$; sed ex æquatione curvæ est $\frac{n^2}{y^2} = \frac{m^2}{x^2 - m^2}$; ergo $z^2 = m^2 - \frac{m^2 . \overline{x-z}^2}{x^2 - m^2}$, ex qua, ut in num. superiore, eruetur $zx = mm$, seu $x : m :: m : z$, idest $CS : CA :: CA : CT$.

29. Eamdem proprietatem in secunda etiam diametro locum habere, sic demonstrari potest. Producatur in IT, donec secundam diametrum secet in t. Est $TS = x - z = \frac{x^2 - m^2}{x} = \frac{m^2 y^2}{n^2 x}$; sed $TS : SI :: CT : Ct$, seu $\frac{m^2 y^2}{n^2 x} : y :: \frac{m^2}{x} : Ct = \frac{n^2}{y}$; ergo $y : n :: n : Ct$; unde, ducta Is parallela CS, habemus $Cs : CB :: CB : Ct$.

30 Ex verticibus A, a diametri Aa ducantur tangentes parallelæ diametro conjugatæ, quæ tangenti TI occurrant in punctis X, x. Ut demonstravimus est
$CS : CA :: CA : CT$; ergo dividendo
$CS : AS :: CA : TA$, & permutando
$CS : CA :: AS : TA$, & componendo
$CS + CA = aS : CA :: TS : TA$, & permutando
$aS : TS :: CA : TA$, & dividendo
$aT : TS :: CT : TA$; atqui propter triangula similia hisce quatuor lineis proportionales sunt aliæ quatuor ax, SI, Ct, AX; ergo $ax : SI :: Ct : AX$; ergo $AX . ax = IS . Ct = Cs . Ct = \overline{CB}^2$; igitur $AX . ax = CB^2$, seu $AX : CB :: CB : ax$.

31. Ut ea absolvamus, quæ ad peculiares hyperbolæ proprietates spectant, superest, ut de illius æquatione ad assymptotos agamus. Sit itaque hyperbola DAE, cujus assymptoti CH, (*Fig.* 4.) CK, axis CAF, & tangens PAQ axi secundo æqualis. Ordinetur HEK, & vocetur $EK = u$, $CF = x$. Quæramus æquationem inter x, u. Quoniam ex triangulis similibus habemus $FH = FK = \frac{cx}{b}$, erit $EH = \frac{2cx}{b} - u$; sed rectangulum $HEK = \overline{PA}^2 = c^2$; ergo $c^2 = \frac{2cxu}{b} - u^2$. Majoris elegantiæ caussa sit assymptotorum simiangulus, idest angulus $ACQ = \epsilon$, erit $b : c :: Cc.\epsilon : Sc.\epsilon$; ergo $c^2 = \frac{2 . Sc.\epsilon}{Cc.\epsilon} . xu - u^2$. Quam æquationem ut ad abscissam $CK = z$ transferamus, sufficit advertere, valere analogiam $Cc.\epsilon : r :: x : z$; unde $x = \frac{z . Cc.\epsilon}{r}$; igitur substitutione facta $c^2 = \frac{2 . Sc.\epsilon}{r} . zu - u^2$.

32. Du-

32. Ducatur jam quælibet EM, quæ angulum cum assymptoto faciat $=\mu$. Vocato recto angulo $=\omega$, erit angulus MEF $=\omega-\iota+\mu$; ergo sinus anguli MEK $=$

$$Sc.\overline{\omega-\iota+\mu}=\frac{Sc.\overline{\omega-\iota}.Cc.\mu+Cc.\overline{\omega-\iota}.Sc.\mu}{r}=$$

$\frac{Cc.\iota.Cc.\mu+Sc.\iota.Sc.\mu}{r}=Cc.\overline{\mu-\iota}$. Hisce positis inveniatur æquatio inter CM $=x$, & ME $=y$. Habebimus $Cc.\iota : Sc.\mu :: y : u=\frac{y.Sc.\mu}{Cc.\iota}$. Præterea y : MK $:: Cc.\iota : Cc.\overline{\mu-\iota}$; ergo $z=x+\frac{y.Cc.\overline{\mu-\iota}}{Cc.\iota}$, adeoque substitutionum ope $c^2=\frac{2.Sc.\iota}{r}.\overline{xy.\frac{Sc.\mu}{Cc.\iota}+y^2.\frac{Sc.\mu.Cc.\overline{\mu-\iota}}{\overline{Cc.\iota}^2}}-y^2.\frac{\overline{Sc.\mu}^2}{\overline{Cc.\iota}^2}$,

seu $c^2=2xy.\frac{Sc.\iota.Sc.\mu}{r.Cc.\iota}+y^2.\frac{2.Sc.\iota.Sc.\mu.Cc.\overline{\mu-\iota}-r.\overline{Sc.\mu}^2}{r.\overline{Cc.\iota}^2}$. Si recta EM sit parallela assymptoto CH, in qua hypothesi $\mu=2\iota$, & $\mu-\iota=\iota$, erit $c^2=2xy.\frac{Sc.\iota.Sc.2\iota}{r.Cc.\iota}+y^2.\frac{2.Sc.\iota.Sc.2\iota.Cc.\iota-r.\overline{Sc.2\iota}^2}{r.\overline{Cc.\iota}^2}$;

sed $Sc.2\iota=\frac{2.Sc.\iota.Cc.\iota}{r}$; ergo quum terminus ultimus destruatur facta substitutione, erit $c^2=4xy.\frac{\overline{Sc.\iota}^2}{r^2}$, seu $\frac{r^2c^2}{4.\overline{Sc.\iota}^2}=xy$, adeoque constans est rectangulum coordinatarum. Quapropter si detur æquatio $fg=xy$, statim noscimus, eam ad assymptota hyperbolæ pertinere. Igitur si linea abscissarum sit CGK, ducatur CH, quæ angulum faciat HCK complementum ad duos rectos anguli coordinatarum CGB, & accepta deinde CG $=f$, ductaque GB $=g$ parallela assymptoto CH, hyperbola inter assymptota CH, CK transiens per punctum B locus erit nostræ æquationis.

33. Descriptæ autem hyperbolæ inter data assymptota CH, CK, quæ transeat per datum punctum B, duo axes facillime determinantur. Angulum assymptotorum HCK bifariam dividat recta CF; ea dat primi axis positionem. Per datum punctum B normalis ad CF ducatur LBI, & media proportionalis inveniatur inter IB, BL, quæ orthogonaliter applicetur in AP, AQ: dicimus CA esse primum semiaxem, AP, aut AQ secundum, cujus rei demonstratio ex dictis satis patet. Patet etiam rectam CE esse diametrum, quæ dividet bifariam chordas omnes parallelas rectæ tangenti hyperbolam in puncto E. Sit hæc RES. Hæc ex dictis bifariam dividetur in E; ergo quum similia sint triangula SME, SCR, erit CM $=$ MS, quæ est simplex proprietas tangentis hyperbolam.

34. Postulat hic ratio, ut non prius capiti finem imponamus, quam ea de generalissima formula tradiderimus, quæ adhuc videntur desiderari. Hactenus do-

docuimus, eam non ad alias curvas pertinere, præter quam ad parabolam, ad ellypsim, & ad hyperbolam, quotiescumque in ea non desit terminus y^2. At si ille terminus absit, probandum nunc est, formulam ad hyperbolam tantum spectare. Termino y^2 deficiente formula semper ita exprimi poterit $xy + mx^2 + px + ny + q = o$. Si fiat $y + mx + p = u$, nova orietur æquatio $xu + nu - mnx - np + q = o$. Nunc videamus, quænam acciderit curvæ mutatio ex hac substitutione. Esto PQ (*Fig.* 5.) curva æquationis; sint $AB = x$, $BC = y$, quæ unicum tantum valorem habet. Ut inveniamus u, oportet prius addere quantitati y quantitatem p; igitur ex puncto A ducatur $AF = p$ parallela ordinatis, & ex F ducatur FG parallela AB. Erit $GC = y + p$, & $FG = x = AB$. Oportet secundo addere etiam mx, id est lineam quæ ita se habeat ad x quemadmodum m ad unitatem. Sit itaque $FO : OK :: 1 : m$ posita OK parallela ordinatis: duc FK; manifestum est GH parallelam OK esse $= mx$ propter similia triangula; ergo $CH = y + mx + p = u$. Ita inventa est æquatio inter FG, CH. At transeundum est ad æquationem inter FH, CH, ut ordinatæ desinant in abscissas. Hac de caussa fiat $FO : FK :: 1 : k$, unde vocata $FH = z$ erit $x : z :: 1 : k$, adeoque $x = \frac{z}{k}$; ergo adhibita substitutione $\frac{zu}{k} + nu - \frac{mnz}{k} - np + q = o$, seu $zu + nku - mnz - nkp + kq = o$. Nihil itaque mutatum est, sed tantum æquatio translata a linea AB ad FH.

35. Sed substitutiones prosequamur. Sit $z + nk = x$, unde $z = x - nk$. Substituendo habebimus $xu - mnx + mn^2k - nkp + kq = o$. Accipiatur $FD = nk$, erit $DH = z + nk = x$, manente adhuc $HC = u$. Fiat præterea $u - mn = y$, erit $xy + mn^2k - nkp + kq = o$. Posita igitur parallela ordinatis $DE = mn$, & ducta EI parallela DH, erit $IC = u - mn = y$, & EI permanet $= x$. Ex quibus omnibus patet assumptam æquationem non esse postrema hac magis universalem, quæ quum ad hyperbolam inter asymptota pertineat, eodem etiam prima spectabit.

36. Verum quidem est, tria posse evenire in ultima æquatione; fieri enim potest, ut summa terminorum, qui noti sunt vel $= o$, vel sit negativa, vel positiva. Sed hæc novam difficultatem non pariunt. Namque si fit $= o$, locus efformabitur a duabus rectis, quæ coincidunt cum asymptotis; si fit quantitas negativa, abscissis positivis respondebunt positivæ ordinatæ, & vice versa abscissis negativis ordinatæ negativæ; si tandem sit positiva, positivæ abscissæ ordinatas habebunt negativas, & viceversa. Hæc de linearum secundi ordinis divisione, deque peculiaribus earum proprietatibus dicta sufficiant.

CA-

CAPUT QUARTUM.

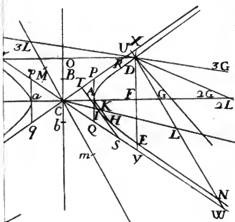
De generalibus quibusdam linearum secundi ordinis proprietatibus, quæ ex earum æquatione eruuntur.

1. REvertimur nunc ad generalissimam æquationem, eamque secundum y hoc pacto ordinamus $y^2 + y . \overline{lx + n} + m x^2 + p x + q = o$. Hæc secundi gradus quum sit, duos dabit valores ordinatæ y aut ambos reales, aut ambos imaginarios; si casus tamen excipiatur, in quo desit terminus y^2, ubi unicus est valor y semper realis, aut potius e duobus alter sit infinitus. Proprium autem est æquationum secundi gradus, ut radicum duarum summa æqualis sit secundi termini coefficienti signis contrariis accepto. Itaque duarum valorum y summa erit $= - lx - n$. Esto linea secundi gradus FKE, (*Fig* 1.) in cujus linea abscissarum AB capiatur $AB = x$, & huic respondeant ordinatæ BD, BE. Habemus igitur $BD + BE = - lx - n = - l . AB - n$. Accepta deinde alia abscissa AH, cui ordinatæ duæ respondent HF, HG, erit $HF + HG = - l . AH - n$. Jam vero ductis FP, GQ parallelis lineæ abscissarum, & subtracta secunda æquatione e prima prodit $BD - HF + BE - HG = - l . AB + l . AH$, idest $PD - QE = - l . HB$, seu $QE - PD = l . HB$; ergo differentia inter QE, & PD est ad HB interceptam inter utramque ordinatam in data ratione $l : 1$. Accipienda autem est linearum QE, PD differentia, quia quum in partes oppositas tendant, altera respectu alterius haberi debet ut negativa.

2. Cæterum si in easdem abirent partes, eorum summa esset accipienda, ut patet in ordinatis 2H2F, 2H2G. Valebunt namque æquationes $BD + BE = - l . HB - n$, $2H2F - 2H2G = - l . A2H - n$; ergo ductis 2F2P, 2G2Q parallelis lineæ AB, & subtractione facta secundæ æquationis a prima erit $BD - 2H2F + BE + 2H2G = - l . AB + l . A2H$, seu $2PD + 2QE = l . B2H$; igitur summa linearum 2PD, 2QE ad abscissarum differentiam, sive ad interceptam B2H erit in data ratione $l : 1$.

3. Intelligamus rectam BED sibi semper parallelam moveri, donec tangens fiat, & abeat in LK. Hoc motu constat, puncta sectionis E, D accedere ad sese paullatim, donec in contactus idem punctum K conveniant, in quo radices ambas æquales fieri, satis est manifestum. Nunc ducta KM abscissis parallela, habebimus eodem, quo antea, artificio $ME - MD : LB$, seu $KM :: l : 1$, idest in ratione data. Sit pariter alia HGF ordinatis parallela, prodibit $NG - NF : KN :: l : 1$; ergo erit $ME - MD : KM :: NG - NF : KN$. Hinc facile infertur, quod posita $ME = MD$, unde $ME - MD = o$, erit pariter $NG - NF = o$, & $NG = NF$. Hinc proprietas illa sequitur, quam superioribus capitibus ad peculiares curvas parabolam, ellypsim, & hyperbolam pertinere jam demonstravimus; scilicet lineam e contactu ductam, quæ bifariam dividat chordam aliquam tangenti parallelam, reliquas omnes eadem ratione dividere.

4 Ex alia quadraticarum æquationum proprietate productum radicum æquat terminum ultimum æquationis; igitur in eadem, qua antea, hypothesi erit $BE . BD = m x^2 + p x + q$. Si in generalissima æquatione sit $y = o$, inveniemus


3L
U
X
3G
O
PM
B
T
P
R
D
A
F
G
2G
2L
a
C
K
I
H
q
b
Q
S
E
L
m
y
N
W

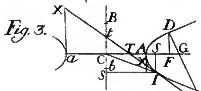

X
B
D
t
T
A
S
G
a
C
b
F
S
I

Fig. 3.

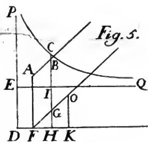

P
C
B
A
E
Q
I
O
G
D F H K

Fig. 5.

mus $mx^2+px+q=o$, seu $x^2+\frac{p}{m}x+\frac{q}{m}=o$, cujus formulæ si radices ambæ reales fuerint, necesse est prorsus, ut linea abscissarum curvam in punctis duobus I, O secet, ut ita AI, AO esse possint radices duæ. Igitur erunt $x-AI$, $x-AO$ duo formulæ factores, qui inter se multiplicati formulam ipsam $x^2+\frac{p}{m}x+\frac{q}{m}$ restituunt; ergo $BE.BD=m.\overline{x-AI}.\overline{x-AO}$; sed $x=AB$; ergo $BE.BD=m.-BI.-BO=m.BI.BO$. Itaque rectangulum BE.BD est ad rectangulum BI.BO::m:1, seu in data ratione. Quod si alia quoque ordinata priori parallela esse intelligatur HGF, eodem pacto inveniemus HG.HF:HI.HO::m:1; igitur erit

BE.BD:BI.BO::HG.HF:HI.HO. Idem accidit sive punctum sectionis intra curvam cadat sive extra; adeoque theorema oritur universale. Si duæ rectæ datis parallelæ curvam in duobus punctis secent, rectangula sub interceptis inter punctum concursus linearum & puncta sectionum cum curva sunt in data ratione.

5. Si duo sectionum puncta in unum concurrant, quod fit, quum secans linea in tangentem vertitur, veluti LK, tunc, factis æqualibus radicibus, erit quadratum LK ad rectangulum OLI:: rect. DBE : rect. OBI, seu in constanti, ut antea, ratione. Si vero diameter habeatur veluti KMR curvæ in duobus punctis K, R occurrens, erit $KN.RN:NF.NG=NF^2$::KM.RM:MD.ME$=MD^2$, quam proprietatem in curvis supra explicatis veram esse, demonstravimus.

6. Ex hisce proprietatibus, quæ ex generalissima æquatione immediate profluunt, aliæ quoque descendunt, quibus omnes pariter secundi gradus lineæ præditæ reperiuntur. (*Fig.* 2.) In primis rectæ duæ ex puncto A ductæ curvam in punctis I, O, M, N secent. Lineæ AN parallela sit DE, quæ lineam alteram in C intersecet, cui parallela FG secet AN in H. Si AO fiat linea abscissarum, erit AI.AO:AM.AN::CI.CO:CD.CE. Si deinde tanquam lineam abscissarum consideremus AN, habebimus AM.AN:AI.AO::HM.HN:HF.HG; ergo CI.CO:CD.CE::HF.HG:HM.HN. Igitur si duæ habeantur lineæ si mutuo, & curvam in duobus punctis interfecantes, hisque duæ aliæ sint parallelæ, quæ idem præstent, erunt proportionalia rectangula sub interceptis inter punctum interfectionis linearum, & puncta, in quibus secantur a curva, adeoque erunt in ratione aliqua constante.

7. In linea secundi ordinis duæ chordæ sint parallelæ AB, CD, rectisque AC, BD (*Fig.* 3.) junctis, claudatur quadrilaterum ABDC, & ex quolibet curvæ puncto M ducatur MN parallela lateribus AB, CD: dicimus interceptas PM, QN æquales fore. Etenim recta, quæ bifariam dividit AB, CD, eadem ratione secat MN; sed ex vulgari geometria recta eadem bifariam dividit etiam PQ; ergo quum in puncto eodem bifariam dividantur rectæ MN, PQ, erit necessario PM=QN, & quod consequens est MQ=NP. Itaque si quinque habeamus nota curvæ puncta A, B, D, C, M, facile est sextum N invenire.

8. Demonstratum est paullo ante MQ.QN:BQ.DQ esse in ratione constante; ergo quoniam NQ=MP, in ratione eadem sit oportet MP.MQ: BQ.DQ. Hæc vera sunt quicumque sit locus puncti M in curva, ut facile

apparet. Quare si quodlibet aliud accipiatur punctum K, ex quo chordis AB, CD sit parallela GH occurrens lateribus productis in G, H, erit in constante ratione omnino eadem KH.KG:HB.HD. Si per punctum M ducatur RMS parallela lateri BD, quæ chordis AB, CD occurrat in punctis R, S, quoniam RM = BQ, & MS = QD, erit MP.MQ:MR.MS in constanti ratione. Itaque si ex eodem curvæ puncto M duæ rectæ ducantur MQ, RS, quarum prima chordis A B, CD parallela reliqua duo latera secet in punctis P, Q, altera vero parallela lateri BD chordas parallelas inveniat in R, S, semper habebimus MP.MQ in ratione constanti ad MR.MS.

9. Si pro CD sit quælibet alia chorda DK, & jungatur AK, & RMS producatur, donec in V secet ipsam DK, habemus quadrilateri ABDK latera intersecta a quacumque MQ parallela chordæ AB in punctis T, Q, & ab RV parallela lateri BD in punctis R, V, quæ duæ lineæ ex eodem veniunt puncto M ad arbitrium sumpto. His positis erit MT.MQ: RM.MV in eadem constanti ratione. Ut id demonstretur, animadvertendum est, esse MP.MQ: BQ.DQ :: KG.KH : BH.DH, sive MP.MQ : MR.MS :: KG.KH : BH.DH; sed similia sunt triangula APT, AGK, item DSV, DHK; ergo ex primis TP:AP::KG:AG, & AP:BQ::AG:BH; ergo rationibus invicem multiplicatis TP. AP:BQ.AP::KG.AG:BH.AG, seu TP: BQ::KG:BH. Triangula alia exhibent DS = MQ:SV::KH:DH; ergo multiplicatis rationibus TP.MQ:BQ.SV::KG.KH:BH.DH, seu posita MR pro sibi æquali BQ fiet TP.MQ:MR.SV :: KG.KH:BH.DH, quam analogiam si comparemus cum superiore
MP.MQ : MR.MS :: KG.KH : BH.DH, habebimus
MP.MQ : MR.MS :: TP.MQ : MR.SV; ergo accepta antecedentium, & consequentium summa, erit $MQ.\overline{MP+TP}:MR.\overline{MS+SV}$::MP.MQ: MR.MS, seu MQ.MT: MR.MV::MP.MQ:MR.MS; igitur duobus ad libitum punctis K, M acceptis in curva, ratio MQ.MT: MR.MV eadem erit semper, dummodo MQ, RV parallelæ sint chordis AB, BD.

10. Nunc si postremæ analogiæ antecedentes dividantur per MQ, & consequentes per MR, oritur MT:MV::MP:MS. Hinc quoniam mutatio puncti K nihil aliud præstat, quam puncta intersectionum T, V ad alia loca transferre, patet constantem fore rationem MT:MV, ubicumque punctum K accipiatur in curva, donec immotum maneat punctum M.

11. Ex hisce generalissima quædam infertur linearum secundi ordinis proprietas. Data sint in qualibet ex iis curvis puncta quatuor A, B, C, D, (*Fig.* 4.) quæ jungant rectæ ita, ut quadrilaterum perficiatur ABCD. Si ex quocumque ejusdem curvæ puncto M ad quadrilateri latera rectæ quatuor ductæ intelligantur MF, MK, MG, MH, quæ angulos datos efficiant, erit rectangulum sub duabus tendentibus ad latera opposita in constanti ratione ad rectangulum sub duabus reliquis, hoc est MF.MG: MH.MK in ratione constanti. Hoc ut demonstretur, ex M sint duæ rectæ, MQ parallela ad AB secans latera AD, BC in P, Q, & RMS parallela lateri BC reliquis duobus occurrens in R, S. Ex demonstratis constans est ratio MR.MS: MP.MQ; sed propter datos angulos F, G, H, K rationes MR:MF, MS:MG, MP:MH, MQ:MK omnes datæ sunt: ergo MF.MG:MH.MK est in ratione constanti.

12. Sit CBA (*Fig.* 5.) tangens lineam secundi ordinis, ex qua ductæ duæ

duæ parallelæ BE, CG curvam secent in punctis D, E, F, G. Demonstravimus esse $BA^2 : CA^2 :: BD.BE : CF.CG$. Inter duas BD, BE abscindatur media proportionalis BH, & pariter CK media proportionalis inter CF & CG; erit igitur $BD.BE = BH^2$, $CF.CG = CK^2$; ergo $BA^2 : CA^2 :: BH^2 : CK^2$; ergo $BA : CA :: BH : CK$; igitur puncta omnia H, K &c. erunt in linea recta, quæ per contactum transibit. Itaque si recta e contactu discedens ita BE secet in H, ut BH sit media proportionalis inter BD, BE, quamcumque aliam lineam parallelam BE secabit eodem pacto in K, ut sit CK media proportionalis inter CF, CG; & si recta quædam ita dividit BE, CG, ea per contactum transibit. De iis hactenus proprietatibus egimus, quibus maximus Newtonus usus est, ut plurima solveret problemata ad descriptionem linearum secundi ordinis pertinentia. Ex hisce aliæ proprietates erui possent; verum quum tribus superioribus capitibus plura de iis dicta sint, ubi de tribus earum speciebus agebamus, ea sufficere existimamus.

CAPUT QUINTUM.

De descriptione linearum secundi gradus.

1 AD describendas lineas secundi ordinis veteres geometrice conum, aut cylindrum plano secuerunt. De sectione cylindri tractavit Serenus philosophus atheniensis: de sectione coni, quamquam ante Appollonium Pergæum non nemo loquutus fuit, tamen Appollonius ita theoriam hanc perfecit, ut illi unice referenda esse videatur. Exordiamur a sectione cylindri, & examinemus, quænam lineæ secundi gradus ab hac sectione oriantur. Positis circulis duobus APB, MQN (*Fig.* 1.) æqualibus, & parallelis, quorum centra jungat linea CD, agantur ad eamdem plagam radii CB, DN, qui in eodem plano existant cum linea CD. Jungatur BN, quæ ita moveatur, ut puncta B, N eodem tempore arcus æquales percurrant BP, NQ; solidum, quod comprehenditur inter circulos parallelos, & superficiem genitam a motu lineæ BN, vocatur cylinder, circuli AB, MN bases cylindri, recta CD cylindri axis, recta DX, quæ a centro D ducitur normalis in planum circuli APB, dicitur altitudo cilindri. Si DX coincidat cum DC, cylinder vocatur rectus, si non coincidat, obliquus, seu scalenus. Ex hac cylindri genesi facile colliges, planum secans cylindrum per axem, aut per quamlibet axi parallelam exhibere in superficie cylindrica duas lineas rectas parallelas, similiter planum parallelum basibus præbere circulum iisdem basibus æqualem.

2. Secetur jam cylinder plano KRH, (*Fig.* 2.) quod nec sit parallelum basibus, neque transeat per axem, aut ejus parallelam. Communis sectio hujus plani secantis, & plani basis AB sit recta L. Ducatur illa baseos diameter AB, quæ, producta si opus est, incidat in L ad angulos rectos. Per AB, & per axem cylindri transeat planum AMNB, cujus extremæ lineæ AM, BN signent in plano secante, & in superficie cylindrica puncta K, H. Juncta KH, sumptoque in illa quolibet puncto Z, in plano AMNB ducatur per ZQP parallela AB, & æqualis. Per hanc rectam QP transeat planum QRP parallelum

 bali,

basi, quod, ut dictum est, præbebit circulum. Recta vero RZ communis sectio planorum KRH, QRP erit perpendicularis QP, quia L est perpendicularis AB. Divisa KH æqualiter in G, voco $GH = b$, $GZ = x$, $ZR = y$, erit $KZ = b - x$, $HZ = b + x$, demum voco $QP = 2c$. Ex similitudine triangulorum KZQ, HZP resultant duæ analogiæ $2b : 2c$ seu
$b : c :: b - x : QZ$,
$b : c :: b + x : PZ$; ergo componendo rationes
$b^2 : c^2 :: bb - xx : QZ.PZ$; atqui ex proprietate circuli $QZ.PZ = RZ^2 = yy$;
Ergo $b^2 : c^2 :: b^2 - x^2 : y^2$, quæ est æquatio ad ellypsim, cujus centrum G initium est abscissarum, axes vero conjugati sunt, major $KH = 2b$, minor $= 2c$ scilicet diameter basis. Sectio igitur plani, & cylindri curvam nullam exhibet aliam præter ellypsim.

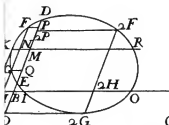
3. Si æquales essent anguli QPH, KHP, fieret $KH = QP$ seu $b = c$, & æquatio inventa in hanc mutaretur $bb - xx = yy$, quæ est æquatio ad circulum æqualem basi cylindri. Sectio hæc locum habet dumtaxat in cono scaleno, quia in recto quum QP sit normalis rectis AM, BN, fieri nequit, ut angulus $KHP =$ angulum rectum QPH. Vocatur autem hæc sectio subcontraria, quia, quem angulum facit QP cum BN, eumdem facit HK cum AM. Quamquam in hac sectione planum non sit parallelum basi, tamen communis sectio plani, & cylindri est circulus æqualis circulo basis.

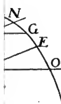
4. Ex his facile cognoscitur, quomodo per sectionem cylindri describatur ellypsis data, cujus axis major $= 2b$, minor $= 2c$. Descripto enim circulo AB, cujus diameter $AB = 2c$, eleva supra illum cylindrum rectum (sumo rectum, ut facilitati serviam, cæterum eadem valent etiam in scaleno) conceptoque plano quolibet per axem transeunte AMNB, inter parallelas AM, BN accommoda $KH = 2b$. Per KH transiens planum, quod sit normale plano AMNB, ita secabit cylindrum, ut sectio KRH sit ellypsis quæsita.

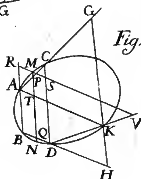
5. Ad conum transeo. Si ex puncto B (*Fig. 3, 4*) posito extra planum circuli AC ducatur ad circumferentiam indefinita BA, quæ statuto immobili puncto B in gyrum moveatur circa circuli peripheriam, superficies genita a linea AB dicitur superficies conica, solidum clausum ab hac superficie, & circulo AC dicitur conus, punctum B vertex, circulus AC basis, linea, quæ conjungit basis centrum, & verticem, axis, demum normalis a vertice ducta in basim dicitur altitudo coni, quæ si coincidat cum axe, conus erit rectus; si non coincidat, erit scalenus, aut obliquus. Superfluum judico demonstrare communem sectionem superficiei conicæ & plani ABC transeuntis per verticem B esse duas lineas rectas BA, BC; item communem sectionem ejusdem superficiei, & plani paralleli basi DNF esse circumferentiam circuli.

6. Secetur conus ABC a plano MN, quod nec transeat per verticem, nec sit parallelum basi. Ducatur in basi diameter AC, quæ sit perpendicularis communi sectioni plani secantis, & basis, & per AC agatur planum ABC transiens per verticem B, & Mm sit sectio communis hujus plani, & plani secantis. Ex punctis M, m parallelæ AC ducantur MR, mr, sumptoque in MN quocumque puncto N, per hoc agatur planum DN parallelum basi. Linea DNF erit peripheria circuli, cujus diametro DF erit perpendicularis NX communis sectio planorum MN, DNF. Vocetur $Mm = a$, $MR = b$, $mr = c$, $NX = y$, $MX = x$; quare in fig. 3. $mX = a + x$, in 4. $mX = a - x$. Ut utramque

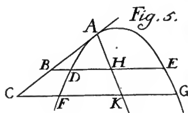
com-


D
F
P
2F
2P
N
R
M
Q
E
2H
B
I
O
2G


N
G
E
O


G
Fig. 3.
R
M
C
A
P
S
T
V
K
Q
B
N
D
H


S
G
D
C


Fig. 5.
A
B
H
E
D
C
G
F
K

pleӕtar vocem $\mathrm{MX} = a \pm x$, ſignum ſuperius pertinet ad tertiam figuram, inferius ad quartam. Manifeſtum eſt, valere has analogias
$a : b :: a \pm x : \mathrm{XF}$
$a : c :: x : \mathrm{DX}$; ergo componendo rationes
$aa : bc :: ax \pm xx : \mathrm{DX}.\mathrm{XF}$; ſed $\mathrm{DX}.\mathrm{XF} = \mathrm{XN}^2 = y^2$ ex natura circuli; igitur $aa : bc :: ax \pm xx : yy$. Si valeat ſignum ſuperius, æquatio eſt ad hyperbolam, cujus axis primus $= a$, ſecundus $= \sqrt{bc}$; ſi valeat ſignum inferius, eſt ad ellypſim, cujus axis unus $= a$, alter $= \sqrt{bc}$. In utraque initium abſciſſarum eſt in vertice axis. Itaque ſi planum ſecet conos oppoſitos, generatur hyperbola; ſi unus tantum conus ſecetur, generatur ellypſis.

7. In hoc ſecundo caſu, quum Mm ſecat latera BA, BC (*Fig.* 4.) in punctis M, m ad eandem partem verticis B, ſi angulus BmM ſit $=$ BDF, quæ ſectio dicitur ſubcontraria, ſimilia erunt triangula MXD, FXm: Ergo $\mathrm{XM} : \mathrm{XD} :: \mathrm{XF} : \mathrm{mX}$; ergo rect. $\mathrm{MX}.\mathrm{mX} = \mathrm{DX}.\mathrm{FX}$; ſed $\mathrm{DX}.\mathrm{FX} = \mathrm{NX}^2$; Ergo $\mathrm{MX}.\mathrm{mX} = \overline{\mathrm{N\,X}}^2$, quæ eſt proprietas circuli, cujus æquatio $ax - xx = yy$. Itaque perſpicuum eſt in hac ſectione $bc = aa$, ſeu $\mathrm{MR}.\mathrm{mr} = \overline{\mathrm{M\,m}}^2$. Hæc ſectio licet non parallela baſi, per quam circulus generatur, locum non habet in cono recto, ſed ſolum in ſcaleno.

8. Si punctum m in infinitum recederet a B, & Mm fieret parallela Bm, tum rectangulum $\mathrm{Xm}.\mathrm{MX}$ æquaret rectangulum $\mathrm{Mm}.\mathrm{MX}$, ideſt $ax \pm xx = ax$; igitur æquatio inventa $\frac{bc}{a^2}.\overline{ax \pm xx} = yy$ in hanc muteretur $\frac{bc}{a}.x = yy$, quæ eſt ad parabolam, cujus parameter $= \frac{bc}{a} = \frac{\mathrm{MR}.\mathrm{mr}}{\mathrm{Mm}}$. In hac parametri expreſſione duæ exiſtunt lineæ infinitæ, quæ tamen proportionem habent finitam, quæ proportio lineis finitis exprimenda, ut infinita ejiciantur. Puncto m in infinitum recedente $\mathrm{Mm} = \mathrm{Bm}$; ſed $\mathrm{Bm} : \mathrm{mr} :: \mathrm{BR}.\mathrm{RM}$; ergo $\mathrm{Mm} : \mathrm{mr} :: \mathrm{BR} : \mathrm{RM}$; ergo $\frac{\mathrm{mr}}{\mathrm{Mm}} = \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{BR}}$; ergo parameter parabolæ $= \frac{\overline{\mathrm{MR}}^2}{\mathrm{BR}}$. Itaque per ſectionem plani, & coni omnes lineæ ſecundi ordinis obtinentur, quæ proinde ſectionum conicarum nomen ſortitæ ſunt.

9. Dicendum nunc eſt, quomodo linea data ſecundi ordinis ſit (*Fig.* 3.) per ſectionem coni delineanda. Sit primum deſcribenda hyperbola, cujus axis primus $= a$, ſecundus $= b$. Pone $\mathrm{Mm} = a$, & ex punctis M, m ad eamdem partem lineæ Mm, duc ejuſmodi parallelias MR, mr, quarum rectangulum $= bb$. Junge Rm, Mr ſeſe neceſſario interſecantes in B. Formetur conus habens verticem B, cujus baſis ſit circulus deſcriptus diametro MR. Conus hic ſecetur per planum tranſiens per Mm ita, ut communis ejus ſectio cum plano baſis ſit normalis diametro MR, lineæ MN, mn in ſuperficie conica ſignatæ erunt hyperbolæ prædıtæ axibus conjugatis a, b. Similis methodus tenenda eſt in ellypſi, cujus axis major $= a$, minor $= b$ (*Fig.* 4.); & hoc tantum obſervandum diſcrimen, quod lineæ MR, mr ducendæ ſunt ad contrarias plagas reſpectu Mm. Reliqua ut ſupra peragenda (*Fig.* 3, 4). In hac deſcriptione poſſunt accipi lineæ MR, mr æquales inter ſe & ſingulæ æquales axi b. Quod ſi fiat, obtinetur in fig. 3 conus, qui ut antea ſectus dat hyperbolam, cujus axes æquant Mm, MR;

MR; in fig. 4. conus convertitur in cylindrum, & ea obtinetur descriptio ellypsis, de qua supra loquuti sumus.

10. Hæc hyperbolæ, & ellypsis descriptio plerumque nos ducit ad conum scalenum. Quod si quis conum rectum exoptaret, ita constituendæ essent parallelæ MR, mr, ut junctæ Rm, Mr æquales sint inter se. Problema hoc non est difficile, quum datæ supponantur MR, mr. En paucis solutionem. Pro casu hyperbolæ, in quo MR, mr (*Fig* 5.) debent ad eamdem partem jacere, super Mm describe semicirculum, applica MP æqualem semidiferentiæ inter MR, mr, quam produc, donec sit data MR, cui sit parallela mr. Pro casu ellypsis descripto semicirculo super Mm (*Fig*. 6.) applica mP, quæ sit æqualis majori mr, dempta semidifferentia inter mr, MR; produc mP in r, donec habeatur data mr, cui sit parallela data MR. Cætera si peraguntur ut supra, ellypsis, & hyperbola obtinebitur per sectionem coni recti. Omitto facilem, & cuique obviam demonstrationem.

11. Nihil est facilius, quam delineare parabolam per coni sectionem. Nam duc quamlibet MR, (*Fig*. 3, 4) cum qua faciat angulum recta RB tertia proportionalis post parametrum, & RM, junge BM. Formetur conus, cujus vertex sit B, basis circulus diametri RM; conum secet planum ita, ut communis hujus sectio cum triangulo BRM sit parallela BR, & transeat per punctum M cæteris conditionibus ut antea servatis, curva genita in superficie coni erit parabola dati parametri. Si velis MR æqualem esse parametro, huic eidem ponenda est æqualis RB. Ut autem obtineas conum rectum, divide RM in O bifariam, & eidem RM intellige erectam ex O perpendicularem. Accommoda inter punctum R, & perpendicularem hanc RB, quæ sit tertia proportionalis post parametrum, & RM, & conus formatus vertice B, super basi, cujus diameter sit RM, rectus erit. Si RM æquet parametrum, triangulum RBM erit æquilaterum.

12. Si quis peteret, ut per sectionem coni dati data curva describeretur, non semper hoc præstari posse, responderem: quando autem id possit, ostendendum est. Ac primum de hyperbola, atque ellypsi, cujus axis primus $= a$, secundus $= b$ (*Fig*. 3, 4, 7). Conus datus sit ABC. Super $M'm' = a$ describatur circuli segmentum $M'Vm'$ capiens coni angulum MBm, qui in hyperbola est externus cono, in ellypsi internus: diameter circuli normalis $M'm'$ sit YV. Fiat $\frac{BA.BC.bb}{AC^2.YV} = QB'$, quæ in segmento $M'Vm'$ applicetur normaliter ad $M'm'$, ut signet in circumferentia punctum B'. Jungatur $B'M'$, cui secetur æqualis BM; tum centro M intervallo $M'm' = a$ signetur punctum m, quod pro hyperbola sit in cono opposito, pro ellypsi in eodem. Si per Mm agatur planum, cujus sectio cum plano basis sit normalis AC, linea MN in superficie conica signata illa ipsa est, quæ quæritur. Nam ex puncto B' per centrum Z ducatur diameter $B'H$, junganturque Hm', $m'B'$. Duo triangula $Hm'B'$, $B'M'Q$ præter angulos rectos habentia angulos æquales in H, M' sunt similia; igitur HB', seu $YV : B'm' :: B'M' : B'Q$; ergo $YV.B'Q = B'm'.B'M'$; ergo

go $B'm'.B'M' = \frac{BA.BC}{\overline{AC}^2}.b^2$, sive

$bb = \frac{AC^2.B'm'.B'M'}{BA.BC}$, & quum $BM = B'M'$, $Bm = B'm'$ erit

$bb = \frac{AC^2.Bm.BM}{AB.BC}$. Atqui habemus $\begin{matrix} mr:Bm::AC:CB \\ MR:BM::AC:AB \end{matrix}$; ergo componendo rationes proveniet $MR.mr : Bm.BM :: AC^2 : AB.BC$; igitur $MR.mr = \frac{AC^2.Bm.BM}{AB.BC} = bb$: igitur axes sectionis delineatæ sunt a, b Q. E. F.

13. Si recta $B'Q$ inveniatur minor, aut ad summum æqualis PV, quum $B'Q$ possit in segmento applicari, constructio locum habebit, & per datum conum data hyperbola, vel ellypsis describetur. At si BQ inveniatur major PV, neque constructio perficietur, neque hyperbola aut ellypsis per datum conum delineabitur. Ut $B'Q$ sit $> PV$, debet $\frac{BA.BC.bb}{AC^2.YV} > PV$, seu $\frac{BA.BC.bb}{AC^2} > YV.PV = VM'^2$; ergo extracta radice $\frac{b\sqrt{BA.BC}}{AC} > VM'$, & facta divisione per a, $\frac{b}{a}.\frac{\sqrt{BA.BC}}{AC} > \frac{VM'}{a}$; atqui vocato angulo, qui continetur in segmento $M'Vm' = 2\mu$, & angulo recto $= \omega$, est $M'm' = a : VM' :: Sc.2\mu : Sc\frac{2\omega - 2\mu}{2} = Cc.\mu$: ergo $\frac{VM'}{a} = \frac{Cc.\mu}{Sc.2\mu} = \frac{r.Cc.\mu}{2.Sc.\mu.Cc.\mu} = \frac{r}{2.Sc.\mu}$; ergo si sit $\frac{b}{a}.\frac{\sqrt{BA.BC}}{AC} > \frac{r}{2.Sc.\mu}$, impossibile est curvam datam describere per datum conum, si autem sit $<$, aut æqualis, descriptio obtinebitur. Si conus fuerit rectus, palam est $BA = BC$; ergo si $\frac{b}{a}.\frac{BA}{AC}$ sit $> \frac{r}{2.Sc.\mu}$ constructio non perficietur, secus voti compotes fiemus. In ellypsi quum angulus segmenti $M'Vm' = 2\mu = CBA$, (*Fig.* 4, 7) erit $BA : \frac{1}{2}AC :: r : Sc.\mu$, erit $\frac{BA}{AC} = \frac{r}{2.Sc.\mu}$; ergo solum descriptio fiet impossibilis, quum $\frac{b}{a}.\frac{r}{2.Sc.\mu} > \frac{r}{2.Sc.\mu}$, sive quum $b > a$; quod semper evitare licet, possumus enim ponere datæ ellypsis axem majorem $= a$; ergo licebit semper per datum conum rectum ellypsim datam delineare. (*Fig.* 3, 7) Non ita accidit in hyperbola, in qua angulus segmenti $M'Vm'$ non est æqualis angulo ABC, sed ejus complemento ad duos rectos;

rectos; ergo $BA : \frac{1}{2} AC :: r : Sc.\overline{\omega - \mu} = Cc.\mu$; ergo $\frac{BA}{AC} = \frac{r}{2.Cc.\mu}$; igitur impossibilis est constructio, quum $\frac{b}{a} . \frac{r}{2.Cc.\mu} > \frac{r}{2.Sc.\mu}$; seu quum $b > \frac{a.Cc.\mu}{Sc.\mu}$; in reliquis vero casibus data hyperbola per datum conum rectum describitur.

14. Quod spectat ad parabolam datam, illa quocumque dato cono facile delineatur. (*Fig.* 3, 4) Triangulum transiens per axem coni, & diametrum basis sit BAC. Sit vertex parabolæ M, qui inquiritur, & parallelam AC duc MR, quam voca $= z$. Habemus $AC : BC :: z : BR = \frac{BC.z}{AC}$; ergo ex dictis parameter parabolæ, quam voco $= a$, erit $= \frac{AC.z}{BC}$; ergo $z = \frac{a.BC}{AC}$. Inter latera BC, BA applica MR, quæ sit quarta proporzionalis post AC, BC, & parametrum datam, & per punctum M duc planum, cujus sectio communis cum basi sit normalis CA, cujusque sectio cum triangulo BAC sit parallela BC, sectio plani, & superficiei conicæ erit parabola data. Ex his palam fit, non posse nos per datum conum obtinere lineas omnes secundi gradus, sed solumodo omnes parabolas, & adhibita cautione, de qua diximus numero superiori, omnes ellypses; verum hyperbolæ omnes per unum determinatum conum obtineri non possunt.

15. Tametsi per sectionem coni omnes lineas secundi ordinis possumus delineare, tamen geometræ præsertim recentiores in id animum intenderunt, ut easdem lineas describerent per semitam puncti, quod ope instrumenti movetur opportunis quibusdam conditionibus conservatis. Nos hic eos modos seligemus, qui faciliores sunt, & praxi maxime accommodati. Primum modum delineandi parabolam describemus. Repræsentet recta DB (*Fig.* 8.) regulam immobilem, cui ad angulos rectos insistat alia regula CE ita mobilis, ut ubique in motu situm retineat parallelum. Fili FMC, cujus longitudo æquat CE, extremitas una firmetur in puncto immobili F, altera alligetur regulæ mobili in puncto C. Ex F in DB duc normalem FR. In eum situm transferatur EC, ut transeat per punctum F. Filum stilo distendatur, qui in prima positione dividet rectam FR bifariam in A; nam punctum C in hac positione quum incidat in K, KA+AF ex præparatione $=$ KR; ergo ablata communi KA remanebit AF$=$AR. Moveatur jam regula CE, & stilus partem fili MC retinens adjunctam regulæ describat curvam AM, ajo, hanc fore parabolam, cujus vertex A, & cujus parameter $= 2FR = 4AF$. Ex puncto M ad angulos rectos ordina MP, quam voca $= y$, $AP = x$, $AF = AR = b$. Quum $MC + MF = CE$, dempta parte MC, remanebit $MF = ME = RP$; atqui $RP = b + x$, $FP = x - b$, & $FM = \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$; ergo $b + x = \sqrt{xx - 2bx + bb + yy}$, seu $bb + 2bx + xx = xx - 2bx + bb + yy$, seu $4bx = yy$, quæ est ad parabolam verticis A, & parametri $= 4b$. Igitur ut hac methodo delineetur parabola, nihil faciendum est aliud, nisi ut secentur AF, AR singulæ æquales quartæ parti parametri, & reliqua ut antea peragantur.

16. Punctum F, ubi extremitas fili firmata est, dicitur focus, seu umbilicus parabolæ, qui a vertice A distat per quartam partem parametri. Recta DB di-

distans pariter a vertice per parametri partem quartam, dicitur directrix. Itaque proprietas parabolæ hæc est, ut recta FM, quæ a quolibet puncto curvæ M ducitur ad focum F, sit æqualis ME, quæ ab eodem puncto M ducitur normalis in directricem. Agatur tangens MQ, & producatur in S, quæ, ut demonstratum est, abscindit AP=AQ; ergo habebimus QF=RP =ME=MF; igitur quum triangulum QFM sit isosceles, angulus FMQ= FQM; sed FQM=CMS; ergo FMQ=CMS, quæ est elegans proprietas tangentis parabolam.

17. Ellypsis describitur hoc modo. Firmentur duæ fili extremitates in duobus punctis immobilibus F, f (*Fig. 9.*); tum stilus M retinens distensum filum in gyrum agatur, curva AMa ab ipso descripta erit ellypsis. Ex quolibet puncto M in Ff demittatur normalis $MP=y$, longitudo fili vocetur $=2a$, divisa Ff bifariam in C, vocetur $CF=b$, $CP=x$: ergo $FP=b-x$, $fP=b+x$. Differentia inter Mf, MF vocetur $=2z$; ergo $MF=a-z$, $Mf=a+z$. Ex angulo recto habemus $MF^2=FP^2+MP^2$, $Mf^2=fP^2+MP^2$; $aa-2az+zz=bb-2bx+xx+yy$) ergo dempta prima æquatione ex $aa+2az+zz=bb+2bx+xx+yy$) secunda

$4az=4bx$, sive $z=\frac{bx}{a}$, qui valor in primam æquationem introductus præbebit

$aa-2bx+\frac{b^2x^2}{aa}=bb-2bx+xx+yy$, sive

$aa-bb-xx.\frac{aa-bb}{aa}=yy$, sive

$aa-xx:yy::aa:aa-bb$, quæ est æquatio ad ellypsim, cujus semiaxis major $=a$, semiaxis minor $=\sqrt{aa-bb}$. Quapropter axis major est æqualis longitudini fili. Semiaxis minor sit CB, agatur FB, constat hanc esse æqualem dimidio longitudinis fili; ergo $CB=\sqrt{aa-bb}$, ut ex ipsa æquatione colligitur. Facillimum igitur est, ellypsim delineare, cujus dati sint axes. Sume filum æquale axi majori Aa, quem interseca per axem minorem Bb, ut punctum C utrumque dividat bifariam; inter angulos rectos ACB, aCB applica dimidium longitudinis fili in BF, Bf, puncta F, f illa ipsa erunt, in quibus extremitates fili sunt alligandæ.

18. Hæc puncta F, f vocantur foci, seu umbilici ellypseos. Quapropter si a focis ad quodlibet ellypsis punctum ducantur duæ FM, fM, harum summa æquabit axem majorem Aa. Si accipiatur CR tertia proportionalis post CF, CA, ut $CR=\frac{aa}{b}$, & per punctum R agatur SR primo axi normalis; idemque fiat ad alteram partem, ut inveniatur fr, istæ lineæ SR, fr dicuntur directrices, & referuntur ad focum sibi propiorem. Jam vero si ex quolibet puncto M curvæ ducantur MS normalis directrici, & MF ad suum focum, ajo fore $MS:MF::a:b$. Nam quoniam $CR=\frac{a^2}{b}$, erit $RP=MS=\frac{a^2-bx}{b}$; sed

$MF=\sqrt{\overline{b-x}^2+y^2}=\sqrt{\overline{b-x}^2+\frac{aa-bb.\,aa-xx}{aa}}$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\begin{array}{l} a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2 \\ a^4 \qquad\qquad - a^2x^2 \\ -a^2b^2 \qquad + b^2x^2 \end{array}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - 2a^2bx + b^2x^2} = \frac{a^2 - bx}{a}.$$

Ergo MS:MF :: $\frac{a^2 - bx}{b} : \frac{a^2 - bx}{a} :: a:b ::$ AC:FC. Itaque puncto M cadente in A habebimus AR:AF::AC:CF. Si b, hoc est FC $= o$, quæ hypothesis convertit ellypsim in circulum, fiet CR infinita. Circulus igitur est ellypsis, in qua foci coincidunt cum centro, directrices positæ sunt in infinita distantia. Si foret $b = a$, seu FC = AC, ut focus sit in vertice, nullescit secundus axis, nempe CB $= o$; ergo ellypsis convertitur in lineam rectam directrici normalem. Si agatur tangens qMT, ajo angulum TMF = qMf. Ex duabus proportionibus CF:CA::CA:CR, CP:CA::CA:CT provenit tertia CF:CT::CP:CR, & dividendo CF:CT − CF = TF::CP:PR, & duplicando antecedentes Ff: FT::2CP:PR; atqui 2CP = CR + CP − PR = rP − PR; ergo Ff:FT::rP − PR:PR, & componendo fT: FT::Pr:PR: sed ductis in tangentem normalibus FQ, fq est fT:FT:: fq:FQ; ergo fq:FQ::Pr:PR seu::Ms:MS; atqui Ms:MS::Mf:MF; ergo fq:FQ::Mf:MF; igitur triangula rectangula Mfq, MFQ sunt similia, adeoque angulus qMF = QMF, per quam proprietatem novus modus sese nobis offert ducendi tangentem ellypsis.

19. Simili prorsus modo delineatur hyperbola. In plani immobilis puncto f ita firmetur extremitas regulæ fMX, (*Fig.* 10.) ut circa punctum f libere regula rotari possit. In altero ejusdem plani puncto F alligetur filum, cujus altera extremitas alligetur regulæ punto X: longitudo vero fili sit minor regula fX ita, ut differentia sit minor Ff. Ponatur regula super Ff, & filum distendatur stilo qui cadet in A. Interim dum regula convertitur circa f, stilus retinens applicatam regulæ partem fili, illudque distendens describet hyperbolam AM. Ex puncto M duc in fF perpendicularem MP, divide Ff bifariam in C, & Aa, quæ pariter sit bifariam divisa in C, sit differentia regulæ, & fili. Voca CA $= a$, CF $= b$, CP $= x$, PM $= y$, summa rectarum Mf + MF = $2z$, erit MF $= z - a$, Mf $= z + a$. Triangula FMP, fMP præbent æqualitates duas

$$MF^2 = MP^2 + PF^2 \qquad aa - 2az + zz = yy + bb - 2bx + xx$$

sive

$$Mf^2 = MP^2 + Pf^2 \qquad aa + 2az + zz = yy + bb + 2bx + xx$$

Detrahatur prima ab altera, & fiet $4az = 4bx$, vel $z = \frac{bx}{a}$. Hic valor in prima æquatione collocetur, ut nascatur $aa - 2bx + \frac{b^2x^2}{a^2} = yy + bb - 2bx + xx$, seu reducta æquatione $xx - aa : yy :: aa : b^2 - a^2$: quæ est æquatio ad hyperbolam, cujus semiaxis primus = CA $= a$, secundus $= \sqrt{bb - aa}$. Quapropter habes methodum describendi hyperbolam datam. Sit axis primus Aa, quem divide bifariam in C, ex A normalem CA duc AB dimidio secundi axis æqualem, junge CB, cui fac æquales CF, Cf. In f pone regulam ut supra

pra, accipe filum, quod sit minus longitudine regulæ fX differentia Aa, extremitatibus fili firmatis in F, X per motum jam expositum hyperbola data delineabitur.

20. Puncta F, f dicuntur foci, seu umbilici hyperbolæ. Si ex quolibet puncto curvæ M ad focos agantur lineæ Mf, MF, harum differentia erit constans & æqualis primo axi. Si accipiantur CR, Cr, quarum singulæ $= \frac{aa}{b}$, hoc est sint tertiæ proportionales post CF, CA, & axi Aa normales agantur rectæ RS, rs, istæ dicuntur directrices, & illum habent focum, qui sibi est propior. Si ex quolibet puncto M normalis directrici RS sit MS, & ad suum focum F agatur MF, ajo fore $MS : MF :: a : b$. Etenim quando $CR = \frac{aa}{b}$, erit RP

$$= MS = \frac{bx - aa}{b}; \text{ atqui } MF = \sqrt{\overline{x-b}^2 + yy} = \sqrt{\overline{x-b}^2 + \frac{\overline{bb-aa}.\overline{xx-aa}}{aa}}$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\begin{matrix} a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 \\ b^2x^2 \qquad\qquad - a^2b^2 \\ - a^2x^2 \qquad\qquad + a^4 \end{matrix}} = \frac{1}{a}\sqrt{b^2x^2 - 2ba^2x + a^4} = \frac{bx - aa}{a};$$

Ergo $MS : MF :: \frac{bx - aa}{b} : \frac{bx - aa}{a} :: a : b :: AC : FC$. Si $CA = a = o$, tunc puncta A, R cadent in centro C, & hyperbolæ simul cum directricibus confundentur cum linea recta, quæ a centro C ducitur normalis Ff. Si $b = a$, hoc est coeant foci cum verticibus, secundus axis provenit $= o$; quare hyperbolæ coincident cum axe ex utraque parte producto. Duc tangentem MQq, ajo angulum $fMQ = FMQ$. Tangens secet axem primum in T. Quoniam $CF : CA :: CA : CR$, item $CP : CA :: CA : CT$, erit $CF : CT :: CP : CR$ & dividendo $CF : CF - CT = TF :: CP : PR$, & duplicatis antecedentibus $fF : TF :: 2CP : PR$; atqui $2CP = CR + CP + RP = rP + RP$; ergo $fF : TF :: rP + RP : RP$, & dividendo $fT : FT :: rP : RP$; sed ductis in tangentem normalibus FQ, fq est $fT : FT :: fq : FQ$; ergo $fq : FQ :: rP : RP$, sive $Ms : MS$; atqui $Ms : MS :: Mf : MF$; ergo $Mf : MF :: fq : FQ$. Triangula itaque rectangula fMq, FMQ sunt similia; ergo angulus $qMf = QMF$.

21. In præparatione instrumenti posui, filum minorum regula fX. Quod si filum majus regula acciperetur ha, ut differentia $= 2a$, stilus filum distendens motu suo delinearet hyperbolam oppositam am. Demonstrationem, quæ eadem est prorsus, lectorum industriæ relinquo. Si differentia inter regulam, & filum nulla esset, existente $2a = o$, puncta A, a caderent in puncto medio C: in hoc casu stilus, qui filum distenderet, iter faceret per lineam rectam perpendicularem Ff.

22. Quamquam methodus hæc describendi tres sectiones conicas genuina est, & sæpe ad praxim perduci potest: tamen nonnihil deficiet, si exactissima desideretur curvarum descriptio. Nam si instrumentis aptentur fila, quum modo majorem, modo minorem patiantur distractionem a stilo distrahente, non eandem ubique longitudinem conservabunt, adeoque exacte sectio conica non delineabitur. Si filis substituamus catenulas, vitabimus quidem distractionis periculum,

culum, sed non describemus curvam, sed polygonum multorum laterum licet exiguorum, quod erit polygonum curvæ describendæ inscriptum. Illud instrumentum cœteris erit anteferendum, quod constat firmis solidisque regulis, quæ moventur; hoc enim adnotatis incommodis non laborabit. Quod pertinet ad hyperbolam, nullum, quantum mihi constat, suppetit instrumentum rigidis virgis compositum, quod quidem simplex sit, & praxi accommodatum. Duo autem ellypsi describendæ suppetunt fundata in duabus hujus curvæ proprietatibus, quæ modo sunt demonstrandæ; post, unum addemus idoneum parabolæ delineandæ.

23. Si inter rectas lineas ACa, BCb (*Fig.* 11.) facientes angulum rectum concipiatur moveri data linea ST: ajo quodlibet ejus punctum M describere ellypsim. Agatur MP parallela CB, & vocetur $SM = a$, $TM = b$, $CP = x$, $PM = y$. Quoniam valet proportio
SM : PC :: TM : PT sive

$a : x :: b : PT = \frac{bx}{a}$; igitur propter rectangula triangula quum sit

$TM^2 = PT^2 + PM^2$ habebimus æquationem

$b^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} + yy$, sive $a^2 - x^2 : y^2 :: a^2 : b^2$, quæ est ad ellypsim, cujus semiaxis unus est $CA = SM = a$, alter est $CB = TM = b$. Si punctum describens M cadat inter puncta S, T, ut in N, vocata $SN = a$, $NT = b$, nihil mutatur æquatio. Quod si N dividat ST bifariam, quum in hoc casu $a = b$, curva descripta erit circulus. In hac proprietate innititur instrumentum ellypsi describendæ idoneum, quod circinus ellypsis solet appellari. Duobus modis data ellypsis per hoc delineatur. Primo modo capienda est $ST = a - b$, $SM = a$ (a, b sunt semiaxes dati), quare $TM = b$, & punctum describens erit M. Secundo modo capienda est $ST = a + b$, $SN = a$, ut $TN = b$, & punctum describens erit N.

24. Ad secundam methodum venio. Sit linea CL (*Fig.* 12.) mobilis circa punctum C, & circa punctum L in CL positum mobilis sit alia linea LTM. Abscinde $LT = CL$; tum punctum T jubeatur moveri in data recta CA transeunte per punctum C: ajo, lineæ LTM quodlibet punctum M descripturum ellypsim. Integra linea CLM vocetur $= a$, $TM = b$; ergo $CL + LT = a - b$, & $LT = CL = \frac{a-b}{2}$. Ex punctis M, L ducantur MP, LO normales in CT; patens est CT fore divisam bifariam in puncto O. Vocetur $CP = x$, $PM = y$; ergo $TP = \sqrt{bb - yy}$, & $CT = x - \sqrt{bb - yy}$, & $CO = TO = \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2}$: atqui est LT : TM :: TO : TP; ergo $\frac{a-b}{2} : b :: \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2} : \sqrt{bb - yy}$, sive duplicando antecedentes, & componendo

$a : b :: x : \sqrt{bb - yy}$, & quadrando $a^2 : b^2 :: x^2 : b^2 - y^2$, quæ est ad ellypsim, cujus semiaxis major $CA = a$, minor $CB = b$. Si punctum describens caderet inter puncta L, T ut in N, curva descripta esset similiter ellypsis, cujus primus semiaxis foret $= CL + LN$, secundus $= TN$. Si punctum describens esset L, curva descripta evaderet circulus. Si punctum describens situm esset post pun-

puncta T, L ut in H; vel $LH = CL$, & tunc describitur linea recta normalis CA; vel $LH < CL$, & describitur ellypsis, cujus semiaxis minor $CQ = CL - LH$, & major $= CL + LH$; vel $LH > CL$, & ellypsis descripta habet semiaxem secundum $CR = LH - CL$, & primum $= CL + LH$. Hæc omnia eadem methodo demonstrantur. Itaque si per instrumentum ex hac lege constructum data sit describenda ellypsis, cujus semiaxis primus $= a$, secundus $= b$, accipiatur omnis longitudo $CLM = a$, $TM = b$, & fiet $CL = LT = \frac{a-b}{2}$; aut accipiatur $CL = LT = \frac{a+b}{2}$, $CL + LN = a$, ut $NT = b$: aut sumatur $CL = LT = \frac{a+b}{2}$, $LH = \frac{a-b}{2}$; aut tandem $LH = \frac{a+b}{2}$, $CL = LT = \frac{a-b}{2}$; atque in omnibus hisce casibus data ellypsis delineabitur. Quæ quum ita sint, perspicuum est ellypsim per instrumenta ex regulis solidis confecta, tutissime delineari.

25. Ad parabolam delineandam construi poterit aliud instrumentum, cujus fundamentum paucis aperiam. Linea CD (*Fig.* 13) perpendicularis datæ AB ita accommodetur, ut libere moveri possit motu sibi ipsi parallelo. Recta MN parallela sit datæ AB. In dato puncto A constituatur norma KAL mobilis circa punctum A. Ita moveatur norma, ut concursus linearum AL, CD semper permaneat in linea MN: ajo concursum linearum AK, CD describiturum parabolam AFI, quæ in A tangetur a linea AB. Nam propter angulum rectum FAH erit $GH : AG :: AG : GF$; ergo $GH . GF = AG^2$. Quum GH sit constans, fiat $= a$, $AG = x$, $GF = y$, igitur $ay = x^2$, quæ est æquatio parabolæ, cujus parameter $= a$, & cujus abscissæ $= x$ sumendæ sunt in tangente. Atque hæc sufficiant de descriptione linearum secundi gradus.

CAPUT SEXTUM.

De locis geometricis secundi gradus.

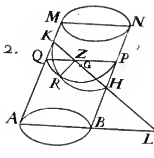
1. Locus geometricus æquationis indeterminatæ continentis variabiles duas x, y est linea vel recta, vel curva, cujus coordinatarum proportio ab illa æquatione exprimitur. Locus geometricus æquationum primi gradus est linea recta; loci vero geometrici æquationum secundi gradus sunt sectiones conicæ. Theoria locorum secundi gradus certam ostendere debet methodum, qua cognoscamus, ad quamnam sectionem conicam secundi gradus æquatio pertineat, legesque tradere, quibus coordinatas æquationi respondentes assignemus. Plures excogitatæ fuerunt methodi ab analystis, ut id assequerentur, quas inter merentur laudem & ea, quam Craigius proposuit, & Marchio Hospitalius ornavit, & ea, quam Tom. 1. Ac. Pet. dedit Hermannus, quamque Vincentius Riccatus Tom. 1. Opusc. in epistola ad Fantonum, suppletis quibusdam casibus difficilioribus ab Hermanno omissis, perficit. Nos tamen, quamquam has ingeniosas, & utiles esse non inficiamur, eam hic amplectemur methodum, cujus auctor fuit Cl. Wit, non ideo tantum, quia hanc plerique sequuntur, sed quia me-

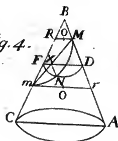
methodis est similior, quibus hactenus usi sumus. Hujus autem methodi vis omnis sita est, ut, opportunis adhibitis substitutionibus, æquatio proposita ad aliquam e simplicioribus sectionum conicarum æquationibus perducatur; deinde ut, curva descripta, & substitutionibus rite consideratis, abscissæ, & ordinatæ determinentur, quæ propositæ æquationi satisfaciunt.

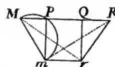
2. Primo igitur simplicissimas cujusque sectionis æquationes inspicere oportet, atque alte animo infigere. Si de Parabola sermo sit, ejus æquatio est $ax=yy$, in qua a est parameter, y ordinatæ, x abscissæ in diametro acceptæ, quarum origo est in curva; quod si abscissæ in tangente accipiantur, æquatio erit $ay=xx$. Si proponantur æquationes $-ax=yy$, $-ay=xx$, constat eas esse ad eamdem parabolam, & id haberi tantum discriminis, quod curva primæ æquationis ad partem negativarum abscissarum erit describenda, secundæ vero abscissa quæcumque vel positiva, vel negativa ordinatam habet negativam. Quoad ellypsim, positis semidiametris b, c, si abscissæ sumantur in diametro $=2b$, & incipiant in centro, æquatio est $\frac{c^2}{b^2}.\overline{b^2-x^2}=y^2$; si vero originem habeant in puncto curvæ, $\frac{c^2}{b^2}.\overline{2bx-xx}=yy$; qua in hypothesi si abscissæ accipiantur in tangente fiet $\frac{c^2}{b^2}.\overline{2by-yy}=xx$. Hinc si sit $c=b$, & coordinatarum angulus rectus, quæ duo natura circuli postulat, erunt æquationes ipsius circuli $bb-xx=yy$, $2bx-xx=yy$, $2by-yy=xx$. In prima x incipiunt in centro, in duabus aliis in puncto curvæ, sed in secunda diametrum, in tertia tangentem occupant abscissæ. Quoad hyperbolam demum abscissis sumptis in prima diametro, & incipientibus in centro valet æquatio $\frac{cc}{bb}.\overline{xx-bb}=yy$, sumptis vero in diametro secunda $\frac{bb}{cc}.\overline{xx+cc}=yy$. Si x incipiant a vertice hyperbolæ, & si sumantur in diametro, æquatio erit $\frac{cc}{bb}.\overline{2bx+xx}=yy$, si sumantur in tangente $\frac{cc}{bb}.\overline{2by-yy}=xx$. Si x incipiant a vertice hyperbolæ oppositæ valebunt æquationes $\frac{cc}{bb}.\overline{xx-2bx}=yy$, $\frac{cc}{bb}.\overline{yy-2by}=xx$; in prima x accipiendæ sunt in diametro, in secunda vero in tangente. Si $c=b$, hyperbola erit æquilatera. Æquatio hyperbolæ inter asymptota sic se habet $xy=bc$, & si coordinatæ sint ad angulum rectum, spectat ad hyperbolam æquilateram. Ad has itaque omnes aliæ æquationes sunt reducendæ.

3. Ut recto cum ordine theoria progrediatur, in duas classes tribuo æquationes indeterminatas secundi gradus. Prima classis eas continebit, in quibus adest alterutrum, aut utrumque quadratum coordinatarum sine earumdem rectangulo, vel sine ullo quadrato coordinatarum rectangulum, quod planum solet vocari. Classis altera complectetur eas æquationes, in quibus existit planum simul cum uno, aut duobus coordinatarum quadratis. Quæ in prima classe sunt facil-


Q
D
N
B


Fig. 2.
M
N
K
Q
Z
G
P
R
H
A
B
L


Fig. 4.
B
R
O
M
F
X
D
m
N
r
O
C
A


Fig. 5.
M
P
Q
R
m
r

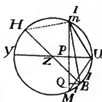
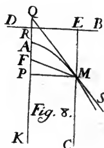
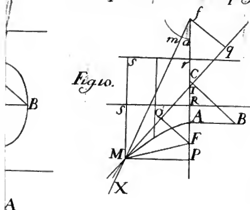
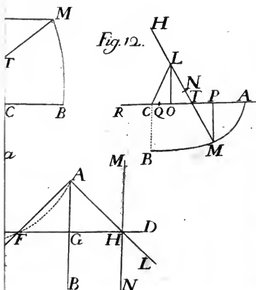

I
m
H
y
P
U
Z
Q
B
M

Fig. 7.


Q
D
E
B
R
A
F
P
M
S
Fig. 8.
K
C


Fig.10.
f
m
a
q
s
r
C
I
R
S
Q
A
B
F
M
P
X
B


A
M
T
C
B
Fig.12.
H
L
N
T
P
A
R
C
Q
O
M
B
a
M
A
F
G
H
D
L
B
N

facillime ad fimpliciffimas reducuntur, fi pro una variabili addita, demptave conftante altera variabilis fubftituatur, ad quam fubftitutionem faciendam fœpe complenda erunt quadrata per additionem quadrati dimidii coefficientis. Ubi fimpliciffimam inveneris, curvam defcribe, tum per fingulas fubftitutiones regredere, & determina propofitæ æquationis coordinatas. Exemplis theoria, quæ non eft difficilis, planiffime declarabitur.

4. Exemplum primum. Dato angulo coordinatarum proponenda conftruatur æquatio $ax+ab=yy$. Quando $ax+ab=a.\overline{x+b}$ fiat $x+b=z$; ergo facta fubftitutione proveniet $az=yy$, quæ eft ad parabolam. Diametro AB, (*Fig.* 1.) parametro $=a$, defcribe parabolam, cujus coordinatæ datum faciant angulum, erunt $AB=z$, $BC=y$; fed $x=z-b$. Secetur ergo $AD=b$, erunt $DB=z-b=x$. Punctum D igitur erit origo abfciffarum, quæ pofitivæ funt ad partem M, negativæ ad oppofitam plagam. Ordinatæ $=y$ erunt BC ad unam partem pofitivæ ad alteram negativæ. Si æquatio fuiffet $ax-ab=yy$, adhibenda fuiffet fubftitutio $x-b=z$, adeoque $x=z+b$; ergo producta diametro in E, ut $AE=b$, in puncto E inciperent abfciffæ $=x$ pofitivæ ad plagam M.

5. Exemplum alterum. Æquatio conftruenda fit $xy+ax=aa-ay$. Fac primum $y+a=z$, & $y=z-a$; ejice ab æquatione y, ut fiat $zx=2aa-az$, five translatis terminis $zx+az=2aa$. Fac deinde $x+a=p$, & habebis $pz=2aa$ æquationem hyperbolæ inter affymptota. Rectæ MM, NN (*Fig.* 2.) fe interfecent in dato coordinatarum angulo, abfcinde $CA=a$, $AB=2a$, & inter affymptota MM, NN defcribe hiperbolam tranfeuntem per punctum B; erunt $CF=p$, $FG=z$; fed $x=p-a$; ergo $AF=x$, quæ abfciffæ initium habent in A. Præterea quum fit $y=z-a$, divide AB bifariam in D, & per D duc DH parallelam CA, erunt $HG=z-a=y$. Quum vero $DH=AF$, $DH=x$, $HG=y$. Ex conftructione difcimus $y=a$, fi $x=o$; fi x eft pofitiva, & $< a$, ordinatæ pofitivæ funt; fi $x=a$, eft $y=o$; fi $x>a$, ordinatæ funt negativæ, pofitaque x infinita, y negativa $=a$. Si x funt negativæ, & $<a$, ordinatæ pofitivæ funt; fi x negativa $=a$, ordinata eft infinita; demum fi $>a$, ordinatæ negativæ reperiuntur. Si æquatio foret $xy+ax=-aa+ay$, fubftitutiones $y+a=z$, $x-a=p$, exhiberent $pz=-2aa$. Quare pofita $CA=a$, fumenda effet $AE=2a$ ad partem ordinatarum negativarum, & coordinatæ forent DH, HI, fed HI effet negativa tendens deorfum.

6. Suppofui hactenus, quantitates conftantes æquationis ejufmodi effe, ut locum præbeant congruis fubftitutionibus. Quod fi effent magis compofitæ, aliis introductis fpeciebus ad fimpliciores revocabimus. Sit æquatio $aa-bx=yy$. Fac primum $aa=bc$, ut habeas $b.\overline{c-x}=yy$, tum $c-x=p$, ut habeas $bp=yy$ æquationem ad parabolam. Ita in æquatione $\frac{abb}{m}+cx=yy$, pone $bb=cf$, ut æquatio fiat $c.\overline{\frac{af}{m}+x}=yy$. Hæc æquatio pofita $\frac{af}{m}+x=p$ ad fimpliciffimam redigetur. In æquatione magis compofita $\frac{aax-bbx+m^3}{a+b}=yy$, pone $m^3=\overline{aa-bb}.c$ & refultabit $\overline{a-b}.x+\overline{a-b}.c=yy$; demum utere fubftitutione $x+c=p$. Similiter in æquatione $xy+ax=bb-cy$ utere primum fubftitutione $y+a=z$, & fiet $xz+cz=bb+ac$, tum alia fubftitutione

tione $\overline{x+c}=p$, ut fit $pz=bb+ac$. In hac fac $bb=ae$, & habebis $pz = a.\overline{c+e}$

7. Exemplum tertium. Sit $xx+2ax=ay+by$. Adde utrique parti quadratum dimidii coefficientis, nempe aa, ut obtineas $\overline{xx+2ax+aa} = aa+ay+by$; pone $x+a=p$ & proveniet $pp=aa+ay+by=\overline{a+b}.\frac{aa}{a+b}+y$; pone iterum $\frac{aa}{a+b}+y=z$, & invenies æquationem ad parabolam maxime simplicem $pp=\overline{a+b}.z$. Parametro $=a+b$ describe parabolam A G (*Fig.* 3.), cujus tangens sit A F: erunt A F$=p$, F G$=z$; sed $p-a=x$: Ergo secta A C$=a$, erunt C F$=x$: item quum sit $y=z-\frac{aa}{a+b}$, & quum C D ex natura parabolæ $=\frac{aa}{a+b}$, per punctum D agatur tangenti A F parallela D H, erunt H G$=y$, & D H $=$ C F$=x$.

8. Exemplum quartum. Æquatio utrumque quadratum contineat, & sit $xx+ax=2yy-2by$. Adde primum quadratum $\frac{1}{4}aa$, ut habeas $xx+ax+\frac{aa}{4}=2yy-2by+\frac{aa}{4}$; fac $x+\frac{a}{2}=p$, & erit $pp=2yy-2by+\frac{aa}{4}$, sive $\frac{pp}{2}-\frac{aa}{8}=yy-by$. Adde iterum $\frac{bb}{4}$, & pone $y-\frac{b}{2}=z$, ut fit $\frac{pp}{2}-\frac{aa}{8}+\frac{bb}{4}=zz$, quæ æquatio est semper ad hyperbolam.

9. Triplex distinguendus est casus. In primo ponitur $aa=2bb$, in quo æquatio fit simplicior, nempe $pp=2zz$, seu extracta radice $p=\pm z\sqrt{2}$, sive $p: \pm z :: \sqrt{2}: 1 :: \sqrt{2bb}: b :: \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$. Sit C A$=\frac{a}{2}$, & pone A B$=$A D $=\frac{b}{2}$, (*Fig.* 4) & duc indefinitas C B, C D, erunt C F$=p$, F G$=z$; sed $y=z+\frac{b}{2}$; ergo per D ducta D H parallela C F, erunt G H$=y$; item $x=p-\frac{a}{2}$; ergo A F, seu D H$=x$. Q. E. I.

10. Si $aa>2bb$, fiat $aa-2bb=mm$, & habebimus æquationem $\frac{pp}{2}-\frac{mm}{8}=zz$, seu $pp-\frac{mm}{4}=2zz$; ergo $pp-\frac{mm}{4} : zz :: 2 : 1 :: \frac{mm}{4} : \frac{mm}{8}$, quæ est ad hyperbolam, & exhibet sequentem constructionem. Posita semidiametro C E$=\frac{m}{2}$, (*Fig.* 5.) secunda C K$=\frac{m}{2\sqrt{2}}$, describe hyperbolam E G. Erunt C F$=p$, F G$=z$. Abscinde C A$=\frac{a}{2}$, erunt A F$=p-\frac{a}{2}=x$; parallelam secundæ diametro duc A D$=\frac{b}{2}$, & parallelam primæ per D age D H, erunt H G$=z+\frac{b}{2}=y$; coordinatæ igitur propositæ æquationis erunt D H, H G. Q. E. I.

11. De-

11. Demum si $aa < 2bb$, pone $2bb - aa = mm$, ut habeas $\frac{pp}{2} + \frac{mm}{8} = zz$, sive $pp + \frac{mm}{4} : zz :: \frac{mm}{4} : \frac{mm}{8}$, quæ sequentem constructionem præbet. Posita secunda semidiametro $CK = \frac{m}{2}$, (*Fig.6*) prima $CE = \frac{m}{2\sqrt{2}}$, describe hyperbolam EG, erunt $CF = p$, $FG = z$; ergo secta $CA = \frac{a}{2}$, erunt $AF = p - \frac{a}{2} = x$. Sit $AD = \frac{b}{2}$ parallela CE, erunt $HG = z + \frac{b}{2} = y$; ergo DH, HG erunt coordinatæ quæsitæ.

12. Quoniám methodus Cl. Wit, tametsi fuerit a pluribus scriptoribus illustrata, implicatior est aliquanto in æquationibus secundæ classis continentibus planum xy, idcirco eorum rationem deferens, advocabo methodum quantitatum indeterminatarum, & artificium adhibebo, quod constructionem reddit per quam facilem. Primum ita ordino æquationem, ut una pars contineát yy affectum signo $+$, & omnis coefficientis expers simul cum rectangulo ex y & suo multiplicatore; in aliam æquationis partem terminos reliquos rejicio. Deinde addito quadrato dimidii ejus quantitatis, quæ multiplicat y, compleo quadratum integrum, cujus radici novam indeterminatam facio æqualem, quam voco z, factaque substitutione sese offert æquatio, a qua abest planum xz. Si construam curvam indeterminatarum x, z, ut revocatis substitutionibus determinem y; fieri numquam poterit, ut y desinant in lineam abscissarum x, sed desinent in lineam, cujus abscissæ erunt ad x in data ratione. Quare ita construo æquationem, ut tamquam abscissas non sumam x, sed mx, quæ species m designat rationem indeterminatam deinceps determinandam. Ad hunc finem efficiam, ut x in æquatione, quæ turbari non debet, ubique inveniatur multiplicata per m, & describam curvam, cujus abscissæ $= mx$, ordinatæ $= z$. Hoc effecto ab initio abscissarum mx lineam rectam ducam ejusmodi ángulum facientem, ut ordinatæ z aut addatur, aut dematur ea quantitas, quam calculus indicat, & addita detractave constante, si opus est, determinabo y. Postremo definiam valorem speciei m, qui efficit, ut ordinatæ y desinant in abscissas $= x$, atque determinabo, quinam debeant esse omnes anguli, ut coordinatæ x, y datum angulum faciant. Theoriam hanc, quæ hoc modo proposita videtur non ita facilis, exempla reddent clarissimam.

13. Exemplum quintum. Sit æquatio, ut par est, ordinata $yy - 2ay + 2xy = aa + 4ax - xx$. Addo utrique parti $aa - 2ax + xx$ quadratum dimidji coefficientis y, ut habeam $\overline{y - a + x}^2 = 2aa + 2ax$. Pono $y - a + x = z$; & invenio $zz = 2aa + 2ax$, quæ est ad parabolam; Verum ita curva construenda est, ut ejus abscissa non sit x, sed mx. Quare æqualitate custodita ita formulam dispono $zz = \frac{2a}{m} . \overline{ma + mx}$. Itaque parametro $AB = \frac{2a}{m}$ intelligatur descripta parabola AI (*Fig.7*), cujus abscissæ $AF = ma + mx$, ordinatæ $FHI = z$: igitur secta $AC = ma$, erunt $CF = mx$. Ad inveniendam $y = z + a - x$, producatur BA in D, donec $AD = a$, & duc diametro parallelam DG, ad quam protrahantur IF, erunt $EG = mx$, $GI = z + a$, ex qua detrahenda est

x, ut inveniatur y. Intelligatur ducta EH sic, ut interceptæ $GH = x$; fiet $HI = z + a - x = y$. Ut autem y in x desinant, opus est, ut $EH = x$; igitur determinandus est valor m, ut, existente $GH = x$, sit item $EH = x$, dato angulo EHG. Fiat triangulum RST, cujus angulus S æquet datum EHG, cujusque latera SR, ST sint inter se æqualia, singula autem faciam $= a$. Sumpta RT, eam voco $= e$. Itaque erit $a : e :: x : mx :: 1 : m$; ergo $m = \frac{e}{a}$; ergo parameter $AB = \frac{2a}{m} = \frac{2aa}{e}$, $AC = ma = e$. Quando angulus $EGH = T$, angulus BAF erit complementum ad duos rectos anguli T. Igitur diametro AF, parametro $AB = \frac{2aa}{e}$ & angulo BAF æquante complementum ad duos rectos anguli T, delineetur parabola; tum accipiatur $DA = a$, agatur DG parallela diametro AF, abscindatur $DE = e$, demum agatur EH faciens angulum $GEH = R$: habebitur $EH = x$, $HI = y$. Q. E. I. Corollarium. Si coordinatæ x, y debeant concurrere in angulo recto, proveniet $m = \sqrt{2}$.

14. Exemplum sextum. Ad construendam æquationem jam ordinatam $yy - xy = aa - xx$, addo $\frac{1}{4}xx$, quod est quadratum dimidii coefficientis y, ut fiat $\overline{y - \frac{1}{2}x}^2 = aa - \frac{3}{4}xx$. Pono $y - \frac{1}{2}x = z$, & oritur $zz = aa - \frac{3}{4}xx$, quæ est æquatio ad ellypsim. Verum si hanc construam, ut coordinatæ sint x, z, in lineam abscissarum x non desinent ordinatæ y. Eo pacto itaque construam, ut coordinatæ sint mx, z. Ob hanc rem multiplico æquationem per mm, ut hanc formam induat $\frac{4m^2z^2}{3} = \frac{4m^2a^2}{3} - m^2x^2$, sive $\frac{4m^2a^2}{3} - \overline{mx}^2 : z^2 :: \frac{4m^2a^2}{3} : a^2$. Semidiametris $CA = \frac{2ma}{\sqrt{3}}$, $CB = a$ intelligo descriptam ellypsim BIA (*Fig.*8), erunt $CF = mx$, $FI = z$. Quum autem $y = z + \frac{1}{2}x$, ducenda est CH sic, ut $HF = \frac{1}{2}x$, & tum habebimus $HI = y$, quæ y, ut in lineam abscissarum x desinant, oportet, $CH = x$. Quum CH debeat esse dupla HF, & angulus coordinatarum CHI datus sit, efformo triangulum RST, in quo angulus S æquet datum, & RS sit dupla ST. Sit $RS = a$, $ST = \frac{1}{2}a$: jungatur RT, & fiat $= e$. Habebimus $a : e :: 1 : m = \frac{e}{a}$; ergo diameter $CA = \frac{2e}{\sqrt{3}}$; remanente $CB = a$. Angulus CFH, sive $BCA = T$. Quare semidiametris $CA = \frac{2e}{\sqrt{3}}$, $CB = a$ facientibus angulum $= T$, describatur ellypsis BIA; demum agatur CH faciens angulum $ACH = R$. Parallelæ CB sint ordinatæ IH, erunt $CH = x$, $HI = y$. Q. E. I. Corollarium. Si angulus H, atque adeo S rectus sit, invenietur $m = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

15. Exem-

15. Exemplum feptimum. Propofita fit æquatio $yy - 3xy + ay = \frac{3ax}{2} - 2xx$, quæ ordinata eft. Addo quadratum $\frac{3x}{2} - \frac{a}{2}$, quæ eft dimidium coefficientis y, ut oriatur $\overline{y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}a}^2 = \frac{xx + aa}{4}$. Pono $y - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}a = z$, ut habeam $4zz = xx + aa$, cujus tamen conftructionem, fi referam ad coordinatas x, z, nunquam obtinebo, ut y definant in x. Accipiens igitur m ut deinceps determinandam, inquiro locum coordinatarum mx, z. Multiplicata æquatione per mm, habeo $4m^2z^2 = \overline{mx}^2 + \overline{ma}^2 : z^2 :: \overline{ma}^2 : \frac{aa}{4}$. Defcribatur hyperbola B I (*Fig.* 9), cujus femidiameter fecunda fit $CA = ma$, prima $CB = \frac{a}{2}$, erunt $CF = mx$, $FI = z$. Ago BK parallelam CF, ut $IK = z - \frac{a}{2}$, cui quantitati adjungenda eft $\frac{3}{2}x$, ut habeam y. Quare ita duco BH, ut $HK = \frac{3}{2}x$, & erit $HI = z - \frac{a}{2} + \frac{3}{2}x = y$. Ut dato angulo BHI, fit $BH = x$, & $HK = \frac{3}{2}x$, pofito angulo $S = BHI$ feco $RS = a$, $ST = \frac{3}{2}a$, & jungo RT, quam voco $= e$. Habeo autem $a : e :: 1 : m = \frac{e}{a}$; igitur femidiameter $CA = e$, remanente $CB = \frac{1}{2}a$: conftituantur iftæ femidiametri ad angulum $BCA = T$, & delineetur hyperbola, agatur BH faciens cum tangente angulum $HBK = R$, erunt $BH = x$, $HI = y$. Corollarium. Si angulus S effet rectus, fieret $ee = aa + \frac{9aa}{4} = \frac{13aa}{4}$; ergo $e = \frac{a\sqrt{13}}{2}$, atque adeo $m = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

16. Nihil reliqnum eft, nifi ut methodum patefaciamus in illis æquationibus, quæ carent termino yy, & quæ reducendæ funt ad hyperbolam inter affymptota. Ita æquatio difponenda eft, ut planum xy nullum coefficiens habeat præter unitatem, & ad unam æquationis partem jaceat fimul cum quadrato xx, ut factum vides in hac formula $xy - \frac{1}{2}xx = ax - ay + aa$. Quæ quantitas in prima parte multiplicat x pone æqualem alii variabili hoc modo $y - \frac{1}{2}x = z$, feu $y = z + \frac{1}{2}x$. Ejice y, ut habeas $xz = \frac{ax}{2} - az + aa$, five $xz - \frac{ax}{2} = aa - az$. Fac $z - \frac{a}{2} = u$, & erit $xu = \frac{aa}{2} - au$, five $xu + au = \frac{aa}{2}$. Si referrem conftructionem æquationis ad abfciffam x, non obtinerem, ut ordinatæ in lineam abfciffarum definerent: quare multiplico æquationem per m, ut fit $u . \overline{mx + ma} = \frac{ma^2}{2}$. Utor ultima fubftitutione $mx + ma = p$, & refultat $pu = \frac{maa}{2}$ æquatio hyperbolæ inter affymptota. In

uno assymptoto secetur $CA = ma$, alteri assymptoto CM (*Fig.* 10) parallela agatur $AB = \frac{a}{2}$, & describatur hyperbola transiens per punctum B, erunt $CF = p$, $FI = u$; sed $mx = p - ma$; ergo $AF = mx$; sed $z = u + \frac{a}{2}$; ergo producta AB, donec $AD = AB = \frac{1}{2}a$, ducatur per D recta EDG parallela CF, erunt $DG = mx$, $GI = z$; atqui $z + \frac{x}{2} = y$; duco igitur DH ita, ut $HG = \frac{1}{2}x$, erit $HI = y$. Ut $DH = x$, oportet determinare m. Quoniam angulus coordinatarum DHG datus est, & $DH : HG$ se habet ut $2 : 1$, efformo triangulum RST, in quo angulus S sit datus, & $RS = a$, $ST = \frac{1}{2}a$, & voco $RT = e$, inveniam $m = \frac{e}{a}$; igitur $CA = ED = e$, & angulus $MCA = T$, $GDH = R$. Igitur inter assymptota facientia angulum $= T$, sumpta $CA = e$, $AB = \frac{1}{2}a$ describatur hyperbola transiens per B; tum accepta $AD = AB$, agatur EDG parallela CA; demum ducatur DH faciens angulum $HDG = R$, erunt $DH = x$, HI parallelæ CM erunt $= y$. Q. E. I.

Corollarium. Si angulus S rectus fuerit, existet $ee = aa + \frac{aa}{4} = \frac{5aa}{4}$; ergo $e = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, & $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Atque per hæc locorum geometricorum secundi gradus theoria in aperto posita est.

CAPUT SEPTIMUM.

Resolvuntur nonulla Problemata secundi gradus indeterminata.

Postquam æquationes omnes secundi gradus docui construere descriptis sectionibus conicis, necesse est, ut in exemplum aliquot problemata indeterminata soluta exhibeam.

1. Problema primum. Circulum, cujus centrum C (*Fig.* 1) tangat recta AQ, in quam incidat secans CQ, interceptæ RQ fiat æqualis QM tangenti perpendicularis, quæritur locus omnium punctorum M, quæ simili ratione determinantur. Ex M in CA productam demittatur normalis MP. Vocetur $MP = AQ = y$, $AP = QM = QR = x$, $CA = a$. Ex proprietate circuli erit $2a + x : y :: y : x$. Ergo $2ax + xx = yy$, quæ æquatio est ad hyperbolam æquilateram, cujus axis $= 2a$, abscissis incipientibus in vertice. Centro C, vertice A describe hyperbolam æquilateram, cujus axes circuli diametro A 2 A sint æquales, hic erit locus quæsitus.

2. Determinationes non sunt omittendæ. Dividatur circulus a duobus diametris orthogonalibus A 2 A, B 2 B. Si punctum R situm sit in primo quadrante A B


Fig. 2.
M
e
B
G
D
N
C
A
H
N
a
F
I
b
E
M

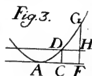

Fig. 3.
G
D
H
A
C
F


Fig. 5.

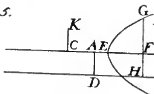

G
K
C
A
E
F
H
D

Fig. 7.


Fig. 8.


Fig. 10.

te A B; posita $QM = QR$, generatur ramus hyperbolæ A M; si positum sit in secundo quadrante B 2 A, ut 2 R, tunc C 2 R secat tangentem in 2 Q, & 2 R 2 Q tanquam negativa spectanda est, adeoque 2 Q 2 M in opposita parte constituta, oritur oppositæ hyperbolæ ramus 2 A 2 M. Si 3 R est in tertio quadrante 2 A 2 B, tangens iterum secatur in Q, sed 3 R Q negative accipienda est, eique æqualis facienda Q 3 M, ut resultet ramus 2 A 3 M. Demum 4 R posito in ultimo quadrante, producetur ramus A 4 M. Per punctum 2 A agatur tangens S 2 S. Eadem hyperbola nata esset, si interceptis S 3 R positæ fuissent æquales S 2 M. Demonstratio facilis est. Nam per constructionem 2 R 2 Q = 2 Q 2 M; sed positis æqualibus arcubus A 4 R, 2 A 3 R est 2 R 2 Q = S R: ergo 2 Q 2 M = S R. Et ergo ablatis æqualibus 2 Q S, R 3 R, quæ æquant circuli diametrum, remanebit S 2 M = S 3 R. Q. E. D.

3. Problema secundum. Intra datum angulum A B C (*Fig.* 2) dato puncto E, invenire curvam M F, ut ducta per E qualibet A M E C sit ubique $AM = CE$. Ex punctis E, M agantur E D, M S parallelæ lateri C B. Vocetur $BS = x$, $SM = y$, $ED = a$, $BD = b$. Quum ex conditione problematis $AM = EC$, erit $AS = BD = b$; ergo $AD = BS = x$. Est autem
A S : S M :: A D : D E, sive analytice
$b : y :: x : a$; ergo $ab = xy$, æquatio ad hyperbolam inter assymptotos B A, B C. Inter hos itaque describatur hyperbola transiens per punctum E; hæc erit curva quæsita. Proprietas eadem locum habet in hyperbola opposita. Nam ducta E 2 C 2 A, quæ oppositam hyperbolam secet in puncto 2 M, erit ubique E 2 C = 2 A 2 M.

4. Problema tertium. Intra angulum B (*Fig.* 3.) dato puncto E, invenire curvam M F, ut ducta qualibet A M E C sit ubique A M : C E in data ratione $m : n$. Fiat eadem præparatio ut antea, eædemque denominationes retineantur. Quoniam $EC : MA :: BD : AS$, erit $n : m :: BD = b : AS = \frac{mb}{n}$; ergo $BA = \frac{mb}{n} + x$, & $AD = \overline{\frac{m-n}{n}.\, b + x}$; atqui $AD : DE :: AS : SM$, seu analitice $\overline{\frac{m-n}{n}.\, b + x} : a :: \frac{mb}{n} : y$; ergo $y.\ \overline{\frac{m-n}{n} b + x} = \frac{mab}{n}$, quæ est hyperbola, cujus constructio hoc modo peragitur. Sume D H, quæ sit ad D B :: $m : n$, & per H duc H K parallelam B C; tum inter assymptota H A, H K describe hyperbolam transeuntem per datum punctum E, in qua ducta qualibet A M E C est semper $AM : EC :: m : n$. Hoc per proprietatem problematis superioris facillime demonstratur; nam secet A C assymptotum in K, per problema superius $AM = EK$; sed $EK : EC :: HD : BD :: m : n$; ergo $AM : EC :: m : n$. Hæc omnia valent etiam in hyperbola opposita.

5. Problema quartum. Dato angulo F B G (*Fig.* 4), & puncto A, ductisque infinitis A F, invenire curvam, cujus chorda A H æquet interceptam G F. Parallelam lateri B F ex puncto A age A D occurrentem in D lateri B G. Ex punctis H ordina H E parallelas A D. Voca $BE = x$, $HE = y$, $BD = a$, $AD = b$. Quoniam $AH = GF$ ex conditione problematis, etiam $DE = BG$; Ergo
$DG = BE = x$, & $GE = 2x - a$; sed
D G : D A :: G E : E H, sive analytice
$x : b :: 2x - a : y$; ergo $xy = 2bx - ab$, sive $ab = x.\ \overline{2b - y}$, quæ est ad hy-

hyperbolam inter aſſymptota; atque hoc modo conſtruitur. Produc DA in I, donec AI = AD, per punctum I duc IK parallelam DB, quæ ſecet FB in K. Inter aſſymptota KB, KI deſcribe hyperbolam tranſeuntem per punctum A: ipſa erit curva quæſita. Linea AB tanget hyperbolam in puncto A, quia linea BK = DI eſt dupla AI. Si linea AF ſecet ramum AH, intercepta GF continebitur in angulo FBG: ſi ſecet ramum AL, intercepta erit poſita in angulo ad verticem KBd: ſi linea ducatur ad hyperbolam oppoſitam, intercepta erit in angulis adjacentibus KBd, FBD.

6. Problema quintum. Iiſdem poſitis ac in ſuperiore problemate, invenire curvam AH (*Fig.* 5.) in qua corda AH ad interceptam GF ſit in ratione data $m:n$. Conſervatis ſuperioris problematis denominationibus, patens eſt fore $DE = a - x$. Eſt autem $AH : GF$, ſeu $DE = a - x : GB :: m : n$; ergo $GB = \frac{n . \overline{a - x}}{m}$; igitur $GE = \frac{m + n}{m} . x - \frac{na}{m}$, & $GD = \frac{m - n}{m} . a + \frac{nx}{m}$: atqui $GD : GE :: DA : HE$; ergo $\frac{m - n}{m} . a + \frac{nx}{m} : \frac{m + n}{m} . x - \frac{na}{m} :: b : y$, ſive $\overline{\frac{m - n}{n} . a + x} . y = \frac{m + n}{n} . bx - ab$. Pone $\frac{m - n}{n} . a + x = z$, ut ſit $zy = \frac{m + n}{n} . bz - \frac{mm}{nn} . ab$, ſive $\frac{mm}{nn} . ab = \overline{\frac{m + n}{n} . b - y} . z$. Fac $\frac{m + n}{n} . b - y = u$, ut evadat $\frac{mm}{nn} . ab = zu$. Hujuſmodi ex analyſi oritur conſtructio. Produc DB in C ita, ut DC : DB ſit $:: m : n$. Item produc DA in I ita, ut AI : AD ſit $:: m : n$. Per puncta C, I duc parallelas rectis AD, DB, quæ concurrant in K. Inter aſſymptota KI, KC deſcribe hyperbolam tranſeuntem per punctum A, & habebis curvam quæſitam.

7. Problema ſextum. Data indefinita EB, (*Fig.* 6) & extra ipſam puncto A, invenire curvam tranſeuntem per centra omnium circulorum tranſeuntium per A, & ſecantium in EB chordam datæ æqualem. Ex his circulus unus ſit AIH, cujus centrum C, agatur AB perpendicularis EB, & compleatur rectangulum CDBF. Vocetur $BF = x$, $FC = y$, $AB = a$; ergo $AF = a - x$, DI dimidium chordæ datæ $= b$. Conſtat $CD^2 + DI^2 = CF^2 + FA^2$, ex qua provenit æquatio $xx + bb = yy + aa - 2ax + xx$, qua reducta habetur $2ax + bb - aa = 2a . x + \frac{bb}{2a} - \frac{a}{2} = yy$. Analyſis hanc conſtructionem præbet. Divide AB bifariam in G (*Fig.* 7.) abſcinde GL tertiam proportionalem poſt $2a$, b, vertice L parametro $2a$ deſcribe parabolam, hic erit locus quæſitus. Tres ſunt caſus diſtinguendi, nimirum vel $GL = GB$, ſeu $b = a$, & tunc punctum L cadit in B, quod erit parabolæ vertex. Vel $G_3L > GB$, ſeu $b > a$, & vertex parabolæ cadit poſt puncta A, B; vel demum $G_2L < GB$ ſeu $b < a$, & vertex parabolæ cadit intra puncta G, B. Si $b = o$, adeoque nulla G_2L, tunc punctum G ipſum eſſet parabolæ vertex. Quum autem tam GB, quam GA ſit quarta pars parametri, patet, punctum A eſſe focum, lineam BE eſſe directricem parabolæ. Circuli vero habentes centrum in curva parabolica, & tranſe-

ſeuntes per punctum A, quando intercepiunt chordam nullam, contingent datam BE.

8. Problema ſeptimum. Anguli A (*Fig.* 8) crura æqualia AC, AB ita aperiantur, ut punctum C ſemper in eodem loco permaneat, punctum B iter faciat per lineam rectam CK; linea BD faciat cum AB angulum rectum, quæritur, quamnam curvam deſcripturum ſit punctum D. Demiſſis in CB normalibus AN, DM, voca $CA = AB = a$, $BD = b$, $CM = x$, $DM = y$, erit $BM = \sqrt{bb - yy}$, & $CB = x - \sqrt{bb - yy}$, & $NB = \frac{x - \sqrt{bb - yy}}{2}$. Quoniam angulus ABD rectus ſupponitur, anguli duo ABN, DBM æquabunt duos ABN, BAN, quia utrumque par rectum æquat; ergo ablato comuni ABN remanet DBM = BAN; ergo triangulum DBM erit ſimile BAN, & valebit proportio AB:BD::BN:DM, & analytice

$a : b :: \frac{x - \sqrt{bb - xx}}{2} : y$, & duplicando antecedentes

$2a : b :: x - \sqrt{bb - yy} : y$; ergo æquatio naſcitur

$2ay = bx - b\sqrt{bb - yy}$, ſive $b\sqrt{bb - yy} = bx - 2ay$, & quadrando

$b^4 - b^2y^2 = b^2x^2 - 4abxy + 4a^2y^2$.

9. In hac æquatione ſpecto tamquam ordinatam x, & abſciſſam y, quia multo facilior naſcitur conſtructio. Divido per b^2 ut fiat $bb - yy = x^2 - \frac{4a}{b}.xy + \frac{4a^2}{b^2}.y^2$. Pono $x - \frac{2a}{b}.y = u$, & fit $bb - yy = uu$; quæ eſt ad ellypſim. Meam methodum ſequens ita diſpono formulam $m^2b^2 - m^2y^2 : u^2 :: m^2b^2 : b^2$. Itaque poſitis diametris $CE = mb$, $CH = b$ (angulus diametrorum, & coefficiens m determinabitur in progreſſu) intelligatur deſcripta ellypſis EH, erunt $CG = my$, $GD = u$. Agatur linea CIF ita ut $CI = y$, $IG = \frac{2a}{b}y$; ergo $ID = u + \frac{2a}{b}y = x$. Quoniam angulus I rectus eſt, erit $m^2 = 1 + \frac{4a^2}{b^2} = \frac{4a^2 + b^2}{b^2}$, & $m = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{b}$; ſed $CE = mb$; ergo $CE = \sqrt{4a^2 + b^2}$; atqui $CE : CF :: m : 1$; ergo $CF = b$: ſimiliter quum debeat eſſe $CF : FE :: b : 2a$, erit $FE = 2a$. Itaque extende crura anguli CAB in CK, ut $CK = 2a$, recta BD tranſibit in $KE = b$: junge CE, quæ erit $= \sqrt{4aa + bb}$, & ſeca $CH = b$. Diametris CE, CH deſcribe ellypſim, hæc erit curva deſcripta a puncto D.

10. Conſtructio, ad quam perveni, me docuit, analyſim hac ratione inſtitui poſſe. Secta $CK = 2a$, normali $KE = b$, junctaque CE, quam fac $= c$, age DO parallelam CE, & voca $CO = x$, $OD = y$. His poſitis erit $c : 2a :: y : OM = \frac{2ay}{c}$, & $CM = x + \frac{2ay}{c}$. Item $c : b :: y : DM = \frac{by}{c}$; ergo

go $BM = \sqrt{bb - \frac{bbyy}{cc}} = \frac{b}{c} \cdot \sqrt{cc - yy}$, & $CB = x + \frac{2ay}{c} - \frac{b}{c}\sqrt{cc - yy}$. Quare valebit analogia $a : b :: \frac{x}{2} + \frac{ay}{c} - \frac{b}{2c}\sqrt{cc - yy} : \frac{by}{c}$, unde æquatio $ay = \frac{cx}{2} + ay - \frac{b}{2}\sqrt{cc - yy}$, aut $b\sqrt{cc - yy} = cx$, seu $b^2c^2 - b^2y^2 = c^2x^2$, demum $bb - xx : yy :: bb : cc$. Quæ est æquatio ad ellypsim præditam semidiametris $CH = b$, $CE = c$.

11. Problema octavum. Intra angulum datum DCB (*Fig. 9*) moveatur data recta BD, quæritur curva, quam descripturum est quodlibet datum in ea punctum A. Ex puncto describente A agatur AL parallela cruri CD. Vocetur $CL = x$, $LA = y$, $AB = a$, $AD = b$. Quoniam valet proportio $DA : AB :: CL : LB$ erit $b : a : x : LB = \frac{ax}{b}$. Vocato $= \mu$ angulo dato $DCB = ALB$ constat fore $AB^2 = AL^2 + LB^2 - 2LB \cdot \frac{LA \cdot Cc.\mu}{r}$, ex qua habetur æquatio $aa = y^2 - \frac{2a \cdot Cc.\mu}{br} \cdot xy + \frac{a^2xx}{b^2}$, quæ æquatio semper est ad ellypsim.

12. Si angulus $DCB = \mu$ rectus sit, fit $Cc.\mu = 0$; ergo æquatio provenit $b^2 - x^2 : y^2 :: b^2 : a^2$, quæ est ad ellypsim, cujus semiaxes sunt b, a, de qua ellypsi supra verba feci. Si angulus DCB rectus non sit, crura anguli, ad quæ refertur æquatio, non sunt diametri conjugatæ. Ut conjugatas duas diametros determinemus, ex nostra methodo ita est instituenda analysis. Complendum est quadratum hoc modo $a^2 - \frac{a^2x^2}{b^2} + \frac{a^2 \cdot \overline{Cc.\mu}^2}{b^2r^2} \cdot x^2 = \overline{y - \frac{a \cdot Cc.\mu}{br} \cdot x}^2$. Quum vero fit $r^2 - \overline{Cc.\mu}^2 = \overline{Sc.\mu}^2$ æquatio ad hanc contrahetur $a^2 - \frac{a^2 \cdot \overline{Sc.\mu}^2}{b^2r^2} x^2 = \overline{y - \frac{a \cdot Cc.\mu}{br} \cdot x}^2 = u^2$, quæ in hunc modum disponatur $\frac{b^2r^2}{\overline{Sc.\mu}^2} - x^2 : u^2 :: \frac{b^2r^2}{\overline{Sc.\mu}^2} : a^2$. Quoniam hæc referenda est non ad abscissam $= x$, sed ad abscissam $= mx$, quæ species m erit determinanda deinceps, antecedentes analogiæ multiplicentur per m^2, ut fiat $\frac{m^2r^2b^2}{\overline{Sc.\mu}^2} - m^2x^2 : u^2 :: \frac{m^2r^2b^2}{\overline{Sc.\mu}^2} : a^2$. Semidiametris $CE = \frac{mrb}{Sc.\mu}$, $CF = a$, intelligatur descripta ellypsis, cujus punctum sit A, erunt $CM = mx$, & $MA = u$. Quum autem $u + \frac{a.Cc.\mu}{br} \cdot x = y$,

agen-

agenda eſt CLB ita ut fiat $CL = x$, $LM = \frac{a . Cc . \mu}{br} . x$, & quæſitæ coordinatæ erunt $CL = x$, $LA = y$. Determinanda eſt jam ſpecies m, quæ hoc præſtet. Adverte oportere, ut $CM^2 = CL^2 + LM^2 + 2 CL . \frac{LM . Cc . \mu}{r}$, ſive analytice $m^2 x^2 = x^2 + \frac{a^2 . \overline{Cc . \mu}^2}{b^2 r^2} . x^2 + \frac{2a . \overline{Cc . \mu}^2}{br^2} . x^2$, ſive $m^2 = 1 + \frac{a^2 . \overline{Cc . \mu}^2}{b^2 r^2} + \frac{2a . \overline{Cc . \mu}^2}{br^2}$; ergo $CE = \frac{1}{Sc . \mu} . \sqrt{b^2 r^2 + 2ab + a^2 . \overline{Cc . \mu}^2}$, $m = \frac{1}{br} . \sqrt{b^2 r^2 + 2ab + a^2 . \overline{Cc . \mu}^2}$. Ducatur EH parallela DC, proveniet $CH = \frac{br}{Sc . \mu}$, $EH = \frac{a . Cc . \mu}{Sc . \mu}$. Ex his naſcitur conſtructio. Abſcinde $CH = \frac{br}{Sc . \mu}$, rectæ CD ſit parallela $HE = \frac{a . Cc . \mu}{Sc . \mu}$, & ſemidiametris CE, & $CF = a$ deſcribe ellypſim; in hac ſemper reperietur punctum A.

13. Sit PEQ poſitio lineæ DB, quum punctum A pervenit ad punctum E. Erit $PE = b$, $EQ = a$. Quoniam eſt $HE : QE :: \frac{a . Cc . \mu}{Sc . \mu} : a :: Cc . \mu : Sc . \mu$ $:: Cc . EHQ : Sc . EHQ$; & eadem $HE : QE :: Sc . EQH : Sc . EHQ$, habebimus $Cc . EHQ : Sc . EHQ :: Sc . EQH : Sc . EHQ$; ergo $Cc . EHQ = Sc . EQH$; ergo angulus EQH complet rectum cum EHQ, igitur angulus QEH, adeoque etiam QPC rectus eſt. Hæc proprietas docet facilem rationem delineandi ellypſim datis tantummodo duabus ſemidiametris conjugatis quibuſcumque. Semidiametri datæ ſint CF, CE. Ex puncto E extremo unius agatur EP perpendicularis in aliam, quam produc in Q, donec $EQ = CF$. Junge CQ. Poſtremo intra angulum FCQ fac moveas lineam PQ. Punctum E delineabit ellypſim quæſitam. Si linea PEQ intra angulum PCQ moveatur, deſcribet ellypſis partem. Integram obtinebis, ſi eam jubeas moveri, intra alios angulos nimirum PC2Q, 2PC2Q, 2PCQ.

14. Rationem aliam ingenioſam magis, atque elegantem ſolvendi hoc problema placet addere. Ex puncto A duc AL parallelam CD, in quam ex puncto B demitte normalem BM. Ajo primum rationem $CL : LM$ conſtantem eſſe. Nam eſt $CL : LM$ in rat. $CL : LB$ comp. $LB : LM$; ſed prima ratio nempe $CL : LB$ eſt conſtans, utpote eadem cum ratione $DA : AB$; ſecunda pariter eſt conſtans, quia latera trianguli LMB ſpecie dati ſunt in ratione conſtante; ergo omnia puncta M ſita erunt in linea recta CME. Quoniam vero BM ſunt ſemper ſibi parallelæ, liquet conſtantem eſſe rationem $CM : MB$, quam dicam $m : n$. Voco præterea $CM = x$, ergo $MB = \frac{nx}{m}$. Sit $MA = y$: ſed propter angulum rectum AMB eſt $AB^2 = AM^2 + BM^2$; ergo vocata $AB = a$ eſt a^2

$= y^2 + \frac{n^2 x^2}{m^2}$, quæ eſt ad ellypſim, cujus ſemidiameter una eſt $CF = a$. Ut altera determinetur fiat $y = o$, & habebimus $x = \frac{ma}{n}$, cui abſcindatur æqualis CE, hæc erit altera ſemidiameter. Ponamus DB ita moveri, donec punctum A veniat in E, & ejus poſitio ſit PQ. Quoniam $CE = \frac{ma}{n}$, $EQ = a$ erit $CE : EQ : m : n$, hoc eſt ut $CM : MB$; ſed MB ſecat ad angulos rectos parallelas rectæ CD; ergo etiam EQ; ergo angulus QPC rectus erit. Quæ prorſus conveniunt cum prima ſolutione. Suppoſui, punctum deſcribens A ſitum eſſe inter puncta D, B; ſed ſi caderet extra, eadem methodus valeret. Quod pluribus indicandum non cenſeo, ut nonnihil lectorum induſtriæ concedam.

15. Problema octavum. Datis duabus parallelis AD, BE, (*Fig.* o.) quas ſecet linea AB, ductiſque infinitis HK ea conditione, ut $AH + BK = 2b$; demum diviſa HK in N ita, ut ſit $AH . BK :: KN : HN$: quæritur natura curvæ tranſeuntis per omnia puncta N. Accipiantur $AD = BE = 2b$, quæ dividantur bifariam in punctis F, G, & jungatur FG, quæ pariter dividatur bifariam in I. Quoniam eſt $AF : BG :: IG : IF$, liquet, punctum I fore in curva quæſita. Sit IC datis AD, BE parallela. Accipe $FH = GK$; conſtat, fore $AH + BK = 2b$. Junge HK, quæ neceſſario tranſibit per punctum I, & per N dividentem HK, ut poſtulatur, duc PQ parallelam AB, ſeu FG, quæ ſecet CI in M. Vocetur $AC = CB = a$, $IM = x$, $MN = y$; ergo $NP = a - y$, & $NQ = a + y$. Ex triangulorum ſimilitudine $MN : MI :: FI = GI : FH = GK$, ſeu analytice $y : x :: a : FH = GK = \frac{ax}{y}$; ergo $AH = b + \frac{ax}{y}$, & $BK = b - \frac{ax}{y}$; atqui ex problematis conditione $AH : BK :: KN : HN :: NQ : NP$; ergo $b + \frac{ax}{y} : b - \frac{ax}{y} :: a + y : a - y$, & componendo dividendoque $2b : \frac{2ax}{y} :: 2a : 2y$, ſive $\frac{a}{b} . x = yy$, quæ æquatio eſt ad parabolam deſcriptam diametro IM, cujus vertex eſt I, in quo FG tangit curvam.

10. Parabola poſt puncta D, E, per quæ tranſit, extra parallelas excurrit, ut D_2N. Hæc quoque pars curvæ inſervit problematis ſolutioni. Nam intelligatur ducta quælibet $_2N_2H_2K$: partes $_2H_2N$, B_2K tamquam negativæ ſpectandæ ſunt. Quare habebimus $A_2H - B_2K = 2b$; item $A_2H : B_2K :: {}_2K_2N : {}_2H_2N$. Si AB ſecaret parallelas ad angulos rectos, recta IM eſſet axis parabolæ.

17 Problema nonum. Rectis AD, BE cum AB facientibus angulos æquales DAB, EBA, (*Fig.* 11.) ducantur infinitæ HK ita ut $AH + BK$ æquent datam; tum dividatur HK in N eo pacto, ut ſit $AH : BK :: KN : HN$; quæritur curva tranſiens per omnia puncta N. Accipiantur $AD = BE$ æquales datæ, hæ dividantur bifariam a linea FG, quæ erit parallela AB. Secetur FG bifariam in I. Quoniam $FA = GB$, & $IF = IG$, palam eſt punctum I eſſe in curva. DA, EB productæ concurrant in O, jungatur OI, quæ dividet bifariam angulum O, & omnes lineas parallelas AB. Sume $FH = GK$, & duc HK, quæ ita ſecetur, ut problema poſtulat, in N, & hoc punctum ſit in

in curva. Per puncta H, N, K parallelæ AB agantur HTV, PMQ, KRS; item DLE. Ob æquales FH, GK erunt æquales IT, IR. Idem dic de TL, RC, & de IL, IC. Vocentur $CA = a$, $CI = b$, $CO = c$, $IM = x$, $MN = y$, $IT = IR = z$. Quoniam ex conditione problematis $HN : KN :: BK : AH$, erit quoque $TM : RM :: CR : CT$, sive analytice
$z - x : z + x :: b - z : b + z$, sive componendo, & accipiendo antecedentium dimidia
$z : z + x :: b : b + z$, & deductis antecedentibus a consequentibus
$z : x :: b : z$; ergo $z^2 = bx$, quæ est prima æquatio solutioni inserviens.

18. Præterea $OC : CA :: OM : MP$, sive analytice $c : a :: c + b + x$: $MP = \frac{a.\overline{c+b} + ax}{c}$. Fiat $OI = c + b = g$, ut evadat $MP = \frac{ag + ax}{c}$; igitur $NP = \frac{ag + ax}{c} - y$. Item $OC : CA :: OR : RS$, sive analytice $c : a :: g - z : RS = \frac{ag - az}{c}$; ergo $KS = \frac{2ag - 2az}{c}$. Atqui $HN : HK :: TM : TR :: PN : KS$; ergo proveniet æquatio
$z - x : 2z :: \frac{ag + ax}{c} - y : \frac{2ag - 2az}{c}$, sive
$z - x : z :: ag + ax - cy : ag - az$, sive
$x : z :: -az - ax + cy : ag - az$, & facto transitu ad æqualitatem
$agx - azx = -az^2 - azx + czy$, & deletis delendis $agx = czy - azz$. Ex æquatione numeri superioris pro zz substitue bx, ut fiat $agx = czy - abx$, sive $\overline{g+b}.ax = czy$. Voca $OL = g + b = f$, ut fiat $afx = czy$, & quadrando $\frac{a^2f^2}{Cc}.x^2 = z^2y^2$. Pro z^2 iterum pone bx, & proveniet $\frac{a^2f^2}{c^2}.x^2 = bxy^2$,

$\frac{a^2f^2}{bc^2}.x = y^2$, quæ æquatio est ad parabolam, cujus axis est IL, vertex I, & parameter $= \frac{a^2f^2}{bc^2}$. Quoniam est $OC : CA :: OL : LD$, seu $c : a :: f : LD = \frac{af}{c}$, parameter parabolæ erit $\frac{LD^2}{b}$; ergo si fiat $x = b$, proveniet $y = LD$. Itaque parabola transibit per puncta D, E. Quare curva quæsita erit parabola descripta axe IL, vertice I, transiens per puncta D, E.

19. Problema decimum. Super data AB (*Fig.* 12.) describere curvam AEB, ut ductis ad quodlibet punctum E rectis AE, BE, angulus AEB sit æqualis dato. Demissa normali ordinata EF, divisaque AB bifariam in D, vocetur $AD = BD = a$, $DF = x$, $AF = a + x$, $BF = a - x$, $FE = y$, erit $AE = \sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2}$, $BE = \sqrt{\overline{a-x}^2 + y^2}$. Ex A ducatur AG normalis EB, & angulus datus vocetur $= \mu$. Perspicuum est fore $AG = \sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2}.\frac{Sc\ \mu}{r}$.

 Sed

Sed quum sint similia triangula BFE, BGA, habetur BE : EF :: BA : AG sive analytice $\sqrt{\overline{a-x}^2+yy} : y :: 2a : \sqrt{\overline{a+x}^2+y^2}.\frac{Sc.\mu}{r}$; ergo provenit æquatio

$$\sqrt{\overline{a^2-x^2}^2+y^2.\overline{a+x}^2+y^2.\overline{a-x}^2+y^4}=\frac{2ray}{Sc.\mu}.$$

Hinc

$$a^4-2a^2x^2+x^4+2a^2y^2+2x^2y^2+y^4=\frac{4r^2a^2y^2}{\overline{Sc.\mu}^2}.$$

Dematur ab utraque parte æquationis $4a^2y^2$, ut exurgat æquatio

$$a^4-2a^2x^2+x^4-2a^2y^2+2x^2y^2+y^4=4a^2y^2.\frac{r^2-\overline{Sc.\mu}^2}{\overline{Sc.\mu}^2}=\frac{4a^2y^2.\overline{Cc.\mu}^2}{\overline{Sc.\mu}^2},$$

Extrahatur radix quadrata, & orietur $a^2-x^2-y^2=\pm\frac{2ay.Cc.\mu}{Sc.\mu}$, sive

$$\frac{a^2.\overline{\overline{Sc.\mu}^2+\overline{Cc.\mu}^2}}{\overline{Sc.\mu}^2}=\frac{r^2a^2}{\overline{Sc.\mu}^2}=x^2+\overline{y\pm\frac{a.Cc.\mu}{Sc.\mu}}^2;$$

quæ æquatio est ad duplicem circulum, cujus hæc est constructio. Divisa AB bifariam in D, eidem per D excita normalem IO. Duc BM, BN facientes cum AB angulum datum. His age normales BH, BK secantes IO in punctis H, K. His centris, & radiis HB, KB describe duos circulos AIB, AOB, isti problemati satisfacient. Quæ traduntur in elementis determinationes reddunt faciles, ac propterea omittendas.

20. Problema undecimum. Invenire curvam transeuntem per vertices D (*Fig.* 13.) omnium triangulorum, quæ super linea AB ita describuntur, ut angulorum DAB, DBA differentia sit data. Divido æqualiter AB in E, & per E duco lineam HEK, quæ cum AB faciat angulum AEH æqualem dati dimidio, ut anguli DHK, DKH proveniant æquales. Nam DAE = DBE + 2AEH, sive DAE − AEH = DBF + BEK; sed DHK = DAE − AEH, & DKH = DBE + BEK; ergo DHK DKH. Igitur ducta DO normali in HK fiet HO = KO. A punctis A, B ducantur AF, BG normales in rect in HK, erit AF = BG, & EF = EG. His positis voco EF = EG = a, AF = BG = b, EO = x, FO = $a-x$, GO = $a+x$, DO = y. Hæ proportionis ex triangulorum similitudine oriuntur.

OH : HF :: DO : AF & divid.
OF : HF :: DO − AF : AF, sive
$a-x$: HF :: $y-b$: b; ergo

$$HF=\frac{b.\overline{a-x}}{y-b};$$ igitur

$$HO=\frac{b.\overline{a-x}}{y-b}+a-x=\frac{y.\overline{a-x}}{y-b}$$

OK : KG :: DO : BG, & comp.
OG : KG :: DO + BG : BG
$a+x$. KG :: $y+b$: b; ergo

$$KG=\frac{b.\overline{a+x}}{y+b};$$ igitur

$$OK=\frac{-b.\overline{a+x}}{y+b}+a+x=\frac{y.\overline{a+x}}{y+b};$$

atqui

atqui HO = OK; ergo $\frac{y \cdot \overline{a-x}}{y-b} = \frac{y \cdot \overline{a+x}}{y+b}$, aut $a-x : a+x :: y-b : y+b$, ex qua componendo, & dividendo nascitur $a : x :: y : b$, quæ est proprietas hyperbolæ inter assymptota.

21. Ut analyseos studiosis servirem, calculum advocavi; sed ipsa præparatio per sese nos ducit ad solutionem problematis hac methodo. Quum secta sit AE = BE, ob similitudinem triangulorum AEF, BEG erit AF = BG. Angulus DHK = DKH; ergo HO = KO. Præterea triangula rectangula AFH, BGK æquales habent angulos in H, K, & latera AF, BG; sunt igitur æqualia quoad omnia; ergo HF = KG. His præmissis quum OH = OK, & EF = EG, erit OH − EF = OK − EG, sive HF − OE = OE − KG; ergo HF + KG, sive 2HF = 2OE, & HF = OE, sed est HF : HO :: AF : OD, sive substitutis æqualibus OE : EF :: FA : OD, quæ est proprietas hyperbolæ inter assymptota, quæ hoc modo construitur.

22. Divisa AB bifariam in E, agatur FEG faciens angulum FEA æqualem datæ semidifferentiæ. Per E agatur MEN perpendicularis FEG; demum inter assymptota MN, FG describatur hyperbola transiens per punctum A: hæc erit hyperbola requisita. Quum assymptotorum angulus rectus sit, hyperbola descripta æquilatera est, & quum AE = BE, hyperbola opposita transibit per B. Hinc discimus novam, & pulcram proprietatem hyperbolæ æquilateræ. Ab extremis punctis cujuscumque diametri AB agantur duæ quælibet AD, BD, differentia angulorum DAB, DBA est constans & æqualis duplo anguli, quem diameter AB facit cum assymptoto FG, quod assymptotorum non pertinet ad eum ramum, in quo positum est punctum D. Quare si ex A, B ducerentur rectæ ad punctum P, differentia angulorum PAB, PBA esset dupla anguli MEA, qui efficitur ab assymptoto MN non pertinente ad ramum AP. Si AEB esset axis hyperbolæ, angulorum differentia angulo recto inveniretur æqualis.

23. Problema duodecimum. Descriptis super data AB infinitis triangulis ADB, (*Fig.* 14.) in quibus angulus DAB sit duplus DBA, invenire locum punctorum D. Demittatur DH normalis in AB, qua divisa bifariam in C, vocetur CA = CB = a, CH = x, AH = $a-x$, & BH = $a+x$. Præterea HD = y, angulus DBA = μ, adeoque angulus DAB = 2μ. Perspicuum est esse

$$a-x : y :: Cc.2\mu : Sc.2\mu :: \frac{\overline{Cc.\mu}^2 - \overline{Sc.\mu}^2}{r} : \frac{2.Sc.\mu.Cc.\mu}{r} ::$$

$\frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} - \frac{Sc.\mu}{Cc.\mu} : 2$; atqui $a+x : y :: Cc.\mu : Sc.\mu$; ergo $\frac{Cc.\mu}{Sc.\mu} = \frac{a+x}{y}$. Facta igitur substitutione valet proportio $a-x : y :: \frac{a+x}{y} - \frac{y}{a+x} : 2$; ergo

$$2a - 2x = a + x - \frac{y^2}{a+x}, \text{ sive } yy = \overline{3x-a} \cdot \overline{x+a} = 3xx + 2ax - aa;$$

igitur $\frac{yy}{3} = xx + \frac{2ax}{3} + \frac{aa}{9} - \frac{4aa}{9}$. Fiat $x + \frac{a}{3} = z$, & oritur $\frac{yy}{3} =$ $zz - \frac{4aa}{9} : yy :: \frac{1}{3} : 1 :: \frac{4aa}{9} : \frac{4aa}{3}$, quæ est ad hyperbolam, cujus semia-

xis

xis primus $= \frac{2a}{3}$, secundus $= \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

24. Hujusmodi oritur constructio. Sume CE, quæ sit tertia pars CB, erit E hyperbolæ centrum. Seca $EF = EB = \frac{2a}{3}$, & ad angulos rectos pone $EI = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Semiaxibus EF, EI describe hyperbolam FD; hæc erit locus quæsitus, & in triangulo ADB angulus $DAB = 2\,DBA$. Videndum, cui problemati solvendo par sit opposita hyperbola BM, quæ transit per punctum B. Ductis AM, BM, productaque ad utramque partem AB in P, N, reperies angulum externum MAP esse duplum anguli externi MBN.

25. Problema decimumtertium. Ex dato puncto C (*Fig.* 15.) posito in crure dati anguli CAD agatur CD desinens in crus aliud, cum hac DF faciat angulum $CDF = CAD$; sit vero AC : AD :: DC : DF, quæritur curva transiens per omnia puncta F. Age CF. Liquet triangula ACD, DCF esse similia, quia latera circa æquales angulos sunt proportionalia; ergo angulus $CDA = DFC$, & $ACD = DCF$, quibus æqualis est FDE. A punctis F, C demittantur in AD perpendiculares FE, CB, & ex puncto D ducatur DG perpendicularis CF. Ajo primum esse FE : CB in ratione duplicata AD : AC, quia est FE : CB in ratione composita $\begin{matrix} FE : GD \\ GD : CB \end{matrix}$; sed FE : GD :: FD : DC, & GD : CB :: FD : DC; ergo FE : CB in ratione duplicata FD : DC, seu AD : AC. Hinc vocatis $AC = a$, $CB = b$, $AD = z$, $FE = y$, erit $y : b :: zz : aa$, hoc est $\frac{a^2}{b} \cdot y = zz$. Ex hac æquatione discis, ducta DO æquali, & parallela FE, curvam transeuntem per omnia puncta O esse parabolam appollonianam, cujus vertex est A, parameter axis $= \frac{a^2}{b}$, quæque ad AE convexum obvertit.

26. Vocetur nunc $AB = c = \sqrt{aa - bb}$, & $BD = z - c$; ergo $CD = \sqrt{bb + cc - 2cz + zz} = \sqrt{aa - 2cz + zz}$. Demittatur AH normalis in CD. Quum sit $CB . AD = bz = AH . CD$, erit

$AH = \frac{bz}{\sqrt{aa - 2cz + zz}}$; igitur $CH = \sqrt{a^2 - \frac{b^2 z^2}{aa - 2cz + zz}}$. Atqui AH : CH :: FE : DE, hoc est

$$\frac{bz}{\sqrt{aa - 2cz + zz}} : \sqrt{a^2 - \frac{b^2 z^2}{a^2 - 2cz + zz}} : y : DE =$$

$\frac{y . \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + a^2 z^2 - b^2 z^2}}{bz} = \frac{y . \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2}}{bz}$. Vocetur $AE = x$,

erit $x = z + \frac{y . \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2}}{bz}$, seu $bzx - bz^2 . y . \sqrt{a^4 - 2a^2 cz + c^2 z^2}$.

Pio

Pro z^2 pone $\frac{a^2}{b}.y$, & fiet $bzx - a^2y = y.\sqrt{a^4 - 2a^2cz + \frac{c^2a^2y}{b}}$. Ad quadratum eleva $b^2z^2x^2 - 2a^2bzxy + a^4y^2 = a^4y^2 - 2a^2czy^2 + \frac{c^2a^2y^3}{b}$. Dele delenda, iterumque pro z^2 ejus valorem substitue, $a^2bx^2y - 2a^2bzxy = \frac{a^2c^2y^3}{b} - 2a^2czy^2$, seu $a^2b^2x^2y - a^2c^2y^3 = 2a^2b^2zxy - 2a^2bczy^2$. Fac dividas per $a^2y.\overline{bx - cy}$, & fiet $bx + cy = 2bz = 2a\sqrt{by}$. Pone $x + \frac{cy}{b} = u$, & orietur $u^2 = \frac{4a^2}{b}.y$, quæ est ad parabolam, quæ ita construitur. Claude rectangulum ABCI, produc IC in L donec, IL = IC, junge AL, diametro AL tangente AB, posita diametri parametro $= \frac{4a^2}{b}$, describe parabolam: ipsa erit locus quæsitus.

26. Elegantius problema solves, si hac utaris præparatione. Iisdem ac antea positis duc CB = CA (*Fig. 16.*), cui sit parallela FE; junge CF, & duc DG facientem angulum DGC = CAB. Triangulorum similitudo ut in antecedente solutione probatur. Præterea FE : CB est in ratione $\begin{matrix}\text{FE : DG} \\ \text{composita DG : CB}\end{matrix}$; sed utraque ex his rationibus est eadem ac ratio FD : DC, seu AD : AC; ergo FE : CB in ratione duplicata AD : AC. Sit jam AC = CB = a, AD = z, FE = y, habebitur $y : a :: z^2 : a^2$, aut $ay = z^2$. Præterea ex similitudine triangulorum ACD, FDE est AC : AD :: DE : FE, sive $a : z :: \text{DE} : y$; ergo DE $= \frac{ay}{z}$. Vocetur AE = x, fiet $x = z + \frac{ay}{z}$, aut $xz = zz + ay$. Pro zz colloca ejus valorem ay, & erit $xz = 2ay$, sive $x^2z^2 = 4a^2y^2$ aut $ax^2y = 4a^2y^2$, demum $x^2 = 4ay$. Æquatio hæc est ad parabolam, quæ tangit in A lineam AE, & quæ habet pro diametro AL parallelam BC. Quum hujus diametri parameter $= 4a = 4$AC, punctum C facile probabitur esse focus sectionis; ergo BC erit axis. Si agatur AM perpendicularis BC, tum BM dividatur bifariam in N, erit N vertex præcipuus parabolæ, & 4 CN parameter axis.

27. Problema decimumquartum. Lineis duabus AM, FN (*Fig. 17.*) sese secantibus in B in dato angulo, concipiantur moveri parallelæ DH, EG ita, ut intercipiant partem DE æqualem datæ, tum per punctum H, ubi harum prima secat datam FN, ex puncto fixo A dato in linea AM ducatur AHG: quæritur quam curvam descripturus sit concursus linearum AG, EG. Antequam problematis solutionem aggredior, nonnullas determinationes præmittere præstat. Primum lineæ HD, GE moveantur, ut punctum D abeat in A, & punctum E in C, existente AC = DE: tum linea EG transibit in CF, & AH eidem fiet parallela, neque ipsam secabit nisi in puncto infinite remoto; ergo CF erit asymptotum curvæ. Moveantur denuo eædem lineæ, ut punctum D abeat in B, pun-

punctum E in M, existente $BM = DE$, tum AH coincidet cum AB, & concursus linearum AH, EG fiet in puncto M; ergo per M transibit curva. Si deinde lineæ HD, GE ad eamdem partem promoveantur, punctum concursus linearum AH, EG magis magisque accedet ad rectam FN, numquam tamen pertinget; erit igitur HN alterum assymptotum curvæ.

28. Hæ determinationes ad congruam nos ducunt solutionem. Accepto enim abscissarum initio in F concursu assymptotorum, vocetur $FI = x$, $IG = y$, $AB = b$, $AC = DE = BM = a$; ergo $CB = b - a$. Item $FC = c$, $BF = e$; ergo $BI = x - e$. Quum autem sit

BF:FC::BI:IE

$e:c::x - e:IE = \frac{cx}{e} - c$; igitur $GE = y - \frac{cx}{e} + c$. Item

BF:CB::BI:BE

$e:b - a::x - e:BE = \frac{\overline{b-a}.x}{e} - b + a$; ergo $AE = a + \frac{x.\overline{b-a}}{e}$. Item

FB:CB::HI:DE

$e:b - a::HI:a$; ergo $HI = BN = \frac{ae}{b-a}$, & $FH = x - \frac{ae}{b-a}$. Rursus

FB:CB::FH:CD

$e:b - a::x - \frac{ae}{b-a}:CD = \frac{x.\overline{b-a}}{e} - a$. Præterea

BC:FC::BD:DH

$b - a:c::b - x.\frac{b-a}{e}:DH = \frac{cb}{b-a} - \frac{cx}{e}$. Demum

AD:DH::AE:EG

$\frac{x.\overline{b-a}}{e}:\frac{cb}{b-a} - \frac{cx}{e}::a + \frac{x.\overline{b-a}}{e}:y - \frac{cx}{e} + c$; ergo facto ad æquationem transitu

$$\frac{xy.\overline{b-a}}{e} - \frac{cx^2.\overline{b-a}}{e^2} + \frac{cx.\overline{b-a}}{e} = \frac{acb}{b-a} - \frac{acx}{e} + \frac{cbx}{e} - \frac{cx^2.\overline{b-a}}{e^2},$$

& deletis delendis remanet simplicissima æquatio $xy.\frac{b-a}{e} = \frac{acb}{b-a}$, sive $xy = \frac{abce}{\overline{a-b}^2}$.

29. Hæc ut facilius construatur, vocetur $MN = m$, & quum sit CB:CF:: BM:MN, erit $b - a:c::a:m = \frac{ac}{b-a}$. Introducto in æquationem hoc valore erit $xy = \frac{mbe}{b-a}$. Vocetur denuo $FN = n$, & quum sit CB:BF::CM:FN provenit $b - a:e::b:n = \frac{be}{b-a}$. Hic valor in æquatione ponatur, ut resultet $xy = mn$. Æquatio pertinet ad hyperbolam describendam inter assymptota CF, FN ita, ut transeat per punctum M. Determinationes præmissæ crearunt solutio-

lutionis elegantiam. Per eas enim cognovimus assymptota, & eorum concursum. Quare in hoc concursu facto initio abscissas sumpsimus in uno asymptotorum; quæ cautio simplicissimam obtulit æquationem.

30. Problema decimum quintum. Linea CED (*Fig.* 18.) faciens cum AG angulum datum moveri possit liberè motu parallelo. Data sit item linea BD, quæ concurrat cum AG in puncto B; demum norma CAD ita moveatur, ut concursus laterum AD, CD sit semper in linea BD, quæritur quam curvam descripturus sit concursus linearum AC, CD. Ex punctis A, C, D rectæ BG agantur normales AI, CF, DG. Vocetur $AB = a$, $AI = b$, angulus datus $AEC = \mu$, $AF = x$, $FC = y$, $AG = z$. Quum sit

$BA : BG :: AI : GD$, erit $a : a + z :: b : GD = b + \frac{bz}{a}$.

Est $Sc.\mu : Cc.\mu :: CF = y : FE = \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.y$. Ergo $AE = x + \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.y$.

Item $Sc.\mu : Cc.\mu :: GD = b + \frac{bz}{a} : GE = \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.b + \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.\frac{bz}{a}$. Igitur

$AE = z - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.b - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.\frac{bz}{a}$. Æquatis duobus valoribus AE resultat formula

$x + \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.y = z - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.b - \frac{Cc.\mu}{Sc.\mu}.\frac{bz}{a}$, sive

$\frac{ax.Sc.\mu + ay.Cc.\mu + ab.Cc.\mu}{a.Sc.\mu - b.Cc.\mu} = z$. Ex proprietate anguli recti est

$CF : FA :: GA : GD$, & analytice $y : x :: z : b + \frac{bz}{a}$, sive $axz = aby + byz$;

ergo $z = \frac{aby}{ax - by}$. Comparatis duobus valoribus z oritur æquatio

$\frac{x.Sc.\mu + y.Cc.\mu + b.Cc.\mu}{a.Sc.\mu - b.Cc.\mu} = \frac{by}{ax - by}$, quæ liberata a divisoribus hanc formam induet

$$a.Sc.\mu.x^2 + a.Cc.\mu.xy + ab.Cc.\mu.x - b.Cc.\mu.y^2 - bb.Cc.\mu.y =$$
$$- b.Sc.\mu.xy$$

$ab.Sc.\mu.y - bl.Cc.\mu.y$ & deletis delendis

$$a.Sc.\mu.x^2 + a.Cc.\mu.xy - b.Cc.\mu.y^2 + ab.Cc.\mu.x - ab.Sc.\mu.y = 0.$$
$$- b.Sc.\mu.xy$$

31. Si DB sit parallela AG, constat, $AB = a$ fore infinitam existente finita $AI = b$. Quare neglectis terminis evanescentibus æquatio subsistet inter terminos $a.Sc.\mu.x^2 + a.Cc.\mu.xy + ab.Cc.\mu.x - ab.Sc.\mu.y = 0$, & facta divisione per $a, Sc.\mu.x^2 + Cc.\mu.xy + b.Cc.\mu.x - b.Sc.\mu.y = 0$. Hæc, si angulus $AEC = \mu$ sit rectus, atque adeo $Cc.\mu = 0$, evadit simplicissima $x^2 - by = 0$, quæ est ad parabolam, quemadmodum alio loco docuimus. Quod si angulus μ rectus non sit, sed vel acutus vel obtusus, atque adeo $Cc.\mu$ vel positivus, vel negativus, æquatio semper est ad hyperbolam.

32. Verum existente $AB = a$ finita, æquatio esse potest ad parabolam, & ad

ad ellypſin, quotieſcumque $-4ab.Sc.\mu.Cc.\mu$ ſit æqualis, aut major $\overline{a.Cc.\mu - b.Sc.\mu}^2$. Hoc autem evenire non poteſt, niſi angulus μ ſit obtuſus, & $Cc.\mu$ negativus, ſi a, b aut utraque ſit poſitiva, aut utraque negativa, ſive niſi alterutra ex ſpeciebus a, b negativa ſit, ſi angulus μ acutus ſit, & $Cc.\mu$ poſitivus. In reliquis caſibus omnibus æquatio eſt ad hyperbolam. Quapropter ſi angulus μ ſit rectus, & $Cc.\mu = o$, (*Fig.* 19.) æquatio ſemper pertinet ad hyperbolam. Caſum hunc conſtruamus in hypotheſi, quod a, b poſitivæ ſint, ut exemplum proponamus methodi, qua in caſibus reliquis ſit æquatio perducenda ad conſtructionem. Hypotheſis formulam in hanc vertit $ax^2 - bxy = aby$, ſive $x^2 - \frac{b}{a}.xy = by$, additoque dimidii coefficientis quadrato $xx - \frac{bxy}{a} + \frac{bb}{4aa}.y^2 = by + \frac{bb}{4aa}.yy$. Pone $x - \frac{b}{2a}.y = u$, ut ſit $uu = by + \frac{bb}{4aa}.y^2$, ſive $\frac{4a^2}{b^2}.u^2 = \frac{4aa}{b}.y + yy$. Quæ æquatio per methodum a nobis traditam, referenda eſt non ad abſciſſam y, ſed ad abſciſſam my; ita ergo eſt præparanda $\frac{4m^2a^2u^2}{b^2} = \frac{4ma^2}{b}.my + m^2y^2 : u^2 :: \frac{4m^2a^4}{b^2} : a^2$. Quum autem angulus coordinatarum x, y rectus eſſe debeat, determinatur $m = \frac{\sqrt{4aa+bb}}{2a}$.

33. Analyſis hanc conſtructionem præbet. Producatur I A, donec A P = A B = $2a$. Parallela A E agatur P Q = A I = b, & jungatur A Q, quæ producatur in M, ut A M = $\frac{2ma^2}{b} = \frac{a\sqrt{4aa+bb}}{b}$. Quare A M erit tertia proportionalis poſt b, a, $\sqrt{4aa+bb}$, ſive A I, A B, A Q. Demum poſita M N = A B = a parallela A E, cum duabus ſemidiametris A M, M N, deſcribatur hyperbola A C, in hac ſemper invenietur concurſus linearum A C, C D, dum concurſus linearum A D, C D percurrit lineam B D in hypotheſi, in qua C D ſit normalis A E, & motu parallelo moveatur. Ex his perſpicuum eſt, in hoc ſimilibuſque caſibus hyperbolam, quæ deſcribitur, referendam eſſe non ad axes, ſed ad duas diametros conjugatas.

34. Ut curva non ad diametros, ſed ad axes revocetur, neceſſe eſt evaneſcat in æquatione terminus plani xy. Hanc ob rem oportet, ut $a.Cc.\mu = b.Sc.\mu$, quæ æquatio locum habere poteſt ſi exiſtente a, b utraque poſitiva, aut negativa ſit $Cc.\mu$ poſitivus, & angulus μ acutus, aut ſi una ex ſpeciebus a, b ſit poſitiva, altera negativa, & $Cc.\mu$ negativus, adeoque angulus μ obtuſus. Primam hypotheſim, quæ exhibet hyperbolam, præſtat ad conſtructionem perducere. Quum autem ſit $a : b :: Sc.\mu : Cc.\mu$, ſubſtituta a pro $Sc.\mu$, & b pro $Cc.\mu$, æquatio ſit $a^2x^2 - b^2y^2 + ab^2x - a^2by = o$, ſive $\overline{ax + \frac{b^2}{2}}^2 - \overline{by + \frac{a^2}{2}}^2 = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$. Pone $x + \frac{b^2}{2a} = z$, & $y + \frac{a^2}{2b} = u$, ut fiat

fiat $a^2z^2 - b^2u^2 = \frac{b^4}{4} - \frac{a^4}{4}$: five $z^2 - \frac{b^4}{4a^2} + \frac{a^2}{4} :: u^2 : b^2 : a^2$; quæ æquatio semper est ad hyperbolam.

35. Primum accidere poteſt, ut $a = b$, atque adeo omnes anguli ABI, AIB, AEC (*Fig.* 18. ſint ſemirecti. In hoc caſu æquatio tranſit in æquationem duplicis lineæ rectæ $z = \pm u$. Deinde accidere poteſt, ut $b > a$, & angulus AIB = AEC ſit minor ABI. In hoc caſu z accipiendæ ſunt in axe primo, & u erunt parallelæ ſecundo: qua de re axis primus major ſit ſecundo neceſſe eſt. Demum fieri poteſt, ut $a > b$, & angulus AIB = AEC ſit major angulo ABI. In hoc caſu z accipiendæ ſunt in axe ſecundo: qua de re axis ſecundus minor ſit oportet axe primo. Itaque per hanc conſtructionem illæ ſolum hyperbolæ delineantur, quæ habent axem primum majorem ſecundo.

CAPUT OCTAVUM

De transformatione æquationum tertii, & quarti gradus.

1. ANtequam rationem doceo conſtruendi æquationes tertii, & quarti gradus per interſectionem linearum gradus ſecundi, quo facilior fiat, atque expeditior theoria, utile erit exhibere methodum transformandi eaſdem æquationes tertii, & quarti gradus. Transformare æquationem nihil aliud eſt, quam eam in aliam convertere, cujus radices dantur ſuppoſitis radicibus transformandæ, aut vice verſa. Ita transformatur propoſita, ſi alia inveniatur æquatio, cujus radices ſint majores, aut minores radicibus propoſitæ per quantitatem datam, aut cujus radices ſint ad radices propoſitæ in ratione data.

2. Primum facile eſt æquationem quamcumque transformare in aliam, cujus radices data quantitate majores ſint, aut minores, ſeu quod idem eſt, augere, aut minuere æquationis radices data quantitate. Si enim velis augere, pone ejus incognitam $x = y - a$, ſi velis minuere, fac $x = y + a$; a eſt quantitas data; tum pro x ſubſtitue in æquatione ejus valorem datum per y, & a, & invenies æquationem, quam quæris. Unum aut alterum exemplum theoriam non difficilem reddet faciliorem.

3. Æquationis $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radices augere oportet numero 3. Pone

$x = y - 3$; Ergo elevando ad congruas poteſtates invenies

$x^2 = y^2 - 6y + 9$

$x^3 = y^3 - 9yy + 27y - 27$

$x^4 = y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81$. His autem valoribus omnibus ſubſtitutis proveniet æquatio

$$\begin{array}{l} y^4 - 12y^3 + 54y^2 - 108y + 81 \\ \quad + 4y^3 - 36y^2 + 108y - 108 \\ \qquad\quad - 19y^2 + 114y - 171 \quad = 0, \text{ idest} \\ \qquad\qquad\quad - 106y + 318 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 120 \end{array}$$

$y^4 - 8y^3 - yy + 8y = 0$, cujus radices per 3 superant radices propositæ. Reapse radices propositæ erant
$+5, -2, -3, -4$; transformatæ autem radices sunt
$+8, +1, +0, -1$; hæ autem illis ita majores sunt, ut differentia $= 3$.

4. Si ejusdem æquationis radices minuendæ sint, fac $x = y + 3$, & invenies

$$\begin{array}{lr} x^4 & y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81 \\ 4x^3 & 4y^3 + 36y^2 + 108y + 108 \\ -19x^2 = & -19y^2 - 114y - 171 = 0 \\ -106x & -106y - 318 \\ -120 & -120 \end{array}$$

quæ reducta in hanc mutatur

$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 = 0$, cujus radices sunt $2, -5, -6, -7$, quæ ita propositæ radicibus sunt minores, ut differentia $= 3$. Ferme superfluum est advertere, quum dicimus augeri radices, augeri quidem radices positivas, negativas autem in suo genere imminui, quia negativæ quantitas additur positiva. Idem dic de radicibus, quæ minuuntur.

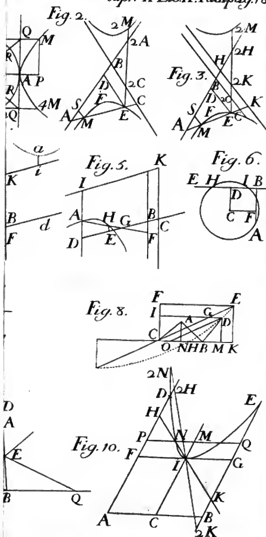
5. Æquatio $x^3 + cx^2 - b^2x - b^2c = 0$ transformanda sit in aliam, cujus radices majores sint quantitate a. Pone $x = y - a$, & sequentes formulæ transformatam exhibebunt.

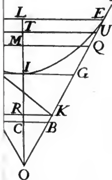
$$\begin{array}{llr} x^3 & y^3 - 3ayy + 3a^2y - a^3 & \\ cx^2 & cy^2 - 2acy + a^2c & \\ = & & = 0. \text{ Radices æquationis} \\ -b^2x & -b^2y + ab^2 & \\ -b^2c & -b^2c & \end{array}$$

propositæ erant $b, -b, -c$; æquationis autem inventæ sunt $b+a, -b+a$; $-c+a$.

6. Usus præcipuus hujusce transformationis est, ut inveniatur æquatio secundo termino carens. Sit æquatio tertii gradus $x^3 + ax^2 + abx + abc = 0$, in qua a, b, c possunt esse cum positivæ tum negativæ. Hanc oportcat transformare in aliam carentem secundo termino. Pone $x = y + m$, quæ species m nunc est indeterminata, deinceps in progressu erit determinanda. Peractis substitutionibus habebis

x^3


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 10.



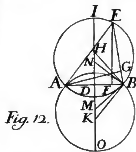


Fig. 12.

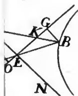
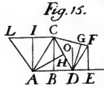
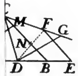


Fig. 14.

Fig. 15.





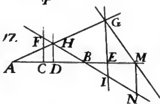


Fig. 17.

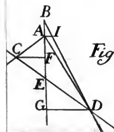
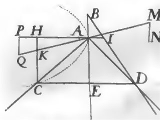


Fig. 19.



$$\left.\begin{array}{l} x^3 \\ +ax^2 \\ +abx \\ +abc \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} y^3+3my^2+3m^2y+m^3 \\ +ay^2+2may+m^2a \\ +aby+mab \\ +abe \end{array}\right. = o.$$ Ut secundus terminus in transformata desit, oportet, ut $3m+a=o$, sive $m=-\frac{a}{3}$, hoc est æqualis tertiæ parti coefficientis secundi termini datæ æquationis signo mutato. Reapse si ponas $x=y-\frac{a}{3}$, invenies

$$\left.\begin{array}{l} y^3-\frac{a^2}{3}.y+\frac{2a^3}{27} \\ +aby-\frac{a^2b}{3} \\ +abc \end{array}\right.$$, quæ est secundo termino destituta.

7. Si quis optaret tollere tertium æquationis terminum, necesse esset, ut $3m^2+2ma+ab=o$. Ad determinandam m opus itaque est resolvere æquationem secundi gradus, quæ quum prædita sit duabus radicibus, duplicem p æbebit valorem m, per quem tertius terminus in æquatione evanescit. Adverte tamen imaginarium sæpe esse utrumque valorem; quod ubi accidit, tertius terminus tolli non potest, qu n imaginarias quantitates introducamus. Si velles ultimum terminum abiicere, sese obviam ferret æquatio $m^3+am^2+abm+abc=o$, quæ est te tii gradus, ac prorsus eadem cum proposita. Quare ultimum terminum numquam tolles, nisi æquationis propositæ radices cognoscas.

8. Quod de æquationibus tertii gradus, idem dicas velim de æquationibus quarti. Sit itaque æquatio $x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd=o$. Ad eam transformandam pone $x=y+m$, ut peractis substitutionibus habeas

$$\left.\begin{array}{l} x^4 \\ +ax^3 \\ +abx^2 \\ +abcx \\ abcd \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} y^4+4my^3+6m^2y^2+4m^3y+m^4 \\ +ay^3+3amy^2+3am^2y+am^3 \\ +aby^2+2abmy+abm^2 \\ +abcy+abcm \\ +abcd \end{array}\right. = o$$

Ut evanescat secundus terminus, fac $4m+a=o$, seu $m=-\frac{a}{4}$, hoc est æqualis coefficienti secundi termini diviso per 4, signo mutato. Licet itaque secundum terminum de medio tollere. Delebitur tertius terminus, si facias $6m^2+3am+ab=o$, ex cujus resolutione duplex prodit valor m. Sed si valor iste fuerit imaginarius, tertium terminum non abjicies, nisi repleas æquationem imaginariis. Tertius terminus tolletur resoluta æquatione tertii gradus $4m^3+3am^2+2abm+abc=o$, quæ quum habeat semper unum valorem rea-

realem, ut deinceps constabit, exhibebit valorem m, quo uti poteris vitatis imaginariis. Ad repellendum terminum ultimum, necessarium est, resolvere æquationem gradus quarti, immo prorsus eandem cum proposita.

9. Deinde transformatur æquatio inventa in æquationem, cujus radices ad radices propositæ sint in data ratione. Hoc obtinebis, si facias $x = \frac{my}{n}$. Ad exemplum sit transformanda æquatio $x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4 = o$. Pro x scribe $\frac{my}{n}$, ut habeas $\frac{m^4y^4}{n^4} - \frac{m^3ay^3}{n^3} + \frac{m^2a^2y^2}{n^2} - \frac{ma^3y}{n} + a^4 = o$. Multiplica per n^4, & divide per m^4, ut oriatur

$$y^4 - \frac{nay^3}{m} + \frac{n^2a^2y^2}{m^2} - \frac{n^3a^3y}{m^3} + \frac{n^4a^4}{m^4} = o.$$

10. Utilis sæpe est hæc transformatio ad eliminandas fractiones ab æquatione. Hanc unum breviter unico proposito exemplo declarabo. Sit æquatio $x^3 + \frac{a^2}{b}.x^2 + a^2x - a^3 = o$. Ut fractionem $\frac{a^2}{b}$ ejicias, pone $x = \frac{my}{n}$, factaque substitutione, & reductione proveniet $y^3 + \frac{na^2y^2}{mb} + \frac{n^2a^2y}{m^2} - \frac{n^3a^3}{m^3} = o$. Ut fractiones arceantur, satis est, ut na possit exacte dividi per mb, quod obtinebis, si ponas $n = b$, $m = a$. Æquatio enim in hanc convertetur, quæ fractionibus caret $y^3 + ay^2 + n^2y - n^3 = o$.

11. Tertia transformatio fit, quum æquatio invenitur, cujus radices cum propositæ radicibus reciprocantur. Hanc ob rem ponenda est $x = \frac{A}{y}$: quantitas A pro libito accipi potest. Utere hac substitutione ad transformandam æquationem $x^4 - 7x^2 + 3x - 10 = o$; invenies autem $\frac{A^4}{y^4} - \frac{7A^2}{y^2} + \frac{3A}{y} - 10 = o$, sive $A^4 - 7A^2y^2 + 3Ay^3 - 10y^4 = o$, sive $y^4 - \frac{3A}{10}.y^3 + \frac{7A^2}{10}.y^2 - \frac{A^4}{10} = o$, quæ liberabitur a fractionibus, si facias $A = 10$.

12. Si in analyseos rationem intendas animum, facile cognosces, per hanc transformationem primum terminum transire in ultimum, secundum in penultimum, atque ita deinceps. Quare si habeas formulam carentem aliquo termino, per hanc methodum aliam formulam invenies, quæ careb t termino, qui tantum a primo distabit, quantum ille ab ultimo. Ita in exemplo numeri superioris quando formula carebat secundo termino, prodiit æquatio carens termino penultimo.

13. Aliquos inveni, qui aliquando æquationem transformant in aliam, cujus radices sunt mediæ proportionales inter datam, & radices propositæ. Quare

re ponunt $\sqrt{Ax}=y$, & $x=\frac{yy}{A}$. Verum advertendum est, posita A positiva duplicari numerum radicum positivarum, quia signum radicale duplici afficitur signo; at radices negativæ transeunt in imaginarias. Contra duplicantur negativæ, positivæ fiunt imaginariæ, si A sit negativa. Quare hanc transformationem exiguum usum habere arbitror. Ea autem de causa potissimum hanc transformationum theoriam præmisi, ut appareat, quamlibet æquationem tertii, & quarti gradus in aliam mutari posse, quæ careat secundo termino.

14. Hic quoque juvat adnotare, formulam tertii gradus nullo negotio converti in formulam quarti, si multiplicetur per x, aut per $x\pm B$. Sed sciendum, numerum radicum per hanc multiplicationem unitate augeri. Si enim ducatur in x, radicibus, quibus prædita erat æquatio tertii gradus, additur radix $x=0$; si ducatur in $x\pm B$, radicibus tribus additur quarta nempe $x=\mp B$. Quapropter radices istæ additæ non pertinent ad tertii gradus æquationem, & si agatur de inveniendis tribus radicibus æquationis tertii, istæ sunt tamquam inutiles seponendæ.

CAPUT NONUM.

De constructione æquationum tertii, & quarti gradus per intersectionem conicarum sectionum.

1. Quemadmodum æquationes primi gradus construuntur per intersectionem duarum rectarum, æquationes vero secundi gradus per intersectionem rectæ cum circulo, aut duorum circulorum inter se se, ut in primo libro docuimus: ita æquationes tertii, & quarti gradus construuntur per intersectionem duarum sectionum conicarum, quod in præsentia est declarandum. Paullo ante demonstravimus æquationes omnes indeterminatas secundi gradus ad sectiones conicas pertinere, easque descriptis conicis sectionibus ad constructionem perduci. Quare si æquationem tertii, aut quarti gradus resolvamus in duas indeterminatas secundi gradus, delineatis sectionibus conicis earum intersectiones exhibebunt radices æquationis determinatæ.

2. Ut hæc concipiantur clarius, sint duæ indeterminatæ x, y, de quibus constet valere has æqualitates $ay=x^2$, $xy=ab$. Habebimus duas æquationes, & duas incognitas; quare transitus fieri poterit ad æquationem determinatam unam solummodo incognitam continentem. Nimirum in secunda æquatione substitue pro y ejus valorem $\frac{x^2}{a}$, qui datur ex prima, & prodibit $\frac{x^3}{a}=ab$, sive $x^3=a^2b$, quæ æquatio determinata nascitur ex duabus indeterminatis. Quare vice versa æquationem determinatam tertii gradus $x^3=a^2b$, potero resolvere in duas indeterminatas secundi gradus, statuens $ay=xx$. Valore enim xx substituto orietur $xy=ab$. En itaque duas æquationes indeterminatas $ay=xx$, $xy=ab$, ex quarum combinatione æquatio $x^3=a^2b$ restituеretur.

3. Re-

3. Resoluta æquatione tertii, aut quarti gradus in duas indeterminatas secundi, ad eandem abscissam A P, (*Fig.* 1.) sumpto eodem obscissarum initio A delineentur sectiones conicæ, qui sunt loci æquationum indeterminatarum, earum intersectiones præbebunt radices æquationis determinatæ, quæ tot erunt, quot sunt intersectionum puncta. Ita in exemplo adducto ad tangentem A P descripta parabola A M, quæ est locus æquationis $ay = xx$, tum ducta A N parallela ordinatis, & delineata hyperbola N M inter asymptota A N, A P, quæ hyperbola est locus æquationis $xy = ab$, habebitur unica curvarum intersectio in puncto M. Ex hoc ducatur ordinata M P, erit A P radix æquationis quæsitæ. Ratio est clarissima, quia utraque æquatio $ay = xx$, $xy = ab$ locum habere non potest nisi in punctis illis, quæ sunt tum parabolæ, tum hyperbolæ communia.

4. His animadversis quisque videt, in eo difficultatem sitam esse, ut æquationes omnes tertii, & quarti gradus in duas indeterminatas secundi resolvamus. Hinc ob rem supponam plerumque æquationes spoliatas esse secundo termino, quod semper ex capite superiore possumus obtinere. Incipiam ab æquationibus gradus tertii. Sit resolvenda in duas æquatio $x^3 + abx - af^2 = o$, in qua a, b possunt accipi & positive, & negative. Fiat $x^2 = ay$, & facta substitutione nascitur $yx + bx - ff = o$. Prima ex his est ad parabolam, altera ut construatur, pone $y + b = z$, & proveniet $zx = ff$, quæ est ad hyperbolam inter asymptota.

5. In A P (*Fig.* 2.) sumptis abscissis $= x$, quæ incipiunt in A, delineetur parabola M A m, quæ tangatur ab A P in A, & habeat diametri parametrum $= a$; abscissæ enim cum ordinatis facere possunt angulum quemcumque. Erunt A P $= x$, P M $= y$ æquationis $ay = xx$. Similiter inter assymptota I Q, F S, (*Fig.* 3.) quæ faciant angulum I C S æqualem angulo A P M, describe hyperbolam, cujus coordinatæ N Q, C Q efficiant rectangulum $= ff$. In hac sume C Q $= x$, erit Q N $= z$. Demum secta C D $= b$, per D agatur D E parallela assymptoto C Q, erunt D E $= x$, E N $= y$ æquationis $yx + bx = ff$.

6. Ut rite duo loci geometrici conjugantur, oportet, ut lineæ abscissarum D E, A P (*Fig.* 4.) coincidant cadente D supra punctum A. Hoc factum conspicies in fig. 4, in qua sumpta D C $= b$ in parabolæ diametro producta, per punctum C ducta est C Q parallela tangenti D E, & inter assymptota I Q, F S descripta est hyperbola. His effectis puncta intersectionis N hyperbolæ cum parabola præbebunt valores coordinatarum x, y utrique curvæ communium. Si itaque intersectio sit N, erit N E valor y, & D E valor respondentis x, quæ proinde radicem æquationis tertii gradus sufficiet. Ex hac combinatione hyperbolæ, & parabolæ ad inveniendas radices æquationis $x^3 + abx - aff = o$, si tam a, quam b sit positiva, quod in fig. 4. supponitur, apparet, curvas non secare se nisi in unico puncto N; qua de re unica erit dumtaxat radix realis propositæ æquationis. Hoc idem contingit si $b = o$, atque adeo æquatio proposita sit $x^3 - aff = o$.

7. Quod si b foret negativa, & æquatio $x^3 - abx - aff = o$, tum C D sumenda esset ad partem oppositam, ut in fig. 5. In hac combinatione ramus parabolæ D N secat ut antea ramum hyperbolæ S N in puncto N; quare habetur una radix æquationis D E, & quidem positiva. At quum contingere possit, ut alii rami se secent, & non secent, determinandus est casus medius, in quo ramus para-

parabolæ Dn tangit ramum hyperbolæ In. Itaque ajo, sese in vicem tangere parabolam, & hyperbolam, si fuerit parameter parabolæ, scilicet $a = \frac{27f^4}{4b^3}$. Etenim divide CD $= b$ in R, ut DR sit tertia pars, & parabolæ diametro applica Rn, quæ invenitur $= \sqrt{\frac{27f^4}{4b^3} \cdot \frac{b}{3}} = \sqrt{\frac{9f^4}{4b^2}} = \frac{3f^2}{2b} = \frac{f^2}{\frac{2}{3}b} = \frac{f^2}{CR}$; atqui $\frac{f^2}{CR}$ est æqualis ordinatæ hyperbolæ; igitur Rn non minus est ordinata parabolæ quam hyperbolæ, ergo punctum n est in utraque curva. Quod autem hoc punctum n sit punctum contactus ita demonstro. Ex n due nu, quæ parabolam tangat, erit Du $=$ DR: ergo Ru $=$ RC; sed hæc est proprietas tangentis hyperbolam; ergo nu non minus parabolam tanget, quam hyperbolam: igitur curvæ istæ duæ sese tangunt in puncto n. His demonstratis constat in hoc casu $a = \frac{27f^4}{4b^3}$ æquationem $x^3 - abx - af^2 = o$, præter unam radicem DE positivam, de qua supra, habere duas alias radices negativas, & inter se æquales nempe De. Si sit $a > \frac{27f^4}{4b^3}$, tum parabola præter punctum N secabit hyperbolam in duobus punctis, a quibus duæ radices negativæ definientur. Æquatio itaque tribus radicibus prædita erit, positiva una, reliquis negativis. Si vero $a < \frac{27f^4}{4b^3}$, præter punctum N nulla alia existit intersectio, & æquatio una tantum radice positiva gaudet.

8. Si quantitas a esset negativa, tum describenda esset parabola ad partem oppositam, scilicet ad partem ordinatarum negativarum procedentibus ramis versus F, quia ejus parameter esset negativa. Quapropter si foret b negativa, aut $= o$ hyperbola secaretur a parabola in uno tantum puncto, quod respondet abscissis negativis, ac proinde una solum radix negativa haberetur. Si vero b esset positiva, tum ad determinandum, utrum unum, aut tria sint puncta intersectionis, eadem est prorsus regula adhibenda. Si autem tria sint, unum pertinebit ad abscissas negativas, & radicem negativam præbebit, reliqua duo spectabunt ad abscissas positivas, & duas radices positivas sufficient. Ex his omnibus colligas velim, æquationem gradus tertii aut una radice reali, aut tribus ornatam esse, quia descriptæ curvæ, aut in uno puncto, aut in tribus semper se secant. Constat proinde, æquationem tertii gradus saltem una radice reali præditam esse.

9. Hactenus spectavimus formulas tertii gradus carentes secundo termino, ut elegantiores fierent constructiones. Ceterum eadem methodo in duas indeterminatas resolvuntur etiam æquationes, quæ continent secundum terminum; quod paucis indicare non pigebit. Sit æquatio omnibus terminis constans nempe

pe $x^3 + ax^2 + abx - abf = o$, in qua a, b, f esse possunt positivæ & negativæ. Fiat $x^2 + ax = ay$, quæ multiplicetur per x, ut sit $x^3 + ax^2 = axy$. Facta substitutione orietur $yx + bx = bf$. In duas igitur resoluta est æquatio tertii gradus, hoc est $x^2 + ax = ay$, $yx + bx = bf$. Prima est ad parabolam, quia addito $\frac{aa}{4}$ fiet $xx + ax + \frac{aa}{4} = ay + \frac{aa}{4}$. Fac $x + \frac{a}{2} = q$, $y + \frac{a}{4} = p$, & invenies $qq = ap$, quæ est æquatio parabolæ. Altera spectat ad hyperbolam inter assymptota, quia posita $y + b = z$ provenit $zx = bf$, quæ est æquatio hyperbolæ inter assymptota. His curvis delineatis, & rite conjunctis puncta intersectionum definient nostræ æquationis radices. Adverte, me elegantiæ caussa assumpsisse parabolæ parametrum $= a$. Verum si aliam velis eligere nempe g, adhibe primam æquationem $xx + ax = gy$, & opportunis peractis operationibus fies voti compos.

10. Transeo ad resolutionem æquationum quarti gradus, quas spoliatas suppono secundo termino. Sit generalis æquatio $x^4 + fgx^2 + f^2bx - f^3c = o$, in qua quantitates f, g, b, c & positivæ esse possunt, & negativæ, imo f quantitas est arbitraria, quam pro libito sumere possum. Ad hanc enim formam æquationes omnes reduci possunt, quia subeant mutationem. Fiat $xx = fy$, & $x^4 = f^2y^2$, factaque substitutione orietur $y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx - fc = o$, a qua detrahe æquationem $x^2 - fy = o$ multiplicatam per m, positaque $\frac{g}{f} = n$, obtinebis $y^2 \begin{smallmatrix}+n\\-m\end{smallmatrix} . x^2 + bx + mfy - fc = o$, in qua duæ adsunt quantitates ex arbitratu determinandæ nempe m, n. Si his quantitatibus assignemus valores diversos, diversæ orientur æquationes indeterminatæ secundi gradus, quarum duæ pro libito sumptæ, descriptis curvis, radices nostræ æquationis sufficient.

11. Ut clarius hoc percipias inventam æquationem ordina in hunc modum $yy + mfy + \frac{m^2f^2}{4} = \overline{m-n} . x^2 - bx + fc + \frac{m^2f^2}{4}$. Fac $y + \frac{mf}{2} = z$, & fiet $zz = \overline{m-n} . x^2 - bx + fc + \frac{m^2f^2}{4}$. Si $m - n = o$, æquatio hæc est ad parabolam, plenamque resolutionem accipiet, si ponas $-x + \frac{fc}{b} + \frac{m^2f^2}{4b} = u$, ut resultet $zz = bu$. In aliis casibus pone $m - n = \pm r$, ut habeas

$$\frac{zz - fc - \frac{m^2f^2}{4}}{\pm r} = xx - \frac{bx}{\pm r}, \text{ factaque } x - \frac{b}{\pm 2r} = u, \text{ orietur}$$

$$\frac{zz - fc - \frac{m^2f^2}{4}}{\pm r} + \frac{b^2}{4r^2} = u^2. \text{ Pone demum } -fc - \frac{f^2m^2}{4} \pm \frac{b^2}{4r} = \pm a^2 \text{ ut}$$

obti-

obtineas $\frac{z^2 \pm a^2}{\pm r} = u^2$, ex qua æquatione per signorum combinationem quatuor sequentes oriuntur $\frac{z^2 + a^2}{r} = u^2$, $\frac{z^2 - a^2}{r} = u^2$, $\frac{z^2 - a^2}{-r} = u^2$, $\frac{z^2 + a^2}{-r} = u^2$. Prima est ad hyperbolam, in cujus prima diametro sunt accipiendæ indeterminatæ u. Altera est ad hyperbolam, in cujus secunda diametro u sunt sumendæ. Tertia est ad ellypsim. Quarta nihil habet utilitatis, quia est ad ellypsim imaginariam. In his omnibus quadratum diametri, cui sunt parallelæ z, ad quadratum diametri, in qua accipiuntur u, est ut $r:1$. Si $r=1$, hyperbolæ fiunt æquilateræ, & ellypsis transit in circulum, dummodo coordinatarum angulus sit rectus.

12. Ex his omnibus perspicuum est, æquationem semper pertinere ad hyperbolam, si r sit positiva, vel quadrato a^2 præfigatur signum $+$, vel signum $-$; pertinere vero ad ellypsim, si r sit negativa, quæ ellypsis realis erit, si a^2 signo $-$ afficiatur, erit imaginaria, si a^2 signum $+$ habeat. Itaque æquatio generalis indeterminata $y^2 + \begin{matrix} n \\ -m \end{matrix} x^2 + bx + mfy - fc = o$, si $n-m=o$, est ad parabolam; si $n-m$ est negativa, est ad hyperbolam; si $n-m$ est positiva, est ad ellypsim, quod alias etiam monuimus. Quod si optas, ut diametrorum quadrata sint ut $b:l$, necesse erit ut vel $n-m=\frac{b}{l}$, vel $n-m=\frac{l}{b}$: Quare ad habendam curvam datæ speciei, oportet $n-m$ esse quantitatem datam vel positivam vel negativam prout aut ellypsim postulas, aut hyperbolam. Quamquam in superiore æquatione duæ existunt quantitates indeterminatæ n, m; tamen advertendum est sedulo, non eodem modo esse indeterminatas. Etenim quantitas n ita est indeterminata, ut eundem valorem debeat habere in illis duabus æquationibus, in quas ad inveniendas radices resolvitur æquatio quarti gradus. Nam quantitas n dependet ab f, quia $n=\frac{g}{f}$: sed f tum in æquatione substitutionis $xx=fy$, tum in ea, quæ statim nascitur facta substitutione, tum in illis, quæ prodeunt detracta formula substitutionis multiplicata per m, eadem sit oportet: ergo etiam n eadem esse debet. Quare potes quidem n ex arbitraru determinare: at ubi semel determinaveris, idem valor in omnibus est retinendus. Verum quantitas m ita indeterminata est, ut unum valorem habeat in prima æquatione, alium in secunda: imo diversi valores m, diversas curvas producunt, ex quarum combinatione radices determinatæ æquationis inveniuntur.

13. Unico exemplo theoriam declaremus. Construenda sit nostra æquatio $x^4 + fgx^2 + f^2bx - fc^2 = o$ per parabolam, & circulum. Spectemus æquationem generalem indeterminatam, in qua omnes continentur, nempe $y^2 + \begin{matrix} n \\ -m \end{matrix} x^2 + bx + mfy - fc = o$. Ut oriatur parabola fiat $m=n=\frac{g}{f}$, ut fit $y^2 + bx + gy - fc = o$. Ut oriatur circulus fiat $m=n-1=\frac{g}{f}-1$, ut

 fit

fit $y^2 + x^2 + bx + gy - fy - fc = o$. Habemus itaque æquationem determinatam in duas indeterminatas resolutam.

14. Ut prima, quæ est ad parabolam, construatur, ita disponatur $yy + gy + \frac{gg}{4} = -bx + fc + \frac{gg}{4}$. Fiat $y + \frac{g}{2} = z$, & posita $fc + \frac{gg}{4} = bd$, orietur $zz = -bx + bd$. Ponatur $d - x = u$, & prodibit $zz = bu$. Vertice A, axe AD, (*Fig.6.*) & parametro $= b$ describe parabolam AM, erunt $AP = u$, $PM = z$. Abscinde $AD = d$, erit $DP = d - u = x$. Deinde ex puncto D normalis rectæ DA erigatur $DB = \frac{1}{2}g$, & ex puncto B agatur indefinita BR parallela DA, erit $RM = z - \frac{g}{2} = y$: igitur BR, RM erunt nostræ æquationis coordinatæ x, y, & punctum B initium abscissarum.

15. Construamus alteram æquationem indeterminatam $yy + xx + bx + \overline{g - f}.y = fc$, quæ ita disponatur

$$yy + \overline{g - f}.y + \frac{\overline{g - f}^2}{4} + xx + bx + \frac{bb}{4} = \frac{\overline{g - f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc.$$

Fiat $y + \frac{g - f}{2} = z$; $x + \frac{b}{2} = u$, & orietur $zz + uu = \frac{\overline{g - f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc$. Itaque centro C radio $CA = \sqrt{\frac{\overline{g - f}^2}{4} + \frac{bb}{4} + fc}$ describatur circulus ANB, (*Fig.7.*) in quo $CQ = u$, $QN = z$. Abscinde $CH = \frac{b}{2}$, erit $HQ \doteq u - \frac{b}{2} = x$. Radio CA normalem erige $HK = \frac{g - f}{2}$, & eidem radio parallelam age KL, erunt $LN = z + \frac{f - g}{2} = y$: igitur KL, LN erunt x, y nostræ æquationis, existente K abscissarum initio. Ad radium imaginarium in hac constructione fugiendum, ejusmodi quantitas f assumenda est, ut quantitas sub signo radicali posita sit positiva. Duæ curvæ, satisfacientes duabus æquationibus indeterminatis, opportune conjungantur posito puncto K in B, & linea KL super BR. Tum a punctis M, (*Fig. 8.*) ubi circulus, & parabola se intersecant, demissis ordinatis MQ, abscissæ BQ æquationis determinatæ radices exhibebunt; quæ tot erunt, quot sunt puncta sectionis. Quum autem hæc puncta neque tria, neque unum esse possint, constat radices æquationis quarti gradus neque tres, neque unam esse posse, sed esse vel quatuor, vel duas, vel nullam.

16. Si optes construere æquationem quarti gradus per duas ellypses, redi ad æquationem indeterminatam $yy \pm \frac{n}{m}x^2 + bx + mfy - fc = o$. In hac posita $n = 4$, ut $f = \frac{1}{4}g$, fiat primum $m = 1$, ut æquatio resultet $yy + 3xx + bx + fy - fc = o$: tum fiat $m = 2$, & prodibit $yy + 2xx + bx + 2fy - fc = o$. Æquationes istæ ambæ spectant ad ellypsim. Si optas hyperbolas duas posita $n = 1$, ut $f = g$, primum statue $m = 2$, ut æquatio oriatur $yy - xx + bx$ +

$+2fy-fc=o$; deinde $m=3$, ut altera æquatio prodeat $yy-2xx+bx+3fy-fc=o$. En tibi æquationes ad duas hyperbolas. Ex his vides, quanam methodo possis æquationem construere per circulum & ellypsim, sive hyperbolam, imo generatim per duas sectiones conicas cujuscumque generis.

17. Methodus hæc modum nobis sufficit construendi æquationem quarti gradus per duas sectiones conicas similes. Formulas paullo ante inventas ob oculos propono, scilicet $\frac{zz\pm aa}{r}=uu$, $\frac{zz\pm aa}{-r}=uu$, quarum prima est ad hyperbolam, quæ habet u in prima diametro, si valeat signum superius, habet in secunda diametro, valente signo inferiore; altera vero est semper ad ellypsim, sed esset imaginaria, si valeret signum superius. In his curvis diameter, in qua sumuntur u, ad suam conjugatam est ut $1:\sqrt{r}$. Hoc posito si velis æquationem construere per duas ellypses similes, quarum diametri sint in ratione $2:1$, pone primum $r=4$, & proveniet $\frac{zz-aa}{-4}=uu$, ellypsis in qua diametri sunt in ratione data $2:1$. Tum pone $r=\frac{1}{4}$, & habebis $4.\frac{zz-aa}{-1}=uu$, ellypsim, in qua diametri erunt in data eadem ratione, ac proinde similem priori. Memento $r=n-m$. In facta speciei r determinationibus, remanente $n=\frac{g}{f}$ indeterminata, determinanda est sola m. Qua peracta ita definienda est n, seu f, quæ in utraque curva eadem sit oportet, ut neutra ellypsis fiat imaginaria.

18. Quandoquidem analysis hæc solertiam postulat non mediocrem, utile erit, eandem illustrare aliquo exemplo, quod sit ex difficillimis. Construenda proponatur per duas ellypses similes, quarum diametri sint ut $2:1$, æquatio $x^4+aaxx+a^3x+8a^4=o$. Fiat $xx=fy$, seu $xx-fy=o$. Quantitas f ea est indeterminata, quæ in duabus æquationibus oportet sit eadem. Facta substitutione fit $yy+\frac{a^2}{ff}xx+\frac{a^3}{ff}x+\frac{8a^4}{ff}=o$. Dematur prima æquatio multiplicata per m, ut oriatur formula generalis.

$$yy+\left(\frac{a^2}{f^2}-m\right).xx+\frac{a^3}{f^2}x+mfy=-\frac{8a^4}{ff}.$$

Quantitas $\frac{a^2}{f^2}$ illa est, quam vocavimus n: ergo $\frac{a^2}{f^2}-m=r$. Pone igitur primum $\frac{a^2}{ff}-m=4$, seu $\frac{aa-4ff}{ff}=m$, & invenies $yy+4xx+\frac{a^3}{f^2}x+y.\frac{aa-4ff}{f}=-\frac{8a^4}{f^2}$, quæ completis opportune quadratis in hanc mutabitur

$$yy+y.\frac{aa-4ff}{f}+\overline{\frac{aa-4ff}{4ff}}^2+4.\overline{xx+\frac{a^3}{4f^2}x+\frac{a^6}{64f^4}}=\overline{\frac{aa-4ff}{4ff}}^2+\frac{a^6}{}$$

$\frac{a^6}{16f^4} - \frac{8a^4}{f^2}$. Ne ellypsis sit imaginaria necesse est, ut $\frac{\overline{a^2-4ff}^2}{4} + \frac{a^6}{16ff} > 8a^4$: quod semper obtinere possumus: nam si f sit infinite magna, aut parva certe formula vera est.

19. Nunc pone $\frac{a^2}{f^2} - m = \frac{1}{4}$, seu $\frac{4a^2-f^2}{4f^2} = m$. Peracta substitutione eritur $y^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{a^3}{ff}x + y.\frac{4a^2-f^2}{4f} = -\frac{8a^4}{ff}$, & completis quadratis

$$y^2 + y.\frac{4a^2-f^2}{4f} + \frac{\overline{4a^2-f^2}^2}{64f^2} + \overline{\frac{1}{4}.x^2 + \frac{4a^3}{ff}x + \frac{4a^6}{f^4}} = \frac{\overline{4a^2-f^2}^2}{64f^2} + \frac{a^6}{f^2} - \frac{8a^4}{ff}.$$

In hac ad imaginaria vitanda necesse est, ut $\frac{\overline{4a^2-f^2}^2}{64} + \frac{a^6}{f^2} > 8a^4$. Talis eligendus est valor f, ut non minus hæc formula, locum habeat, quam formula numeri superioris. Hanc ob rem fac $f = 6a$. Hoc valore supposito utraque formula vera invenitur, adeoque utraque ellypsis realis. At si posuissem $f = 5a$, vera quidem esset formula numeri superioris, at non item formula præsentis numeri: igitur ellypsis una esset imaginaria, atque adeo frustraretur constructio. Pone igitur in utraque æquatione $6a$ pro f, & per duas ellypses similes, quas formulæ præbent, æquationem construe.

20. Eadem methodus advocanda est, si ad constructionem uti velis duabus hyperbolis similibus, quarum diametri sint ut $2:1$ caussa exempli. Fac enim primum $-r = m - n = 4$, tum $-r = m - n = \frac{1}{4}$. Per has suppositiones, definitur species m, non autem n, quæ eadem debet esse in utraque curva. In specie n vero determinanda, major cautio requiritur, quam in ellypsi. Namtalis valor assumendus est, ut in una formula quantitas constans, quam vocavimus aa, habeat præfixum signum $+$, in altera signum $-$. Ita enim fiet, ut in una hyperbola abscissæ x sumantur in prima diametro, aut in ejus parallela, in altera accipiantur in secunda diametro, aut in parallela. Quare si in in una prima diameter ad secundum sit ut $2:1$, in altera secunda diameter erit ad primam ut $\frac{1}{2}:1$, & prima diameter ad secundam ut $2:1$: qua de re hyperbolæ sunt similes. Quod si determinatio n efficeret, ut quantitas aa in utraque æquatione afficeretur eodem signo, hyperbolæ essent reciprocæ, non autem similes, quia quum in utraque x accipiantur aut in prima diametro, aut in secunda, si in una prima diameter est ad secundam ut $2:1$, in altera prima diameter erit ad secundam ut $\frac{1}{2}:1$: quod dat non hyperbolas similes sed reciprocas.

21.

21. Hujus quoque non ita facilis analyseos exemplum necessarium videtur. Per duas hyperbolas similes, quarum diametri sint ut 2 : 1 proponatur construenda æquatio $x^4 - a^2x^2 + a^3x - 2a^4 = 0$. Supposita de more $x^2 - fy = 0$, fiet $y^2 - \frac{a^2}{f^2}x^2 + \frac{a^3}{f^2}x - \frac{2a^4}{f^2} = 0$. Dematur æquatio substitutionis multiplicata per m, ut habeas æquationem generalem indeterminatam

$$y^2 - \frac{a^2}{f^2}x^2 + \frac{a^3}{f^2}x + mfy - \frac{2a^4}{f^4} = 0.$$
$$ - m$$

Quantitas $-\frac{aa}{ff}$ est ea, quam vocamus n, quæ ita est determinanda, ut eadem sit in utraque æquatione. Fiat $\frac{a^2}{f^2} + m = 4$, seu $m = 4 - \frac{a^2}{f^2}$, & ex duabus æquationibus nascitur prima

$$y^2 - 4x^2 + \frac{a^3}{ff}x + 4fy - \frac{a^2}{f}y = \frac{2a^4}{ff},$$

quæ ita disponatur

$$\overline{y + \frac{4ff - aa}{2f}}^2 - 4.\overline{x - \frac{a^3}{8ff}}^2 = \overline{\frac{4ff - aa}{4ff}}^2 - \frac{a^6}{16f^4} + \frac{2a^4}{ff}.$$

Si hoc homogeneum comparationis est negativum, x positæ erunt in parallela primæ diametro; si positivum est, x sitæ erunt in parallela secundæ diametro.

22. Fiat denuo $\frac{a^2}{f^2} + m = \frac{1}{4}$, seu $m = \frac{1}{4} - \frac{a^2}{f^2}$, & habebitur

$$y^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{a^3x}{ff} + y.\frac{ff - 4aa}{4f} = \frac{2a^4}{f^2},$$

quæ ita est disponenda

$$\overline{y + \frac{ff - 4aa}{8f}}^2 - \frac{1}{4}.\overline{x - \frac{2a^3}{ff}}^2 = \overline{\frac{ff \cdot 4aa}{64ff}}^2 - \frac{a^6}{f^4} + \frac{2a^4}{ff}.$$

Si supponeremus $f = a$, homogeneum comparationis in æquatione numeri superioris esset $= \frac{17aa}{4} - \frac{aa}{4 \cdot 4}$, quæ est positiva: quare prima diameter erit ad secundam ut 2 : 1. In æquatione hujus numeri homogeneum erit $= aa + \frac{9aa}{64}$ quæ pariter est positiva; quare secunda diameter est ad primam ut 2 : 1. Hyperbolæ itaque similes non sunt, sed reciprocæ. Ut similes proveniant curvæ, necesse est, ut ex duobus homogeneis unum positivum sit, negativum alterum. Quum autem quantitas affecta signo — in primo homogeneo minor sit quam in secundo, hoc negativum, illud positivum erit statuendum. Ad hanc rem fiat $f =$.

$f = \frac{a}{2}$, homogeneum numeri superioris fiet $= 7aa$ quod est positivum, adeoque prima ad secundam diametrum ut 2 : 1; homogeneum vero hujus numeri $= \frac{\overline{15}^2}{\overline{16}^2} aa - 8aa$, quod est negativum, ex quo consequitur primam diametrum esse ad secundam ut 2 : 1. Quare hyperbolæ construentes propositam æquationem erunt similes.

23. Ex facta analysi colliges, formulam $x^4 - a^2x^2 - 2a^4 = o$, quæ caret termino, ubi x linearem habet dimensionem, posse quidem construi per duas ellypses similes, & per duas hyperbolas reciprocas, non autem per hyperbolas similes, quia, facto calculo ut supra, in utraque æquatione homogeneum comparationis est necessario positivum. Præterea frustra tentabis æquationem construere per duos circulos, aut duas hyperbolas ,æquilateras. Qu a quum unitas sit sui ipsius reciproca, oporteret bis ponere $r = \pm 1$, quod eamdem curvam, non duas præberet.

24. Quod ad parabolas spectat, de quibus nondum loquutus sum, satis erit reducere problema ad duas parabolas, quia parabolæ sunt semper inter se similes. Revoca æquationem generalem indeterminatam

$y^2 + \overline{n-m}\, x^2 + bx + mfy - fc = o$. Pone $m = n$, ut parabolam habeas, & invenies primam æquationem $yy + bx + mfy - fc = o$. Quum n debeat esse eadem in utraque æquatione, videtur alia parabola oriri non posse, sed si advertas ad formulam substitutionis $xx = fy$, aliam parabolam habere te, cognosces, quam si conjungas cum superiore, problema solves. Hæc ipsa formula $xx = fy$ continetur in generali, nam si facias $m = \infty$, evanescentibus ceteris omnibus terminis remanet $- m x^2 + mfy = o$, factaque divisione per m, remanet $- x^2 + fy = o$, seu $fy = x^2$.

25. In duabus curvis similibus, per quas gradus quarti æquationes construuntur, hoc perpetuo observatur, ut si in una abscissæ x sitæ sunt in recta parallela diametro, in alia x jaceant in parallela tanganti curvam in vertice diametri analogæ. Quod si velis conjungere sectiones conicas similes ita, ut in ambabus abscissæ sint in diametro, aut in tangente, nunquam reperies æquationem quarti gradus, sed secundi, vel etiam primi. Juvat hujusce rei exemplum ponere ob oculos in hyperbolis similibus AM, SM, (*Fig. 9.*) in quibus $CP = x$, $PM = y$, $CA = a$, $CQ = c$, $TS = b$, $TQ = d$, $TR = z = x - c$, $RM = u = y - d$. Æquationes duæ erunt $xx - aa = ry^2$, $zz - bb = ru^2$, species r indicans proportionem diametrorum in hyperbolis similibus eadem est. Pro z, & u substitue valores datos per x, y, ut secunda æquatio in hanc mutetur

$x^2 - 2cx + cc - bb = r.\overline{y^2 - 2dy + dd}$. Ex hac demantur prima, & fiet

$c^2 - b^2 + aa - 2cx = r.\overline{-2dy + dd}$, sive $y = \frac{rdd - cc + bb - aa + 2cx}{2rd}$.

Si

Si valorem hunc y ſubſtituas in prima æquatione, ut remaneat ſola x, æquationem obtinebis non quarti, ſed ſecundi gradus. Idem tentando cognoſces evenire in parabolis, & ellypſibus ſimilibus.

26. **Ex his omnibus palam fit, poſſe æquationem quarti gradus conſtrui per ſectionem conicam datæ ſimilem. Nunc paucis docendum, qua methodo data curva in conſtructionem introduci poſſit. Curva data ſit AEBD (*Fig.* 10). Æquationem propoſitam conſtrue per curvam aebd ſimilem datæ, & curvam quamlibet fm. Sectionum ſimilium diametri, ſive parametri ſint ut R : r. Radices inventæ ſint hq, h2q &c. Sume r:R::cg:CG::gf:GF::ck:CK::kh:KH, & ſi quæ ſunt aliæ. Demum intellige deſcriptam curvam FM ſimilem fm; hæc ſecabit curvam datam in punctis M, 2M, quæ ſunt analoga punctis m, 2m. Duc MQ, 2M2Q, & habebis HQ:hq::R:r; ergo $hq = \frac{r.HQ}{R}$; ſed hq eſt æquationis propoſitæ radix; Ergo etiam $\frac{r.HQ}{R}$. Idem dic de aliis radicibus. Hoc modo determinantur radices æquationis quarti gradus per ſectionem conicam datam, & aliam quamlibet.**

27. Quamquam brevitati, & elegantiæ ſervientes ad conſtructionem perduximus æquationes quarti gradus carentes ſecundo termino; tamen, ſi pigeret hac reductione uti, eadem methodus etiam ad æquationes ſecundo termino præditas ſeſe extenderet. Hoc breviſſime patefaciam. Sit æquatio $x^4 + Ax^3 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = o$. Fiat $fy = xx + \frac{A}{2}x$, & quadrando $f^2y^2 - \frac{A^2}{4}x^2 = x^4 + Ax^3$. Facta ſubſtitutione erit $f^2y^2 - \frac{A^2}{4}x^2 + fgx^2 + f^2bx + f^3c = o$, ſive dividendo per ff, $y^2 - \frac{AA}{4ff}x^2 + \frac{gx^2}{f} + bx + fc = o$, ex qua dematur $x^2 + \frac{A}{2}x - fy = o$ multiplicata per m, ut generalis formula prodeat

$$y^2 + mfy - \frac{A^2}{4f^2}x^2 + bx + fc = o, \quad \text{quæ}$$
$$+\frac{g}{f}x^2 - \frac{mA}{2}x$$
$$-mx^2$$

tractetur ea ipſa methodo, quam ſupra docuimus.

28. Methodum conſtruendi æquationes quarti gradus per hyperbolam inter aſſymptota non omitto, quia ſæpenumero elegantiam habet maximam. Sit de more æquatio $x^4 + fgx^2 + f^2bx \pm f^3c = o$. Pono $f\sqrt{fc} = xy$, & $f^3c = x^2y^2$; unde facta ſubſtitutione $x^4 + fgxx + f^2bx \pm x^2y^2 = o$. Tertium terminum ita ſcribe $\frac{f^2b}{f\sqrt{fc}} . f\sqrt{fc}.x = \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} . f\sqrt{fc}.x$, tum in hoc pro $f\sqrt{fc}$ pone xy, ut habeas $x^4 + fgx^2 + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}} . x^2y \pm x^2y^2 = o$, & facta diviſione per xx erit, $x^2 + fg + \frac{b\sqrt{f}}{\sqrt{c}}y$

$\pm yy = o$. Hæc, si signum superius valeat est ad ellypsim, quæ in circulum degenerat, si rectus sit angulus coordinatarum. Si valeat signum —, est ad hyperbolam æquilateram. Sectionem hanc, quæ construenda est, conjungamus cum hyperbola æquationis $f\sqrt{fc} = xy$, & per earum intesectiones radices quæsitas obtinebimus. Si angulus coordinatarum rectus sit, hyperbola inter assymptota æquilatera est. Quare pro casu signi inferioris construimus æquationem per duas hyperbolas æquilateras, quod per aliam methodum obtinere non possumus.

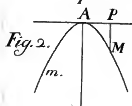
29. Quoniam æquatio tertii gradus ad quartum reduci potest, eam multiplicando aut per x aut per $x \mp a$, iccirco per easdem methodos resolutionem accipiet. Facta autem constructione una interfectio dabit $x = o$, si facta fuerit multiplicatio per x, aut $x = \pm a$, si multiplicatio facta sit per $x \mp a$. Hæc autem est radix addita, quæ propterea ad æquationem tertii gradus non pertinet. Erit itaque seponenda, & aliæ duntaxat spectandæ.

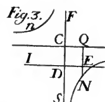
CAPUT DECIMUM.

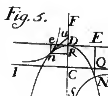
Methodus capitis superioris construendi æquationes tertii, & quarti gradus per intersectionem conicarum sectionum omni difficultate liberatur.

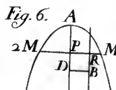
1. AD inveniendas radices æquationis tertii, & quarti gradus usi sumus duabus sectionibus conicis sese intersecantibus. Adversus hanc methodum, quam tamquam incertam accusat, scripsit Rollius ingeniosissime, eidemque opposuit difficultatem dignam, quæ pro virili parte examinetur. Accidere posse putat hic Auctor, ut curvæ duæ respondentes æquationibus indeterminatis, in quas resoluta est æquatio determinata prædita radicibus realibus, minime sese intersecent, aut saltem numerus intersectionum minor sit numero radicum realium. Itaque si curvæ sese intersecent, possum tuto pronunciare, hisce sectionibus reales radices æquationis respondere; sed non possum ex converso affirmare, nullas alias esse radices reales præter eas, quæ a punctis intersectionum determinantur. Hoc primum juvabit inspicere in duobus exemplis clarissimis; deinde in theoriam intersectionum penitius inquirens dabo operam, ut ab hac non contemnenda difficultate methodus liberetur.

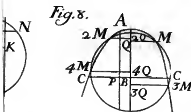
2. Consentiunt ad unum omnes, æquationem $xx - x . \overline{a+b} + ab = o$, præditam esse duabus radicibus realibus, scilicet $x = a$, $x = b$. Ad eam construendam sequentem methodum advoco. Pono $xx = aa - yy$; igitur facta substitutione provenit $aa - yy - x . \overline{a+b} + ab = o$, seu $\overline{a+b} . \overline{a-x} = yy$. Prima ex his est ad circulum, hæc ad parabolam; atque hoc modo constructio perficietur. Radio A C $= a$ circulus D A D (*Fig.* 1.) describatur; tum parametro $= a + b$, vertice A describatur parabola. Hoc modo delineatas habes curvas duarum æquationum, in quas æquatio proposita est resoluta. Si $a > b$ parabola D A D initio cadit intra circulum, eumque non solum tangit in A, sed etiam secat in punctis D, D, a quibus punctum E determinatur ita, ut radices sint C A $= a$, C E $= b$. Notum est, contactum A duobus punctis sectionis æquivalere, atque adeo quatuor esse sectionis puncta; quod indicat, utramque

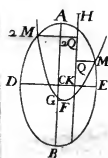

Fig. 2.
A
P
M
m.

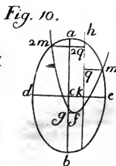

Fig. 3.
n
F
C
Q
I
E
D
N
S


Fig. 5.
F
e
u
D
E
R
n
Q
I
C
N
S


Fig. 6.
A
2M
P
M
R
D
B


N
K
Fig. 8.
A
2M
2Q
M
Q
4M
4Q
C
P
B
C
3M
3Q


A
H
2M
2Q
Q
M
D
CK
E
G
F
B


Fig. 10.
a
h
2m
2q
q
m
d
ck
e
g
f
b

que radicem C A, CE bis esse accipiendam, & constructionem inservire æquationi quarti gradus $\overline{xx - x.\overline{a+b} + ab}^2 = o$. Verum quum radices binæ, & binæ æquales sint, nemo non videt, eam propositæ etiam æqationi accomodari.

3. Verumtamen si $b > a$, parabola F A F caderet extra circulum; quare præter punctum contactus exhibens radicem $CA = a$, nullum habeo punctum sectionis. Si ex hoc deducerem, æquationem nulla alia radice reali ornatam esse, nonne laberer in manifestum paralogismum? Difficultas augeretur magis magisque, si assumerem circulum, cujus radius esset utraque radice minor, ut caussa exempli $xx = \frac{aa}{4} - yy$, quia peracta substitutione proveniret $\frac{aa}{4} - yy - x.\overline{a+b} + ab = o$, aut $\overline{a+b}.\overline{\frac{\frac{aa}{4}+ab}{a+b} - x} = yy$. Radio $CA = \frac{a}{2}$ descripto circulo D A D (*Fig.* 2), producatur C A in B, ut $CB = \frac{\frac{aa}{4}+ab}{a+b}$, quæ est minor non solum b, sed etiam a. Parametro $= a+b$, vertice B describatur parabola, quæ nusquam circulum secabit. Si ex hoc intersectionum defectu colligerem, æquationem propositam habere ambas radices imaginarias, nonne longissime a veritate aberrarem?

4. Ab æquatione secundi gradus transeo ad æquationem quarti, nempe $x^4 - bx^3 - 4bbx^2 - 4b^3x + 16b^4 = o$, quæ gaudet sine dubio duabus radicibus realibus æqualibus, id est $x = 2b$. Ut constructionem obtineam, hoc modo dispono formulam $\frac{4bb-xx}{2b-x} - \frac{xx.\overline{2b-x}}{xx+2bx-8bb} = o$. Pono $\frac{4bb-xx}{2b-x} = -y$, ex qua suppositione oriuntur æquationes duæ I. $\frac{4bb-xx}{2b-x} + y = o$

II. $\frac{xx.\overline{2b-x}}{xx+2bx-8bb} + y = o$. Ex secunda oritur

III. $xx - \overline{2b + \frac{xx-4bb}{2b-x}}.y = o$. Huic addo primam multiplicatam per y, & invenio IV. $xx - 2by + yy = o$. Huic addo primam multiplicatam per $2b - x$, & oritur V. $4bb - xy + yy = o$. Æquationes duæ quarta, & quinta sunt ad sectiones conicas, prima ad circulum, secunda ad hyperbolam. Constructio ita perficitur.

5. Rectus angulus effectus a lineis A K, A B bifariam dividatur a recta A C. Secetur $AB = 2b$, & eidem normalis agatur B C (*Fig.* 3), producaturque donec $CD = CB = AB = 2b$. Inter assymptota A K, A C delineetur hyperbola transiens per punctum D, erunt A K, K H, coordinatæ x, y æquationis quintæ. Super diametrum A B describamus circulum A F B, & in rectis A G, G F habebimus coordinatas x, y æquationis quartæ. Tametsi curvæ istæ duæ nusquam se intersecent; tamen constat, in proposita æquatione inesse duas radices

dices reales ambas $= 2b$. Igitur defectus punctorum intersectionis non praebet tutum argumentum affirmandi radices esse imaginarias.

6. Quandoquidem methodus intersectionis curvarum est omnium maxime universalis, & saepe etiam unica ad determinandas aequationum reales radices, oportet eam liberare ab hac fallacia, quae ad falsissima consectaria posset perducere. Quamobrem animum advertamus ad methodum, qua determinamus puncta intersectionis in curvis, quibus eadem est abscissa. Si eadem abscissa accepta ordinatae, quae in duas curvas desinunt, inaequales sunt, patet, ibi non adesse curvarum intersectionem; at punctum intersectionis habebitur, si ordinatae reperiantur aequales: igitur ab aequalitate ordinatarum, quae ad eamdem abscissam referuntur, colligitur curvarum intersectio. Hinc spectantes in utraque aequatione y tamquam aequales, invenimus aequationem determinatam eliminata y, atque per radices reales hujus aequationis curvarum intersectiones definimus.

7. Verumtamen sola aequalitas ordinatarum non sufficit probandae curvarum intersectioni. Etenim aequalitas potest intercedere non minus inter duas ordinatas reales, quam inter duas imaginarias. Si vero hoc contingat, nulla existit intersectio realis, sed quaedam, quam vocare possumus intersectionem imaginariam, quamque praebere non possunt rami curvarum, qui delineantur. Quae quum ita sint ad statuendum, utrum curvae reapse se intersecent, duo sunt examinanda; primum utrum adsint abscissae, quibus ordinatae aequales respondeant, deinde utrum ordinatae istae aequales sint reales. Si ambae conditiones istae conjungantur, tuto pronunciemus, intersecare se curvas: si vero posita prima conditione deficiat altera, intersectiones non habemus, nisi imaginarias.

8. Ad primam conditionem obtinendam satis est, in duabus aequationibus indeterminatis spectare y tamquam unam eamdemque quantitatem, tum ejecta eadem y devenire ad aequationem determinatam, quae solam x contineat. Etenim accepta abscissa aequali radici hujus aequationis, ordinatae duae duarum curvarum sine dubio aequabuntur. Valores imaginarii abscissae x non possunt sufficere, nisi intersectiones imaginarias, quare omittendi sunt. Valores reales praebent saepe intersectiones reales, at non semper, quia saepe duae ordinatae aequales proveniunt imaginariae. Ut a dubitatione liberemur, oportet substituere in duabus aequationibus indeterminatis valorem x; tum invenire duarum y valores, demum inspicere, utrum illi, qui aequantur, reales sint, an imaginarii.

9. Sed quum haec methodus plerumque regulis analyticis prorsus destituatur, & quum supponat resolutionem aequationum, quam per intersectionem curvarum inquirimus, danda est opera, ut alia ratione certo cognoscamus, quibus nam in casibus nequeant, quibusnam possint ordinatae aequales esse imaginariae. Hanc ob rem locos partiemur in diversas classes, & de singulis ordinatim agemus. Sint primum loci duo primi gradus, quorum aequationes sint

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+C=o \\ ax+by+c=o \end{array}\right\}$$

In his adverto, fieri non posse ut ordinatae duae, ubi aequantur, sint imaginariae, quia quicumque sit valor realis abscissae x, positus in utraque aequatione, praebet unicum valorem y realem. Quare ad obtinenda puncta, ubi loci se intersecant, satis erit, expellere y. quod hac methodo obtinetur. Deducatur secunda aequatio multiplicata per B a prima ducta in b, ut proveniat $\overline{Ab-Ba}.x+Cb-Bc=o$, sive $x=\frac{Bc-Cb}{Ab-Ba}$. Si fractionis numerator nullus sit, intersectio initio abscissarum

rum

rum respondet: si nullus sit denominator, intersectio in infinitum respondet: si nullus sit & numerator, & denominator, loci duo coincidunt, & propterea ubique erunt æquales ordinatæ. Quapropter methodus construendi æquationes primi gradus per duas lineas rectas, aut per duos locos primi gradus, nulli obnoxia est difficultati.

10. Transeo ad duos locos alterum primi gradus, alterum secundi. Ut breviorem efficiam calculum, assumo species P, p, Q, q datas per x, & constantes. In ultimis Q, q species x linearem solum tenet dimensionem; in primis P, p potest ascendere ad potestatem quadraticam. Æquatio ad lineam rectam sit
I. $Q + Ay = o$. Æquatio ad sectionem conicam sit

II. $p + qy + ay^2 = o$. Quicumque sit valor x, qui in prima æquatione substituatur, valor unicus y non potest non prodire realis; igitur accidere non potest, ut eidem x reali respondeant in duobus locis duæ ordinatæ imaginariæ æquales. Ut calculus perficiatur, multiplicetur per y æquatio prima.

III. $Qy + Ay^2 = o$. Ex secunda ducta in A deme tertiam multiplicatam per a
IV. $Ap + \overline{Aq - aQ}.y = o$. Duo casus oriri possunt. Primum ut $Aq - aQ = o$, atque in hoc statim obtinetur æquatio determinata $Ap = o$, seu $p = o$. In alio casu, ubi locum non habet præmissa æqualitas, æquatio instituatur inter duos valores y, qui habentur ex prima, & ex quarta æquatione, ut resultet
$\frac{Q}{A} = \frac{Ap}{Aq - aQ}$; sive $AQq - aQ^2 = A^2p$. Si æquatio determinata, ad quam pervenimus, sit primi gradus, x prædita erit uno tantum valore reali, & unum tantum habebitur punctum intersectionis. Si vero æquatio sit secundi gradus, resolvenda est, & inveniendæ radices duæ. Si hæ reales sint, duas designabunt intersectiones reales; si radices sint imaginariæ, nullæ erunt intersectiones nisi imaginariæ. Quamobrem tutissima est methodus construendi æquationem secundi gradus per lineam rectam, & circulum, aut quamcumque aliam sectionem conicam.

11. Idem pronunciare non possumus de duobus locis secundi gradus. Primum loci sint ejusmodi, ut in eorum æquationibus adsit terminus yy, non autem y, & æquationes ita exprimantur

$P + Ay^2 = o$ | Ex prima multiplicata per a detrahe secundam ductam in A, ut
$p + ay^2 = o$ | statim prodeat æquatio determinata $aP - Ap = o$, quæ ad summum erit secundi gradus. Si hujus æquationis radices sint imaginariæ, nullæ existunt intersectiones nisi imaginariæ. Sed si radices reales sint, non potes inde deducere, existere intersectiones reales. Etenim substituta pro x ejus radice in altera ex æquationibus primitivis, æquatio determinata continens yy est secundi gradus; igitur valor x potest esse & realis, & imaginarius. Si realis est, intersectio realis habebitur, sed si imaginarius est, intersectio nulla, nisi imaginaria. Hoc usuvenit in primo exemplo proposito. Idem dicas velim, si in duabus æquationibus indeterminatis adsit etiam terminus y, sed ita, ut evanescente yy ipse quoque evanescat, quia eadem ratio locum habet. Quapropter admodum caute opus est uti methodo construendi æquationes secundi gradus per intersectionem duorum circulorum, aut duarum quarumcumque sectionum conicarum; nam accidere posset, ut æquatio ornata esset duabus radicibus realibus, tametsi curvæ usurpatæ nusquam se secarent.

12. Ac-

12. Accedo ad duos locos, in quorum æquationibus præter terminum yy exiſtat ita terminus y, ut deſtructo yy ipſe non deſtruatur. Porro æquationes ſunt

I. $P + Qy + Ay^2 = o$	Ex prima multiplicata per a demo ſecundam mul-
II. $p + qy + ay^2 = o$	tiplicatam per A, ut oriatur

III. $aP - Ap + \overline{aQ - Aq}.y = o$. Quum in hac y primam dimenſionem teneat, fieri nequit, ut, ſubſtituto quolibet valore reali x, y evadat imaginaria. Hinc videtur tuto colligi poſſe, ordinatas æquales non poſſe eſſe imaginarias, atque adeo interſectionem ſemper eſſe realem. Sed ab aſſenſu nimis fortaſſe præcipiti cohibeamus, & calculum producamus. Diviſa æquatione tertia per $aQ - Aq$, oritur

IV. $\frac{aP - Ap}{aQ - Aq} + y = o$. Hanc multiplicatam per y deduco a prima diviſa per A, & obtineo

V. $\frac{P}{A} + \overline{\frac{Q}{A} + \frac{Ap - aP}{aQ - Aq}}.y = o$, aut

VI. $P.\overline{aQ - Aq} + \overline{aQ^2 - AQq + A^2p - AaP}.y = o$.

13. Evenire poteſt, ut $Ap - aP$ ſit diviſibilis per $aQ - Aq$; factaque diviſione ponamus, quotientem eſſe $Mx + N$. In hoc caſu æquatio tertia, & ſexta præditæ erunt communi multiplicatore $aQ - Aq$, quare ambæ veræ ſunt, ſi $aQ - Aq = o$, quæ eſt æquatio gradus primi præbens ſemper valorem realem quantitatis x. Verum huic valori reſpondebit ne una, aut duæ interſectiones reales? Valor iſte collocetur in æquatione prima, aut ſecunda, & reſolvatur æquatio ſecundi gradus. Si valores y prodeant reales, interſectiones reales erunt; ſi vero valores y prodeant imaginarii, nulla interſectio realis, ſed ambæ imaginariæ. Facta diviſione in æquatione tertia, & ſexta, proveniunt duæ

VII. $Mx + N + y = o$	in quibus, quicumque ſit valor x,
VIII. $P + \overline{Q + AMx + AN}.y = o$	invenitur y ſemper realis; igitur in-

terſectio realis exiſtit. Utentes duabus ultimis æquationibus excludamus y, ut oriatur $P + \overline{Q + AMx + AN}.\overline{-Mx - N} = o$, quæ eſt æquatio ſecundi gradus. Itaque ſi hac reſoluta reales inveniantur duo x valores, habebuntur duæ interſectiones reales; at ſi valores x prodeant imaginarii, nulla interſectio realis obtinetur.

14. Ita evenit, ſi antequam ejiciamus y, æquationem quartam, & ſextam dividimus per $aQ - Aq$. Verum ſi diviſione non facta eliminemus y, naſcetur æquatio

$$\frac{aP - Ap}{aQ - Aq} = \frac{P.\overline{aQ - Aq}}{\overline{aQ^2 - AQq + A^2p - AaP}}, \text{ ſive}$$

IX. $\overline{aP - Ap}.\overline{aQ^2 - AQq + A^2p - AaP} = P.\overline{aQ - Aq}^2$, quæ eſt æquatio quarti gradus. Patet ex dictis num. 13, non omnem radicem realem hujus æquationis ſufficere interſectionem realem. Hæc æquatio quidem diviſibilis erit per $\overline{aQ - Aq}^2$, atque valor realis x ex hac natus poterit ſufficere ordinatas y, atque adeo interſectiones imaginarias. Hac de cauſſa in ſecundo exemplo propoſito nullæ ſunt reales interſectiones.

15. Ve-

15. Verumtamen nisi $Ap - aP$ sit divisibilis per $aQ - Aq$, æquatio tertia, & sexta, quienmqne sit x valor realis, præbebit ordinatæ y valorem realem, & propterea veram & realem interfectionem. Igitur æquationis nonæ, quæ est gradus quarti, quælibet radix realis suppeditabit veram duarum curvarum interfectionem, & quælibet radix imaginaria indicat, nullam adesse interfectionem realem, sed omnes imaginarias: item contra eurvarum interfectiones præbebunt radices reales æquationis nonæ, reliquis existentibus imaginariis. Si $aQ - Aq$ non contineret x, sed foret quantitas constans, nota, non habere locum easum divisoris comunis duarum æquationum, & posse nos tuto affirmare radices reales æquationis determinatæ, quæ oritur, præbere eurvarum interfectiones reales, & viee versa.

16. Postquam certum eriterium traditum est, per quod tuto in plerisque easibus pronuneiare possumus, tot esse interfectiones eurvarum, quot sunt radices æquationis determinatæ, demonstrandum est, in methodo capite superiori a nobis usurpata ad construendas æquationes tertii, & quarti gradus nullum esse paralogismi perieulum. Æquationem tertii gradus $x^3 + abx - af^2 = o$, resolvimus in duas ope substitutionis $xx = ay$, ex qua nascitur $yx + bx - ff = o$. In his duabus æquationibus quantitates multiplicantes y nullum habent divisorem communem, qui contineat x; igitur curvæ illis respondentes secabunt sese in tot punctis, quot sunt æquationis propositæ radices reales. Eadem ratio valet in æquatione prædita secundo termino $x^3 + ax^2 + abx - abf = o$, quæ resolvitur per substitutionem $x^2 + ax = ay$.

17. Æquatio quarti gradus $x^4 + fgx^2 + f^2bx - f^3c = o$ resolvitur per substitutionem $xx = fy$, ex qua nascitur $fyy + gx^2 + fbx - f^2c = o$. Multiplicetur prima per y, ut sit $x^2y - fy^2 = o$. Hæc addatur superiori, ut fiat $x^2y + gx^2 + fbx - f^2c = o$. Quoniam in hac y multiplicatur per x^2, in prima per f, perspicuum est, non habere locum casum divisoris communis, & cuilibet reali x realem y respondere, & numerum interfectionum æqualem esse numero radicum realicum æquationis propositæ.

18. Sed ob oculos positis æquationibus duabus

$xx - fy = o$	demamus primam multiplicatam per m a secunda,
$y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx - fc = o$	ut formulam generalem obtineamus.

$y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx + mfy - fc = o$. Nos constructionem adornamus tribuentes
$\quad - mx^2$

speciei m duos valores diversos, & construentes duas sectiones conicas, quas exhibent æquationes. Retenta specie m ad unum valorem indicandum, alterum vocemus $= n$, ut æquatio sit $y^2 + \frac{g}{f}x^2 + bx + nfy - fc = o$. Ab hac deme supe-
$\quad - nx^2$

riorem erit $\overline{m - n}.x^2 - fy.\overline{m - n} = o$, sive $x^2 - fy = o$. Hæc dividatur per f, & mul-

& multiplicetur per y, ut fiat $\frac{x^2 y}{f} - y^2 = 0$. Hæc uni ex duabus superioribus addatur, & nascetur $\overline{\frac{g}{f} - m} . x^2 + \overline{\frac{x^2}{f} + mf} . y + bx - fc = 0$. Quum in hac ultima y multiplicetur per $\frac{x^2}{f} + mf$, in altera, nempe $x^2 - fy = 0$, per solam f, locum habere non potest communis divisor; igitur numerus intersectionum æqualis erit numero radicum realium æquationis propositæ. Hoc modo per traditum criterium remanet probatum, tot esse in æquatione proposita radices reales, quot reales habentur in curvis intersectiones.

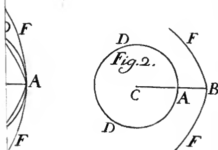
18. Ceterum eadem veritas in hunc quoque modum potest demonstrari: Quum in æquatione parabolæ $xx - fy = 0$, cuicumque valori reali abscissæ x respondeat valor unicus ordinatæ y, atque hic realis, manifestum est, parabolam conjunctam cum qualibet ex curvis, quæ oriuntur determinata pro libito specie m, habere ordinatam realem ibi etiam, ubi ordinatæ curvarum æquales sunt; igitur parabola reapse aliam sectionem conicam secat; igitur habetur intersectio realis. Quapropter infinitæ curvæ, quæ proveniunt ex diversis valoribus speciei m, dummodo ipsæ imaginariæ non sint, secantur reapse a parabola; igitur in eodem puncto sese invicem secant; ergo per ipsas tuta obtinetur propositæ æquationis constructio.

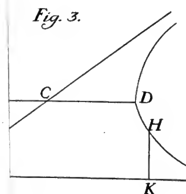
19. Eodem ratiocinio probares, remotam esse ab omni paralogismi periculo tum constructionem æquationis præditæ secundo termino, quam capite superiori dedimus num. 27; tum eam, quæ radices exhibet ope hyperbolæ inter asymptota, quam exhibuimus num. 28. Principia, quibus in præsens usi sumus, facem nobis preferent in posterum, quum altiores æquationes per altiorum curvarum intersectionem construendas curabimus.

CAPUT UNDECIMUM

De resolutione analytica æquationum tertii, & quarti gradus.

1. Utilissima est methodus a nobis hactenus tradita resolvendi æquationes tertii, & quarti gradus per intersectionem sectionum conicarum, quam licet veteres geometræ in problematum solutione non raro usurpaverint, tamen solent acceptam referre duobus Renatis Slusio, atque Cartesio. Verum hæc magis geometrica est, quam analytica, magisque inservit resolvendis quæstionibus geometricis, quam arithmeticis. Quapropter non est prætermittenda resolutio æquationum tertii, & quarti gradus, quam invenerunt Scipio Ferreus, & Ludovicus de Ferrariis, quum per illam æquationum radices formula algebraica exprimantur. Non sum nescius, aliquando æquationes tertii, & quarti gradus posse deprimi ad gradus inferiores adhibitis opportunis methodis, de quibus in præsentia non loquimur; loquemur deinceps in libro tertio, ubi agemus de æqua-


F
A
F
D
F
Fig. 2.
C
A
B
D
F


Fig. 3.
C
D
H
K

quationibus cujuscumque gradus, quæ ad gradum inferiorem perduci possunt. Quare methodus, quam modo tradimus, æquationibus illis erit applicanda, quæ nulla ratione deprimi possunt.

2. Quoniam sæpe quantitates reales ex imaginariarum multiplicatione oriuntur, accidit sæpe, ut radices quantitatum realium sint imaginariæ. Hoc evenit in duabus radicibus cubicis, & biquadraticis unitatis, quæ imaginariæ sunt, existentibus reliquis una, aut duabus realibus. Necessarium est, ut hoc demonstremus, & omnes unitatis radices tertias, & quartas, illas quoque quæ imaginariæ sunt, analytica formula exprimamus. Hanc ob rem statuo primum $x^3 - 1 = o$, cujus æquationis radix una $= 1$; igitur æquatio erit divisibilis per $x - 1$. Facta autem divisione provenit æquatio secundi gradus $xx + x + 1 = o$, quæ resoluta præbet radices duas imaginarias $x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. Quapropter tres radices cubicæ unitatis sunt 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

3. Simili methodo invenies unitatis radices biquadraticas. Statue æquationem $x^4 - 1 = o$, cujus æquationis duplex est radix realis, nempe 1, & -1; ergo æquatio erit divisibilis cum per $x - 1$, tum per $x + 1$, seu per $xx - 1$. Peracta divisione oritur $xx + 1 = o$, cujus radices duæ ambæ imaginariæ sunt $x = \sqrt{-1}$, $x = -\sqrt{-1}$; quatuor igitur sunt radices quartæ unitatis, nempe 1, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

4. His præmissis venio ad resolutionem æquationum tertii gradus, quas semper spectabo carentes secundo termino, quia ad hanc formam semper reduci possunt. Sit itaque æquatio generalis $x^3 - 3ax - b = o$, in qua a, b possunt esse quantitates datæ quæcumque positivæ, & negativæ. Pono $x = m + n$, quam elevo ad potestatem tertiam, ut fit

$x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 = m^3 + 3mn.\overline{m+n} + n^3$. Pro binomio $m+n$ substituo ei æqualem x, & omnes terminos transfero ad unam partem, ut fit $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = o$. cujus radix una est $x = m + n$. In hac æquatione unica conditio requiritur, nimirum, ut secundus terminus desit, quod semper licet obtinere. Confer æquationem inventam cum proposita, & habebis $mn = a$; $m^3 + n^3 = b$; ergo $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$, sive $m^6 - bm^3 = -a^3$, qua resoluta invenies

$m = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$. Eodem prorsus calculo determinabis

$n = \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}$.

5. Qualibet radix tertia tres valores habere potest. Hos ut inveniamus utamur tri-

 bus

bus radicibus unitatis, nimirum 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Quare si per signum radicale radix intelligatur, quæ harum primæ respondet, inveniemus

Valores m	Valores n
$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$	$\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$
$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$
$\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$

Novem modis hujuscemodi valores combinari possunt. Ut inutiles rejciamus, eos conjungemus dumtaxat, qui simul multiplicati præbent $+a$, cui vidimus æquare mn. Hoc criterio usurpato æquationis propositæ radices provenient hujusmodi.

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

6. Ut hoc clarius intelligas, fac advertas, novem radices, quæ resultant ex novem combinationibus valorum m, & n, convenire æquationi gradus noni, quæ quum sit resolubilis in tres gradus tertii, icirco fit, ut tres ex novem combinationibus præbeant radices nostræ æquationis tertii gradus. Ubi resolutionem tradidimus æquationum secundi gradus aliquid simile monuimus evenire. Ex tribus vero combinationibus illas elegimus, in quibus valores m, n simul multiplicati exhibent productum $=a$, quia propositæ terminus $-3ax$ respondet termino generalis $-3mnx$; unde sequitur, $mn=a$, & valores huic conditioni satisfacientes eos esse, ex quibus propositæ æquationis radices coalescunt.

7. Illud quoque vel maxime interest advertere, quod prima ex tribus inventis radicibus semper realis est; reliquæ autem duæ sunt imaginariæ si $\frac{bb}{4}>a^3$, & $\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}$ sit realis; sunt autem ambæ reales, si aut $\frac{bb}{4}=a^3$, & $\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}=0$, aut $\frac{bb}{4}<a^3$, & $\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}$ imaginaria. Ut hoc demonstrem duplici methodo utar, nempe intersectionis conicarum sectionum, & transmutationis radicum in series. Ordior ab intersectione curvarum.

8. Ob oculos iterum tibi pone æquationem $x^3-3ax-b=0$; fac $fy=x^2$, ut

ut oriatur $yx - \frac{3a}{f}.x - \frac{b}{f} = o$; denuo statue $y - \frac{3a}{f} = u$, ut proveniat $ux = \frac{b}{f}$. Inter assymptota FF, II (*F.1*) describe hyperbolam rectanguli $\frac{b}{f}$. Positis $CP = x$, erunt $PM = CO = u$. Seca $CA = \frac{3a}{f}$, & per A duc AQ parallelam CI, erunt $AO = MQ = u + \frac{3a}{f} = y$, existentibus $AQ = x$. Vertice A, axe AF, parametro $= f$, describe parabolam AM. Rectæ $AQ = OM$ respondentes punctis intersectionis parabolæ, & hyperbolæ erunt propositæ æquationis radices; quare si tres fuerint intersectiones, tres erunt radices reales, si unica intersectio, una erit solummodo radix realis; reliquæ duæ imaginariæ. Pone primum $a^3 = \frac{bb}{4}$, ut fit $\frac{2a}{f}.\sqrt{a} = \frac{b}{f}$, seu $\sqrt{a} = \frac{f}{2a}.\frac{b}{f}$; atqui secta $A2O = \frac{a}{4}$, ut fit $C2O = \frac{2a}{f}$, ordinata parabolæ respondens puncto $2O = \sqrt{a}$, & ordinata hyperbolæ $= \frac{f}{2a}.\frac{b}{f}$; ergo ordinata parabolæ æqualis est ordinatæ hyperbolæ, & punctum 2M commune est utrique curvæ. Præterea demonstravimus supra, ubi de constructione æquationum tertii gradus, punctum 2M in facta hypotesi esse punctum, in quo curvæ sese contingunt; quare in hoc casu punctum 2M duos dabit valores x æquales, & reales, unum inæqualem punctum M. Si ponas $a^3 > \frac{bb}{4}$, erit etiam $\sqrt{a} > \frac{f}{2a}.\frac{b}{f}$: quare parabola secabit ramum hyperbolæ in duobus punctis; habebuntur igitur in hoc casu tres intersectiones, & tres radices reales. Demum si statuas $a^3 < \frac{bb}{4}$, erit $\sqrt{a} < \frac{f}{2a}.\frac{b}{f}$, & ramus I2M non secabitur a parabola, quare unica erit intersectio in M, & unica radix realis: quod erat demonstrandum.

9. Eamdem veritatem demonstraturo per serierum methodum oportet convertere in seriem valores m, n. Pone facilitatis caussa $\frac{b}{2} = p$, $\frac{bb}{4} - a^3 = q$, quæ quantitas erit negativa si $a^3 > \frac{bb}{4}$, erit $m = \sqrt[3]{p + \sqrt{q}}$, & $n = \sqrt[3]{p - \sqrt{q}}$. Si utaris methodo, quam tradidimus in libro primo, ad convertendas in series radices cubicas, invenies

$$m = p^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}\sqrt{q} - \frac{1}{9}p^{-\frac{5}{3}}q + \frac{5}{81}p^{-\frac{8}{3}}q\sqrt{q} - \frac{10}{243}p^{-\frac{11}{3}}q^2$$
$$+ \frac{22}{1215}p^{-\frac{14}{3}}q^2\sqrt{q} \text{ \&c.}$$
$$n = p^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}\sqrt{q} - \frac{1}{9}p^{-\frac{5}{3}}q - \frac{5}{81}p^{-\frac{8}{3}}q\sqrt{q} - \frac{10}{243}p^{-\frac{11}{3}}q^2$$

$-\frac{22}{1215}p^{-\frac{14}{3}}q^2\sqrt{q}$ &c. In duabus hisce seriebus fac advertas terminos continentes $\sqrt{q}$ affectos esse signis diversis, reliquos iisdem. Quare in omni casu si earum summam accipias, habebis

$m+n=2p^{\frac{1}{3}}-\frac{2}{9}p^{-\frac{5}{3}}q-\frac{20}{243}p^{-\frac{11}{3}}q^2$ &c., quæ vel q sit positiva, vel negativa, nihil continet imaginarii, quia omnis $\sqrt{q}$ ejecta est. Igitur in æquationibus prima radix expressa per $m+n$ semper est realis.

10. Venio ad secundam radicem, quæ exprimitur per

$m.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+n.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-n}{2}+\frac{m-n.\sqrt{-3}}{2}$. Quantum spectat ad partem primam $-\frac{m-n}{2}$, hæc, ut docet numerus superior, semper realis est. Quantum pertinet ad alteram, dempta secunda serie ex prima, & divisa differentia per 2, invenies

$\frac{m-n}{2}=\frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}\sqrt{q}+\frac{5}{81}p^{-\frac{8}{3}}q\sqrt{q}+\frac{22}{1215}p^{-\frac{14}{3}}q^2\sqrt{q}$ &c. a qua omnes termini carentes $\sqrt{q}$ expulsi sunt, & illi omnes remanent, in quibus apparet. Ergo $\frac{m-n}{2}.\sqrt{-3}$ realis vel imaginaria erit, prout $\sqrt{q}$ ducta in $\sqrt{-3}$ est realis, vel imaginaria; atqui $\sqrt{q}.\sqrt{-3}$ est imaginaria, si q sit positiva, est realis, si q sit negativa; ergo existente q positiva $\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$ est imaginaria, existente q negativa realis est. Quapropter etiam secunda radix

$m.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+n.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ est realis, si q sit negativa, hoc est si $a^3>\frac{bb}{4}$; est imaginaria, si q sit positiva, hoc est si $\frac{bb}{4}>a^3$. Idem eademque methodo demonstrabis de tertia radice, quæ exprimitur per

$m.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+n.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Ad demonstrationem hanc efficiendam usus sum cum intersectione conicarum sectionum, tum seriebus, quia pro casu, ubi tres sint æquationis cubicæ radices reales, nulla detecta est methodus, per quam sine imaginariis radicum valores exhibeantur; atque hic est casus, qui vocatur irreducibilis, quique non leve negotium fecit veteribus analystis.

11. Ope æquationum tertii gradus, quas modo resolutas exhibui, resolvendas aggredior æquationes gradus quarti. Assumo formulam generalem carentem secundo termino, ad quam formam æquationes omnes reduci possunt; nempe $x^4+abxx+a^2cx+a^3d=o$. Species b, c, d possunt esse & positivæ, & negativæ, imo etiam $=o$, sed a, quæ supplet homogeneitatem terminorum semper

per positiva sumenda est. Præparo formulam hac ratione

$$x^4 + a.\overline{b+m}.x^2 + \frac{a^2.\overline{b+m}^2}{4} = amx^2 - a^2cx - a^3d + \frac{a^2.\overline{b+m}^2}{4} =$$

$$am.xx - \frac{ac}{m}x - \frac{a^2d}{m} + \frac{a.\overline{b+m}^2}{4m}.$$ Pars prima æquationis est quadratum completum, cujus radix extrahi potest. Ut in parte altera quantitas, quam am multiplicat, sit pariter quadratum completum, oportet, ut quadratum quantitatis $\frac{ac}{2m}$, quæ est coefficientis dimidium, sit æquale ultimo termino nimirum $-\frac{a^2d}{m} + \frac{a.\overline{b+m}^2}{4m}$.

12. Determinemus valorem m ita, ut hanc conditionem adimpleat. Erit itaque $\frac{a^2c^2}{4.m^2} = -\frac{a^2d}{m} + \frac{a.\overline{b+m}^2}{4.m}$, quæ multiplicata per m, & divisa per a fit $\frac{ac^2}{4m} = -ad + \frac{\overline{b+m}^2}{4}$ sive $m^3 + 2bm^2 \begin{matrix} + bbm \\ - 4adm \end{matrix} - ac^2 = 0$. Invenimus itaque m per æquationem tertii gradus, quæ resoluta sufficit unam saltem radicem realem.

13. Supponentes determinatum valorem m, extrahamus radices in æquatione quarti gradus jam præparata. Inveniemus $x^2 + \frac{a.\overline{b+m}}{2} = \pm\sqrt{am}.\overline{x - \frac{ac}{2m}}$; ergo $x^2 + x\sqrt{am} \pm \frac{ac\sqrt{a}}{2\sqrt{m}} + \frac{a.\overline{b+m}}{2} = 0$; quæ formula involvens signorum ambiguitatem, complectitur duo trinomia secundi gradus, in quæ æquatio quarti est resolubilis. Resolutis porro duobus trinomiis inveniemus quatuor radices æquationis quarti gradus.

14. Methodus hæc offert mihi rationem facilem, & elegantem demonstrandi, æquationes omnes quarti gradus resolvi posse in duo trinomia realia, tametsi earum radices quatuor omnes sint imaginariæ. Ob hanc rem adverto, trinomia duo inventa realia esse, si quantitas m sit positiva, involvere imaginaria, si m sit negativa. Tres sunt valores m, quos exhibet resolutio æquationis cubicæ. Itaque ad habenda duo trinomia realia sufficit, ut unus ex tribus valoribus m sit realis, & positivus. Ajo autem unum ex valoribus m semper esse hujusmodi. Quod ut probem, redeo ad æquationem tertii gradus; a qua dependent valores isti. Hæc æquatio ordinata, ut mos est, præditta est ultimo termino affecto semper signo —, quia a supponitur positiva, & quadratum cc semper est positivum, licet c fuerit negativa; atqui omnis æquatio cubica, cujus ultimus terminus sit negativus, habet radicem unam realem & positivam, ut

mox.

mox probabo; ergo una saltem ex radicibus nostræ æquationis erit positiva; atque adeo in omni casu obtinemus valorem m positivum.

15. Probemus modo, æquationem omnem tertii gradus, cujus terminus ultimus est negativus, præditam esse saltem una radice positiva. Radices tres æquationis cubicæ aut omnes sunt reales, aut una realis, & duæ imaginariæ. In primo casu affirmo, radices tres reales non posse esse omnes negativas, si negativus sit ultimus terminus æquationis. Sint enim, si fieri potest, negativæ omnes, nimirum $x = -A$; $x = -B$, $x = -C$; ergo habebimus tria binomia $x + A$, $x + B$, $x + C$, quæ simul multiplicata præbent formulam tertii gradus; atqui binomiorum multiplicatio præbet ultimum terminum $+ ABC$, qui positivus est, neque æquare potest quantitatem negativam; ergo si ultimus terminus negativus est, fieri non potest, ut tres radices omnes sint negativæ, sed erunt vel omnes positivæ, vel una positiva, & duæ negativæ.

16. In altero casu, ubi duæ radices sunt imaginariæ, affirmo radicem realem positivam esse. Si enim potest esse negativa, sit $m = -A$; ergo formula tertii gradus erit divisibilis per binomium $m + A$; facta autem divisione proveniet formula secundi gradus hujus formæ $mm + Bm + C = o$. In hac, quum duæ radices sint imaginariæ, quantitas C sit oportet positiva, quia æquatio secundi gradus, cui ultimus terminus sit negativus, nequit habere radices imaginarias. Atqui æquatio hæc secundi gradus ducta in binomium $m + A$, quæ debet formulam tertii gradus restituere, præbet ultimum terminum $+ AC$, qui est positivus, nec potest quantitatem negativam æquare; ergo fieri non potest, ut radix realis nostræ æquationis sit negativa. Q. E. D.

17. In unico casu nostrorum trinomiorum formula videtur deficere, quum scilicet $m = o$, quod evenit, quotiescumque $c = o$, quia in ultimo termino provenit fractio $\frac{o}{o}$, cujus ignotus est valor. Sed in hoc casu æquatio resolvitur ad modum æquationis quadraticæ. Nihilo tamen minus præsens quoque methodus cum artificio usurpata determinat valorem fractionis $\frac{c}{\sqrt{m}}$, qui finitus est. Advoca æquationem tertii gradus $m^3 + 2bm^2 \begin{matrix} + bbm \\ - 4adm \end{matrix} - ac^2 = o$. Si $m = o$ perspicuum est duos primos terminos, ubi adest m^3, m^2, evanescere, si comparentur cum tertio; ergo remanebit $\overline{bb - 4ad}.m = ac^2$; ergo $\frac{\sqrt{bb - 4ad}}{\sqrt{a}} = \frac{c}{\sqrt{m}}$, qui valor in trinomiorum formula collocatus exhibebit $xx \pm \frac{a\sqrt{bb - 4ad}}{2} + \frac{ab}{2} = o$.

18. Reliqui duo valores m, in hypothesi $c = o$, obtinentur resoluta æquatione $mm + 2bm + bb - 4ad = o$, inveniuntur autem $m = -b + 2\sqrt{ad}$, $m = -b - 2\sqrt{ad}$, qui positi in trinomiis præbent $x^2 \pm \sqrt{-ab + 2a\sqrt{ad}}.x + a\sqrt{ad}$, $x^2 \pm \sqrt{-ab - 2a\sqrt{ad}}.x - a\sqrt{ad}$. Si d aut negativa est, aut positiva sed minor $\frac{bb}{4a}$, trinomia N. 17 sunt realia. Verum si, posita d positiva, $4ad > bb$, in hoc numero habes trinomia realia.

19. Quo-

19. Quoniam demonstratum est, omnes æquationes quarti gradus resolvi posse in duo trinomia realia gradus secundi; evidens est, omnes radices imaginarias quarti gradus exprimi posse per imaginarias radices secundi gradus. Nam pone radices imaginarias quarti gradus $=x$; tum bis eleva ad potestatem quadraticam, ita, ut radices expellantur. Orietur formula quarti gradus, quæ resolvi potest in duo trinomia secundi gradus realia. Horum autem trinomiorum resolutio præbebit radices hujus formæ $p+q\sqrt{-1}$, existentibus p, q quantitatibus realibus.

20. Unum, aut alterum exemplum proponamus, ac primum in radice quarta quantitatis -1. Fac $x=\sqrt[4]{-1}$; eleva bis ad quadratum, ut habeas $x^4=-1$, sive $x^4+1=0$. Trinomia realia in quæ hæc æquatio resolvitur, sunt hæc $xx\mp x\sqrt{2}+1=0$, eorumque quatuor radices prodeunt $\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, quæ non continent, nisi radices imaginarias gradus secundi.

21. Exemplum alterum sit in $\sqrt{1+\sqrt{-1}}$, quæ, quum sit radix secunda radicis secundæ, æquivalet quartæ. Pone $x=\sqrt{1+\sqrt{-1}}$, eleva ad secundam potestatem $x^2=1+\sqrt{-1}$, seu translatis terminis $x^2-1=\sqrt{-1}$; iterum quadra, ut oriatur $x^4-2x^2+1=-1$, vel $x^4-2x^2+2=0$. Ut hæc resolvatur in trinomia realia, oportet ea sumere, quæ spectant ad hypothesim $c=0$. Facto autem $b=-2$, $d=2$, factores reales oriuntur $x^2\mp x\sqrt{2+2\sqrt{2}}+\sqrt{2}=0$, quibus resolutis sese offerunt quatuor radices, quæ non continent, nisi radices imaginarias secundi, nimirum $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}.\sqrt{-1}$,

$-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}.\sqrt{-1}$,

$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}-\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}.\sqrt{-1}$,

$-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}-\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}.\sqrt{-1}$. Hic autem modus exprimendi imaginaria per $\sqrt{-1}$ sæpe maximam affert utilitatem.

22. Unicum problema arithmeticum per methodos hic traditas resolvamus. Invenire tres numeros in continua arithmetica proportione, quorum differentia data sit, simul cum solido ab eorum multiplicatione producto. Data differentia $=d$, datum solidum $=s$; medius numerus $=y$, erit minimus $=y-d$, & maximus $=y+d$; ergo eorum productum $y^3-ddy=s$, seu $y^3-ddy-s=0$. Quare resoluta æquatione inveniemus $y=\sqrt[3]{\frac{s}{2}+\sqrt{\frac{ss}{4}-\frac{d^6}{27}}}$ +

$+\sqrt[3]{\frac{s}{2}-\sqrt{\frac{ss}{4}-\frac{d^3}{27}}}$. Pone $s=28$, $d=3$, invenies $y=\sqrt[3]{14+\sqrt{190-27}}$ $+\sqrt[3]{14-\sqrt{196-27}}=\sqrt[3]{14+\sqrt{109}}+\sqrt[3]{14-\sqrt{169}}=\sqrt[3]{14+13}$ $+\sqrt[3]{14-13}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}=3+1=4$. Numeri itaque quæsiti sunt 1, 4, 7. Reliquæ duæ solutiones in hoc casu sunt imaginariæ. Pone $s=6$, $d=1$, invenies $y=\sqrt[3]{3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}+\sqrt[3]{3-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}=1+\sqrt{\frac{2}{3}}+1-\sqrt{\frac{2}{3}}=2$. Numeri ergo quæsiti erunt 1, 2, 3. Reliquæ solutiones in casu hoc imaginariæ sunt. Demum ponamus $s=\frac{190}{27}$, & $d=3$, fiet

$$x=\sqrt[3]{\frac{95}{3^3}+\frac{73}{3^3}\sqrt{-2}}+\sqrt[3]{\frac{95}{3^3}-\frac{73}{3^3}\sqrt{-2}}=\frac{5+\sqrt{-2}}{3}+\frac{5-\sqrt{-2}}{3}=\frac{10}{3}.$$

Quapropter numeri quæsiti erunt $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{19}{3}$. Reliquæ duæ radices licet non sint rationales, tamen sunt in hoc casu reales. Sunt autem

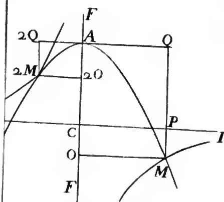
$$x=\frac{5+\sqrt{-2}}{3}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\frac{5-\sqrt{-2}}{3}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$x=\frac{5+\sqrt{-2}}{3}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\frac{5-\sqrt{-2}}{3}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$$; quarum prima dat $x=\frac{-5-\sqrt{6}}{3}$, altera $x=\frac{-5+\sqrt{6}}{3}$. Quare numeri satisfacientes problemati erunt hujusmodi $\frac{-14\mp\sqrt{6}}{3}$, $\frac{-5\mp\sqrt{6}}{3}$, $\frac{+4\mp\sqrt{6}}{3}$.

CAPUT DUODECIMUM.

Per sinus, & cosinus circulares, & hyperbolicos construuntur formulæ, quæ inventæ sunt in resolutione æquationum tertii gradus,

ANalogia, quæ maxima intercedit inter circulum, & hyperbolam æquilateram, commovit Vincentium Riccatum, ut in opusculorum tomo primo op. quarto, parte secunda & spectaret, & in usum non contemnendum traduceret sinus, & cosinus hyperbolicos non minus quam circulares, qui jamdiu in geometria locum occupant. Principia calculi sinuum, & cosinuum circularium libro superiori a nobis sunt explicata; nunc tradenda ea, quæ pertinent ad hyperbolicos, postquam hyperbolæ proprietates patefactæ sunt; tum theoria omnis ulterius promovenda, & applicanda constructioni formularum, quæ oriuntur ex reso-


Cap. XI. Lib. II. Tab. pag. 216
F
2Q
A
Q
2M
2O
P
C
I
O
M
F

resolutione æquationum tertii gradus. Ordo jubet, nos discedere aliquantum ab auctoris methodo, qui utitur proprietatibus areæ hyperbolicæ, de quibus in secundo solum tomo verba faciemus. Quare his nondum cognitis dabimus operam, ut in hunc modum suppleamus.

1. Hyperbola æquilatera AEFN (*Fig.* 1.) habeat centrum C, semiaxem primum CA, unum ex assymptotis CQ, quod facit cum axe angulum semirectum. Ex vertice A demittatur in assymptotum perpendicularis AK, sumptoque pro primo termino CK, pro secundo qualibet CG, formetur series linearum, quæ sint in continua proportione geometrica, CK, CG, CH, CP &c., quas ut usum communem loquendi servemus, vocabimus numeros. Deinde formetur series quantitatum, quæ sint in continua arithmetica proportione; hæc series habeat primum terminum $= o$, secundus autem sit quantitas qualibet $= \mu$, ut sit o, μ, 2μ, 3μ &c. Hujus termini dicantur numerorum logarithmi; quare o erit logarithmus CK, μ logarithmus CG, 2μ logarithmus GH, atque ita deinceps. Existente numeri CG logarithmo $= \mu$, quilque videt, $m\mu$ fore logarithmum $\overline{m+1}^{\,sima}$ proportionalis post CK, CG, & $\frac{1}{m}\mu$ esse logarithmum primæ ex mediis proportionalibus numero $m-1$ inter CK, CG, imo generalius $\frac{n}{m}\mu$ erit logarithmus n^{esima} ex mediis proportionalibus numero $m-1$ inter easdem CK, CG. Præterea sit μ logarithmus CG, & ν logarithmus CH, erit $\mu+\nu$ logarithmus quartæ proportionalis post CK, CG, CH.

2. His præmissis, quæ dilucide fluunt ex proprietatibus serierum geometricæ, & arithmeticæ, semiaxis CA dicatur sinus totus, & vocetur $= r$, & facto numeri CG logarithmo $= \mu$, agatur GE normalis assymptoto, tum EB normalis primo axi, recta CB dicetur cosinus logarithmi μ, & BE ejus sinus. Ut hos sinus, & cosinus hyperbolicos designemus, utemur notis Sb, Cb; unde $Sb.\mu$ exprimet sinum logarithmi $= \mu$; & $Cb.\mu$ exprimet cosinum. Logarithmi $= o$ cosinus $= r$, sinus $= o$; crescentibus logarithmis crescunt sinus, & cosinus in infinitum. Logarithmi qui respondent numeris minoribus CK, negativi sunt, & cosinus habent positivos, sinus negativos. Si numero CG respondeat logarithmus μ, tum fiat CG:CK::CK:CR, numero CR respondebit logarithmus $-\mu$. Normalis assymptoto agatur RS, quæ semiaxem secat in V, & GE; jungatur SE; ajo hanc axi esse normalem. Producatur SE usque ad assymptotum in I. Triangulorum IGE, IRS similitudo præbet
IG:IR::GE:RS, sive :: GR:CG, & dividendo
IG:RG::CR:RG: ergo IG = CR. Præterea
CR:CK::RV:AK: sed CR:CK::CK:CG::GE:AK igitur
RV:AK::GE:AK, ergo RV = GE; ergo triangula rectangula CRV, IGE æqualia sunt quoad omnia; igitur angulus EIG = VCR; sed VCR est semirectus; ergo CBI rectus. Q.E.D. Post hanc demonstrationem evidens est $Cb.\mu = Cb.-\mu$, quum uterque æquet CB; at $Sb-\mu = -Sb.\mu$, quum $Sb.\mu = BE$, & $Sb-\mu = BS$, qui licet sint æquales tamen unus positivus est, negativus alter.

3. Nunc vero sinuum, & cosinuum proprietates persequamur. Primum datis duorum logarithmorum μ, ν sinibus, & cosinibus, quæratur sinus, & cosinus logarithmi $\mu+\nu$. Sit $CB = Cb.\mu$, $BE = Sb.\mu$, $CD = Cb.\nu$,

$DF=Sb.\nu$. Supponatur $CM=Cb.\overline{\mu+\nu}$, & $MN=Sb.\overline{\mu+\nu}$. BE, DF MN producantur usque ad assymptotum in punctis I, L, Q. Ex punctis E, F, N agantur assymptoto normales EG, FH, NP. Quoniam propter angulum semirectum ACK est $BI=CB$, $DL=CD$, $MQ=CM$, constat fore $EI=Cb.\mu-Sb.\mu$, $FL=Cb.\nu-Sb.\nu$, $NQ=Cb.\overline{\mu+\nu}-Sb.\overline{\mu+\nu}$. Deinde quando $CA=r$, erit $CK=\frac{r}{\sqrt{2}}$; item $GI=\frac{Cb.\mu-Sb.\mu}{\sqrt{2}}$, $HL=\frac{Cb.\nu-Sb.\nu}{\sqrt{2}}$, $PQ=\frac{Cb.\overline{\mu+\nu}-Sb.\overline{\mu+\nu}}{\sqrt{2}}$. Postremo $CI=\sqrt{2}.Cb.\mu$, $CL=\sqrt{2}.Cb.\nu$, $CQ=\sqrt{2}.Cb.\overline{\mu+\nu}$. Quapropter $CG=\sqrt{2}.\,Cb.\mu\frac{-Cb.\mu+Sb.\mu}{\sqrt{2}}=\frac{Cb.\mu+Sb.\mu}{\sqrt{2}}$. Similiter

$CH=\frac{Cb.\nu+Sb.\nu}{\sqrt{2}}$, & $CP=\frac{Cb.\overline{\mu+\nu}+Sb.\overline{\mu+\nu}}{\sqrt{2}}$; atqui debet esse $CK:CG::CH:CP$: igitur

$\frac{r}{\sqrt{2}}:\frac{Cb.\mu+Sb.\mu}{\sqrt{2}}::\frac{Cb.\nu+Sb.\nu}{\sqrt{2}}.\frac{Cb.\overline{\mu+\nu}+Sb.\overline{\mu+\nu}}{\sqrt{2}}$, factoque transitu ad æqualitatem orietur $Cb.\overline{\mu+\nu}+Sb.\overline{\mu+\nu}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu+Sb.\nu}}{r}$.

4. Invento hoc primo theoremate aliud nanciscemur ope æquationis localis hyperbolæ, nempe $Cb^2-Sb^2=rr$; ergo $\overline{Cb+Sb}.\overline{Cb-Sb}=rr$, sive $Cb+Sb=\frac{rr}{Cb-Sb}$. Quare valoribus substitutis habebimus

$$\frac{rr}{Cb.\overline{\mu+\nu}-Sb.\overline{\mu+\nu}}=\frac{r^3}{\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu-Sb.\nu}},$$ sive

$Cb.\overline{\mu+\nu}-Sb.\overline{\mu+\nu}=\frac{\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu-Sb.\nu}}{r}$; quod est theorema alterum.

5. Si secundi theorematis formulam primum addas, deinde subducas a formula theorematis primi, obtinebis

$$Cb.\overline{\mu+\nu}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu+Sb.\nu}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu-Sb.\nu}}{2r}=\frac{Cb.\mu.Cb.\nu+Sb.\mu.Sb.\nu}{r}$$

$$Sb.\overline{\mu+\nu}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu+Sb.\nu}-\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu-Sb.\nu}}{2r}=\frac{Cb.\mu.Sb.\nu+Cb.\nu.Sb.\mu}{r}.$$

Q.E.I. Quod si quæras sinum, & cosinum diffe-

diffe-

differentiæ duorum logarithmorum μ, ν nempe $Cb.\overline{\mu-\nu}$, $Sb.\overline{\mu-\nu}$, eædem formulæ valebunt, dummodo pro $Cb.\nu$, $Sb.\nu$ ponas $Cb.-\nu$, $Sb.-\nu$. Verum ut valores habeas per datos $Cb.\nu$, $Sb.\nu$, adverte $Cb.-\nu = Cb.\nu$. $Sb.-\nu = -Sb\nu$. Quare nulla alia formulis mutatio facienda erit, nisi signum mutare $Sb.\nu$.

6. A finibus, & cofinibus hyperbolicis ad circulares redeamus. In circulo, cujus finus totus, feu radius $= r$, (*Fig.* 2.) capiatur arcus A E $= \mu$, & A F $= \nu$, tum arcus A N $=$ A E $+$ A F $= \mu + \nu$. Docuimus capite ultimo libri primi $Cc.\overline{\mu+\nu} = \frac{Cc.\mu.Cc.\nu - Sc.\mu\ Sc.\nu}{r}$, quæ reduci poteft ad hanc formam

$$Cc.\overline{\mu+\nu} = \frac{\overline{Cc\,\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc\,\nu+\sqrt{-1}.Sc.\nu}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu-\sqrt{-1}.Sc.\nu}}{2r}.$$

Item $Sc.\overline{\mu+\nu} = \frac{Sc.\mu.Cc.\nu + Cc.\mu.Sc.\nu}{r}$, quæ ita exprimatur

$$Sc.\overline{\mu+\nu} = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu+\sqrt{-1}.Sc.\nu}-(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu-\sqrt{-1}.Sc.\nu}}{2r.\sqrt{-1}}$$

Si hanc æquationem, quæ exhibet $Sc.\overline{\mu+\nu}$, multiplicatam per $\sqrt{-1}$ primum addas, deinde detrahas ab æquatione fuperiore prebente $Cc.\overline{\mu+\nu}$, duo hæc theoremata nancifceris

$$Cc.\overline{\mu+\nu}+\sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu} = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu+\sqrt{-1}.Sc.\nu}}{r}$$

$$Cc.\overline{\mu+\nu}-\sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu} = \frac{\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu-\sqrt{-1}.Sc.\nu}}{r}.$$

Si agas de finu, & cofinu arcus $\mu - \nu$, fatis erit in formulis mutare fignum $Sc.\nu$, reliquis non mutatis. Ratio, quæ tradita eft in quantitatibus hyperbolicis, valet etiam in circularibus.

7. Formulæ quatuor, quas dixi quatuor theoremata exhibere, ingentem præftant ufum in multiplicandis, ac dividendis cum logarithmis, tum arcubus circularibus. Etenim pofito $\mu = \nu$ proveniunt quatuor æquationes

$$Cb.2\mu+Sb.2\mu = \frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^2}{r}$$

$$Cb.2\mu-Sb.2\mu = \frac{\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^2}{r}$$

$$Cc.2\mu+\sqrt{-1}.Sc.2\mu = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^2}{r}$$

$$Cc.2\mu-\sqrt{-1}.Sc.2\mu = \frac{\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^2}{r}$$

 Fiat

Fiat æquationum additio, & subtractio, quam signorum ambiguitas videtur postulare.

$$Cb.2\mu = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^2 + \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^2}{2r}$$

$$Sb.2\mu = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^2 - \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^2}{2r}$$

$$Cc.2\mu = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^2 + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^2}{2r}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.2\mu = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^2 - (\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^2}{2r}.$$

Præterea fiat æquationum additio, & subtractio, postquam extracta fuerit radix quadrata, & invenietur

$$\frac{\overline{Cb.2\mu + Sb.2\mu}^{\frac{1}{2}} + \overline{Cb.2\mu - Sb.2\mu}^{\frac{1}{2}}}{2r^{-\frac{1}{2}}} = Cb.\mu$$

$$\frac{\overline{Cb.2\mu + Sb.2\mu}^{\frac{1}{2}} - (\overline{Cb.2\mu - Sb.2\mu}^{\frac{1}{2}}}{2r^{-\frac{1}{2}}} = Sb.\mu$$

$$\frac{\overline{Cc.2\mu + \sqrt{-1}.Sc.2\mu}^{\frac{2}{2}} + \overline{Cc.2\mu - \sqrt{-1}.Sc.2\mu}^{\frac{1}{2}}}{2r^{-\frac{1}{2}}} = Cc.\mu$$

$$\frac{\overline{Cc.2\mu + \sqrt{-1}.Sc.2\mu}^{\frac{1}{2}} - (\overline{Cc.2\mu - \sqrt{-1}.Sc.2\mu}^{\frac{1}{2}}}{2r^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{-1}.Sc.\mu.$$

8. Duobus logarithmis, aut arcubus circularibus μ, ν addatur tertius φ, & theoremata præbebunt æquationes

$$Cb.\overline{\mu+\nu+\varphi} + Sb.\overline{\mu+\nu+\varphi} = \frac{\overline{Cb.\overline{\mu+\nu} + Sb.\overline{\mu+\nu}}.\overline{Cb.\varphi + Sb.\varphi}}{r}$$

$$Cb.\overline{\mu+\nu+\varphi} - Sb.\overline{\mu+\nu+\varphi} = \frac{\overline{Cb.\overline{\mu+\nu} - Sb.\overline{\mu+\nu}}.\overline{Cb.\varphi - Sb.\varphi}}{r}$$

$$Cc.\overline{\mu+\nu+\varphi} + \sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu+\varphi} =$$

Cc.

$$\frac{Cc.\overline{\mu+\nu}+\sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu}.\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}}{r}$$

$$Cc.\overline{\mu+\nu+\varphi}-\sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu+\varphi}=$$
$$\frac{Cc.\overline{\mu+\nu}-\sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu}.\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}}{r}.$$

Subſtitue pro $Cb.\overline{\mu+\nu}+Sb.\overline{\mu+\nu}$, item pro $Cb.\overline{\mu+\nu}-Sb.\overline{\mu+\nu}$ valores, quos prima duo theoremata præbent; idemque fac in quantitatibus circularibus per duo alia theoremata. Orientur porro hæc quatuor theoremata

$$Cb.\overline{\mu+\nu+\varphi}+Sb.\overline{\mu+\nu+\varphi}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu+Sb.\nu}.\overline{Cb.\varphi+Sb.\varphi}}{r^2}$$

$$Cb.\overline{\mu+\nu+\varphi}-Sb.\overline{\mu+\nu+\varphi}=\frac{\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}.\overline{Cb.\nu-Sb.\nu}.\overline{Cb.\varphi-Sb.\varphi}}{rr}$$

$$Sc.\overline{\mu+\nu+\varphi}+\sqrt{-1}Sc.\overline{\mu+\nu+\varphi}=$$
$$\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu+\sqrt{-1}.Sc.\nu}.\overline{Cc.\varphi+\sqrt{-1}.Sc.\varphi}}{r^2}$$

$$Cc.\overline{\mu+\nu+\varphi}-\sqrt{-1}.Sc.\overline{\mu+\nu+\varphi}=$$
$$\frac{\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}.\overline{Cc.\nu-\sqrt{-1}.Sc.\nu}.\overline{Cc.\varphi-\sqrt{-1}.Sc.\varphi}}{r^2}.$$

9. Ponantur æquales μ, ν, φ, factaque, ut antea, æquationum additione, & ſubductione naſcentur

$$Cb.3\mu=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^3+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^3}{2rr}$$

$$Sb.3\mu=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^3-(\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^3}{2rr}$$

$$Cc.3\mu=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^3+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^3}{2rr}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.3\mu=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^3-(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^3}{2rr}.$$

Si antequam addas, & ſubtrahas æquationes, extrahas tertii gradus radices, invenies

$$\frac{\overline{Cb.3\mu+Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}}+\overline{Cb.3\mu-Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}=Cb.\mu$$

Cb.

$$\frac{\overline{Cb.3\mu+Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}}-(\overline{Cb.3\mu-Sb.3\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}=Sb.\mu.$$

$$\frac{\overline{Cc.3\mu+\sqrt{-1}.Sc.3\mu}^{\frac{1}{3}}+\overline{Cc.3\mu-\sqrt{-1}.Sc.3\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}=Cc.\mu$$

$$\frac{\overline{Cc.3\mu+\sqrt{-1}.Sc.3\mu}^{\frac{1}{3}}-(\overline{Cc.3\mu-\sqrt{-1}.Sc.3\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}=\sqrt{-1}.Sc\mu$$

10. Progressus hujusmodi, ut perspicuum est, potest in infinitum produci. Quare hæ formulæ generatim valebunt

$$Cb.n\mu=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{n}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.n\mu=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{n}-(\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

$$Cc.n\mu=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.n\mu=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}-(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Si n est numerus integer, vel unitas divisa per numerum integrum, res est clarissime demonstrata. In reliquis numeris ex inductione probata remanet.

11. Si cui genus hoc demonstrationis minus arrideat, afferam primum pro numeris fractis, quorum numerator non sit unitas, deinde pro negativis demonstrationem clarissimam, ex superioribus deductam. Sit fractio $\frac{n}{m}$; constat ex numero superiore

$$Cb.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cb.\frac{\mu}{m}+Sb.\frac{\mu}{m}}^{n}+\overline{Cb.\frac{\mu}{m}-Sb.\frac{\mu}{m}}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cb.\frac{\mu}{m}+Sb.\frac{\mu}{m}}^{n}-(\overline{Cb.\frac{\mu}{m}-Sb.\frac{\mu}{m}}^{n}}{2r^{n-1}}$$

Cc.

$$Cc.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cc.\frac{\mu}{m}+\sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{m}}^{\,n}+\overline{Cc.\frac{\mu}{m}-\sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{m}}^{\,n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cc.\frac{\mu}{m}+\sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{m}}^{\,n}-(\overline{Cc.\frac{\mu}{m}-\sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{m}}^{\,n}}{2r^{n-1}};$$

atqui pariter ex demonstratis

$$Cb.\frac{\mu}{m}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{\frac{1}{m}}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$Sb.\frac{\mu}{m}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{\frac{1}{m}}-\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$Cc.\frac{\mu}{m}=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{m}}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{m}=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{m}}-(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{m}}}{2r^{\frac{1}{m}-1}};$$

ergo si valores isti in superioribus æquationibus substituantur, æquationesque, ut par est, expurgentur, nascentur

$$Cb.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{\frac{n}{m}}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$Sb.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{\frac{n}{m}}-(\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$Cc.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{n\mu}{m}=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}}-(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$; quæ

formulæ erant demonstrandæ.

12. Quoad numeros negativos fac advertas, quod antea notavi, cosinum logarithmi, aut arcus negativi eumdem esse, ac cosinum positivi; contra sinum logarithmi, aut arcus negativi esse quidem æqualem sinui positivo, sed tamen negativum. Quamobrem valebunt hujusmodi formulæ

$$Cb.-n\mu=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{n}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.-n\mu=\frac{-(\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{n}+(\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.-n\mu=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\mu=\frac{-(\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}+(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Quæ formulæ in duas fractiones transmutari possunt, in quibus negativum fit divisoris exponens in hunc modum

$$Cb.-n\mu=\frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{-n}}+\frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{-n}}$$

$$Sb.-n\mu=\frac{-r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{-n}}+\frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{-n}}$$

$$Cc.-n\mu=\frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}+\frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}$$

$$\sqrt{-1}Sc.-\mu=\frac{-r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}+\frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}.$$

Si

Si redigas fractiones hujusmodi ad eumdem denominatorem, & pro communi divisore $\overline{Cb.\mu}^2 - \overline{Sb.\mu}^2$, aut $\overline{Cc.\mu}^2 + \overline{Sc.\mu}^2$ substituas rr illi æqualem ex natura hyperbolæ æquilateræ, & circuli, invenies æquationes quatuor, quæ a nobis probandæ sunt, scilicet

$$Cb.-n\mu = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{-n} + \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$Sb.-n\mu = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{-n} - (\overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$Cc.-n\mu = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n} + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\mu = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n} - (\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}.$$

Quamobrem veritas formularum, quas præmisimus, demonstrata est in omnibus numeris rationalibus. Quod spectat ad irrationales, potest ea demonstrari adhibito calculo infinitesimali. Sed quum hoc ad præsens institutum nostrum minime pertineat, satis nobis erit in præsentia, illam ex inductione probasse.

15. Postquam ea, quæ necessaria visa sunt, de sinibus, & cosinibus ita demonstravimus, ut ad eadem deinceps redire non sit opus, accedamus propius ad constructionem radicum tertii gradus, quæ formulis cardanicis continentur. Radices istæ, ut constat ex capite præcedenti hanc habent formam

$x = \overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}}$. Ut elegantiæ serviam divido per 2 hoc modo $\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}}^{\frac{1}{3}}}{2}$, atque determino $\frac{x}{2}$ dimidium radicis quæsitæ. In prima hypothesi statuo tam a, quam b positivam. Duplicem casum in hoc distinguamus oportet; nam si $\frac{bb}{4} > a^3$, nihil imaginarii formula continebit; si vero $\frac{bb}{4} < a^3$, aderit radix imaginaria. In primo casu comparanda est cum expressione logarithmi subtripli, nempe cum $Cb.\frac{\mu}{3} = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}$; in secundo ca-

sn comparanda est cum formula arcus subtripli, nimirum cum

$$Cc.\frac{\mu}{3} = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}.$$

14. Fiat primi casus collatio, & orientur æquationes duæ

$$\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{r^{-2}},\ \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{r^{-2}}.$$

Facta harum æquationum additione, & subtractione exurget $\frac{b}{2} = \frac{Cb.\mu}{r^{-2}}$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Sb.\mu}{r^{-2}}$; atqui $\overline{Cb.\mu}^2 - \overline{Sb.\mu}^2 = rr$ ergo $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^3 = \frac{rr}{r^{-4}}$, seu $a^3 = r^6$, seu $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2}$ erit $Cb.\frac{\mu}{3}$ existente μ eo logarithmo, cujus cosinus $= \frac{b}{2a}$ existente sinu toto $= a^{\frac{1}{2}}$. Hujusmodi autem orietur constructio (*Fig.* 1). Descripta hyperbola æquilatera, cujus sinus totus, seu semiaxis $AC = a^{\frac{1}{2}}$, abscinde $CM = \frac{b}{2a}$, & excitetur sinus MN. Ex punctis A, N demittantur in assymptotum normales AK, NP. Inter CK, CP inveniantur duæ mediæ proportionales, quarum prima sit CG. Ex G duc GE perpendicularem assymptoto, tum sinum EB, qui determinat cosinum $CB = \frac{x}{2}$.

15. Fiat alterius casus comparatio, & ex duabus æquationibus

$$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{-2}},$$

$$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{-2}}$$ invenietur $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\mu}{r^{-2}}$,

$\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\mu}{r^{-2}}$; atqui $\overline{Cc.\mu}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 = rr$; ergo $\frac{bb}{4} + a^3 - \frac{bb}{4} = \frac{r^2}{r^{-4}}$, sive $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2}$ erit $Cc.\frac{\mu}{3}$, dummodo sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, & $Cc.\mu = \frac{b}{2a}$. Ex his pleno alveo fluit constructio. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, capiatur $CM = \frac{b}{2a}$, & agatur sinus MN, (*Fig.* 2) erit AN ar-

arcus $=\mu$. Arcus iste in tres partes dividatur, quarum prima sit $AE=\frac{\mu}{3}$; Ducatur sinus EB, cosinus $CB=\frac{x}{2}$. Non unus tantum arcus AN, sed infiniti existunt, quorum cosinus est $CM=\frac{b}{2a}$; nempe posita circumferentia circuli $=c$, & arcu $AN=\mu$, omnes arcus

μ, $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$ &c., imo & alii

μ, $-c+\mu$, $-2c+\mu$, $-3c+\mu$ &c., qui, ut vides, numero infiniti sunt, quos pariter si dividas in partes tres, invenies novos arcus A2E, A3E, quorum cosinus C2B, C3B, exhibent reliquos valores radicis $\frac{x}{2}$. Ne tamen putes, reales valores radicis $\frac{x}{2}$ esse numero infinitos, sunt enim tres solummodo. Nam divisio trium arcuum μ, $c+\mu$, $2c+\mu$, dat tria puncta E, 2E, 3E; at reliquorum arcuum divisiones in hæc eadem puncta cadent, proinde tres duntaxat habebuntur radices æquationis reales, quod clarius explicabimus capite sequenti in problemate de arcus trisectione.

15. Primæ hypothesi affinis est altera, in qua supponitur quidem a positiva, at b negativa. In hac æquatio, si speciei b mutetur signum, sequentem induit formam $\frac{x}{2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}$, quæ comparanda est cum cosinu logarithmi subtripli, si $\frac{bb}{4}>a^3$, cum cosinu arcus subtripli, si $\frac{bb}{4}>a^3$. Comparatio præbet eosdem valores, ac hypothesis prima cum hoc tantum discrimine, quod cosinus μ provenit negativus, existente sinu positivo. Quare in casu $\frac{bb}{4}>a^3$ hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera, cujus semiaxis $CA=a^{\frac{1}{2}}$, (*Fig.* 3) abscinde $CM=\frac{b}{2a}$, quæ quando negativa inventa est, sumitur ad partem cosinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN, quæ statuitur ad partes sinuum positivorum, quia sinus inventus est positivus. Ex N in asymptotum CK demittatur normalis NP. Inter CK, CP inveniantur duæ mediæ proportionales, quarum prima sit CG. Sit GE perpendicularis asymptoto, & EB axi, cosinus CB, qui negativus est, erit $=\frac{x}{2}$. In casu secundo ejusdem hypothesis, quum scilicet $\frac{bb}{4}>a^3$, hæc habetur constructio, quæ docet, omnes radices esse reales. Descripto circulo, cujus radius $=a^{\frac{1}{2}}$, abscindatur negativus cosinus $CM=\frac{b}{2a}$, (*Fig.* 4.) & excitetur positivus sinus MN. Arcus AN dividatur in partes æquales tres, quarum prima sit AE. Ducto sinu EB, determinatur cosinus CB, qui erit unus ex valoribus $\frac{x}{2}$. Vocato $AN=\mu$,

capiantur tertiæ partes arcuum $c+\mu$, $2c+\mu$, quarum puncta ultima sint 2E, 3E, quæ determinant alios valores $\frac{x}{2}$, C2B, C3B.

16. Tertia hypothesis, in qua b positiva sit, a negativa, mutato signo speciei a, hujus formæ æquationem præbet

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}}^{\frac{1}{3}}}{2}$$

. Hæc quum nihil imaginarii contineat ad hyperbolam est referenda. Nonnemo primoribus oculis formulam intuens fortasse judicabit, eam comparandam esse cum expressione cosinus logarithmi subtripli. Sed si comparationem instituat, cognoscet statim, sinum totum imaginarium oriri. Quod non indicat, constructionem esse impossibilem, sed formulam non per cosinum, sed per sinum hyperbolicum esse construendam. Quod ex eo quoque poteras colligere, quia si secus fieret, sinus major esset cosinu, quod in hyperbola omnino impossibile est. Itaque ut formulam referamus ad sinum, ita eam disponamus

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}+\frac{b}{2}}^{\frac{1}{3}} - \overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}-\frac{b}{2}}^{\frac{1}{3}}}{2},$$

quæ comparanda est cum sequenti

$$Sh.\frac{\mu}{3} = \frac{\overline{Ch.\mu + Sh.\mu}^{\frac{1}{3}} - \overline{Ch.\mu - Sh.\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}$$

. Collatio sufficit æquationes duas $\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}+\frac{b}{2} = \frac{Ch.\mu+Sh.\mu}{r^{-2}}$, $\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}-\frac{b}{2} = \frac{Ch.\mu-Sh.\mu}{r^{-2}}$, ex quibus propter ambiguitatem signorum provenit $\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3} = \frac{Ch.\mu}{r^{-2}}$; $\frac{b}{2} = \frac{Sh.\mu}{r^{-2}}$; atqui $\overline{Ch.\mu}^2 - \overline{Sh.\mu}^2 = rr$; ergo $\frac{bb}{4}+a^3-\frac{bb}{4} = a^3 = r^6$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Describe hyperbolam, cujus sinus totus $CA = a^{\frac{1}{2}}$ (*Fig.* 1); duc AK normalem assymptoto; accommoda sinum $MN = \frac{b}{2a}$; & assymptoto normalem demitte NP. Inveni CG primam ex duabus mediis proportionalibus inter CK, CP, ex G duc GE normalem assymptoto, & ex E agatur sinus EB, qui erit $=\frac{x}{2}$, nempe quæsitæ radicis dimidio.

16. Quar-

Fig. 2.

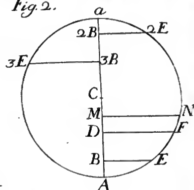
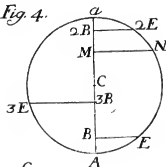
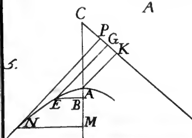


Fig. 4.





16. Quartam, & ultimam hypotesim, in qua non minus a, quam b negativa est, priori similem breviter expedio. Formula in hac provenit hujusmodi

$$\frac{x}{2} = \frac{{}^{1}\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}-\frac{b}{2}}^{\frac{1}{3}} - (\overline{\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}+\frac{b}{2}}^{\frac{1}{3}}}{2}$$

, quæ collata cum expressione sinus logarithmi subtripli easdem determinationes præbet, ac in hypothesi superiori, cum hoc tantum discrimine, quod $Sb.\mu$ provenit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes sinuum negativorum applicetur MN $= \frac{b}{2a}$, (*Fig.* 5.) & ducta in assymptotum normali NP, inveniatur CG prima ex duabus mediis proportionalibus inter CK, CP. Agatur assymptoto normalis GE, & sinus EB, qui æquabit radicem $\frac{x}{2}$. Hac methodo expressiones cardanicæ, quæ proveniunt ex resolutione radicum tertii gradus, non solum utilitatem habent in quæstionibus arithmeticis, sed etiam in geometricis, quæ constructionem accipiunt vel descripto circulo, divisoque arcu in tres partes æquales, vel descripta hyperbola æquilatera, inventisque inter duas datas duabus mediis proportionalibus.

CAPUT DECIMUM TERTIUM

Aliquot tertii, & quarti gradus problemata resolvuntur.

1. PRoblema primum. Inter duas datas a, b invenire duas medias proportionales. Prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, b vocetur x. Conditio problematis statim æquationem offert; nempe $a :: x :: \frac{x^2}{a} :: \frac{x^3}{aa} = b$, seu $x^3 = a^2 b$, quæ est æquatio tertii gradus. Ut hanc resolvas in duas indeterminatas secundi gradus, pone $xx = ay$, ex qua provenit $xy = ab$, quæ duæ æquationes una ad parabolam, alia ad hyperbolam ita construuntur. Ad angulum rectum (angulo enim recto utemur, nisi elegantia prohibeat) constituantur AC, AQ (*Fig.* 1). Abscinde in prima AC, $= a$, atque hac parametro ad axem AQ delineetur parabola ATM. Seca in altera AB $= b$, & clauso parallelogrammo ACDB inter assymptota AQ, AC describe hyperbolam MD transeuntem per punctum D. Curvæ duæ descriptæ se in M dumtaxat intersecant. Normales rectis AC, AB agantur MP, MQ. Recta AP, seu MQ dabit primam ex mediis proportionalibus inter AC, AB $= x$; immo AQ, seu MP dabit secundam $= \frac{x^2}{a}$.

2. Si duas parabolas ad constructionem mavis adhibere, multiplica æquationem $x^3 = a^2 b$ per x, ut fit $x^4 = a^2 bx$. Pone ut supra $x^2 = ay$, unde proveniet $yy = bx$. Descripta ut supra parabola ATM, aliam describe ASM para-

parametro $AB = b$ ad axem AP. Duarum parabolarum interſectio M præbebit AP primam, AQ ſecundam ex duabus mediis proportionalibus inter AC, AB. Ad inveniendas tres æquationes, quas adhibuimus, non eſt neceſſe devenire ad æquationem determinatam. Nam vocatis mediis x, y eſt $a :: x :: y :: b$; ergo ſtatim habemus $ay = xx$, $bx = yy$, $ab = xy$.

3. Si libeat adhibere circulum, hanc ſequere methodum. Duas æquationes ad parabolas ſimul junge in hunc modum $yy - ay + xx - bx = 0$, ſive $\overline{y - \frac{a}{2}}^2 + \overline{x - \frac{b}{2}}^2 = \frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}$ æquatio ad circulum, qui in hunc modum conſtruitur. Sume $CD = \frac{b}{2}$, $DE = \frac{a}{2}$ (*Fig.* 2) poſitas ad angulum rectum in D, junge CE, quo radio deſcribe circulum EAB. Parallelam diametro AB duc EP, erunt $EP = x$, $MP = y$. Quare ſi vertice E parametro $= b$, ad axem EP deſcribas parabolam, interſectio M parabolæ, & circuli dabit EP primam, MP ſecundam ex mediis proportionalibus inter a, b. Quoniam in uno tantum puncto curvæ ſe ſecant, una tantum eſt realis ſolutio problematis.

4. Problema ſecundum. Intra rectum angulum ABC (*Fig.* 3.) ducere lineam AC tranſeuntem per datum punctum D ita, ut ex vertice B demiſſa in ipſam normali fit pars $AE = DC$. Supponatur factum, & ex punctis D, E agantur DN, EM parallelæ BA. Quando $AE = DC$, etiam $BM = NC$, ergo $BN = MC$. Vocetur $DN = a$, $BN = MC = b$, $NC = BM = x$. Quum ME ſit media proportionalis inter BM, MC propter angulum rectum BEC erit $EM = \sqrt{ax}$; atqui $NC : ND :: MC : ME$; ergo $x : a :: b : \sqrt{bx} :: \sqrt{b} : \sqrt{x}$; ergo $x^3 = a^2 b$, quæ formula, ut ex ſuperiore problemate patet, docet, x eſſe primam ex mediis duabus proportionalibus inter a, b. Hoc idem ſine ſpeciebus poterat facile demonſtrari. Agantur DP, EQ parallelæ. Conſtat $AQ = BP$, & $AP = BQ$. Itaque ajo CN, AP eſſe duas medias proportionales inter DN, DP. Nam ob angulum rectum BEA eſt $AQ : QE$, ſeu $ND : NC :: QE = NC : BQ = AP$. Sunt itaque in continua propoſitione ND, CN, AP. Præterea $BM = NC : ME = AP :: ME = AP : MC = PD$; ergo ſunt pariter continue proportionales CN, AP, DP; igitur NC, AP ſunt mediæ proportionales inter datas DN, DP. Quare ſoluto ſuperiori problemate hoc quoque ſolutionem accipit, & per hujus ſolutionem duæ mediæ proportionales inveniuntur.

5. Ad hujuſce problematis ſolutionem ita ſine ſpecioſa analyſi poſſunt loci duo determinari. Ob angulum rectum BEC erit $EM^2 = MC.BM = BN.BM$. Quare ſi vertice B, axe BC, parametro BN deſcribatur parabola; in hac curva ſitum erit punctum E. Similiter quum ſit $EM : DN :: MC = BN : NC = BM$ habebimus $EM.BM = BN.ND$ quæ eſt proprietas hyperbolæ inter aſymptota; ergo ſi inter aſymptota BA, BC deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum D, punctum E erit pariter in hac curva. Quare aliud eſſe non poteſt, quam punctum interſectionis parabolæ, & hyperbolæ.

6 Sed elegantior fortaſſe erit ſequens ſolutio. Juncta BD deſcribatur ſuper ipſam ſemicirculus BED. In hujus periferia jacebit punctum E ob angulum rectum BEC. Deinde inter aſymptota BA, BC deſcribatur hyperbola tranſiens per punctum D. Quoniam hujus hyperbolæ proprietas eſt, ut ubique

EA

EA = CD punctum E in hyperbola jacere debet. Ergo in intersectione hyperbolæ, & circuli: igitur si ab intersectione jungatur ED, quæ utrinque producatur, hæc erit linea quæsita. Elegimus potius hyperbolam quam parabolam, quia hyperbola inservit solvendo problemati, tametsi angulus ABC rectus non fuerit. Imo eadem solutio valebit, etiamsi angulus BEC rectus esse non debeat, sed quilibet datus, dummodo supra DB ejusmodi segmentum constituatur, quod datum angulum capiat. Quod si AE : DC debeat esse in qualibet ratione data, docuimus Cap. 7. Num. 4. hoc pariter ab hyperbola præstari; quare hujus, & circuli intersectio solutionem problematis sufficiet.

7. Problema tertium. Datum arcum in tres æquales partes dividere. Arcus datus MPN, (*Fig. 4.*) cujus chorda MN, divisus sit in punctis P, Q, ut chordæ MP, PQ, QN inter se æquales sint. Age radios CM, CP, CQ, CN, & ex puncto P duc PZ parallelam CQ. Quoniam angulus MYP = CYR = CPQ = CMP, triangula duo CMP, MYP erunt similia; ergo MY = MP; eodem modo demonstratur NR = QN. Præterea CM : MP :: MP : PY. Triangulum CYR est simile ZPY; sed idem CYR est simile CPQ, seu CMP, seu MPY; ergo MPY est simile ZPY; ergo MP : PY :: PY : YZ; igitur YZ est quarta proportionalis post CM, MP. Vocata itaque CM = a, MP = x, erit YZ = $\frac{x^3}{aa}$. Voca MN = b. Quoniam MN = RN + ZR + MY − ZY fiet æquatio $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$; ergo $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$.

8. Ut exemplum proponam constructionis peractæ per circulum, & ellypsim speciei datæ, cujus axes sint ut $\sqrt{2} : 1$, multiplico inventam æquationem per x, ut habeam $x^4 - 3aaxx + a^2bx = 0$. Pono $xx = ay$, ut facta substitutione proveniat æquatio $yy - 3xx + bx = 0$, cui addo $xx - ay = 0$ multiplicatam per m, ut oriatur $yy - may + \begin{matrix} mx^2 \\ -3x^2 \end{matrix} + bx = 0$. Ut circulus habeatur ponenda est $m = 4$, & æquatio nascetur $yy - 4ay + xx + bx = 0$. Ad ellypsim speciei datæ fiat $m = 5$, & æquatio nascetur $yy - 5ay + 2xx + bx = 0$. Ut construamus ellypsim adde $\frac{25aa}{4}$, & erit $\overline{\frac{5}{2}a - y}^2 = \frac{25aa}{4} - 2xx - bx$; dividatur per 2 $\frac{1}{2}$. $\overline{\frac{5}{2}a - y}^2 = \frac{25aa}{8} - xx - \frac{b}{2}x = \frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} - (\overline{x + \frac{b}{4}}^2$; ergo $\frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} - (\overline{x + \frac{b}{4}}^2 : \overline{\frac{5}{2}a - y}^2 :: 1 : 2 :: \frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} : \frac{25aa}{4} + \frac{bb}{8}$. Semiaxe majori CA = $\sqrt{\frac{25aa}{4} + \frac{bb}{8}}$, & minore CB = $\sqrt{\frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16}}$ describatur ellypsis ABDE, (*Fig. 5.*) abscinde CF = $\frac{5a}{2}$, duc applicatam FL, quæ = $\frac{b}{4}$. Age LQ parallelam AC, erunt LP = y, PM = x. Ut circulus con-

conjungatur cum ellypsi, ita dispone æquationem $\overline{2a-y}^2+\overline{x+\frac{b}{2}}^2=4aa+\frac{bb}{4}$, ex qua hæc oritur constructio, abscinde $FS=2a$, cui sit normalis $RS=CQ=\frac{b}{4}$; age RL. Centro R radio RL describe circulum, in quo pariter LP erunt $=y$, $PM=x$. Circulus secabit ellypsim præter punctum L ubi fit $x, y=0$ in tribus punctis M, 2M, 3M, ex quibus si agantur ordinatæ MP, 2M2P, 3M3P, hæ sufficient nostræ æquationis radices duas positivas, unam negativam.

9. Si velles usurpare in constructione circulum datum, nihil faciendum est aliud, quum describere ellypsim, cujus axes sint ad axes AD, BE, ut radius circuli dati ad RL; tum semper usurpatis proportionalibus eodem modo peragatur constructio; ordinatæ quas intersectiones præbebunt non erunt quidem æquationis nostræ radices; sed ad has radices erunt in ratione data rectæ RL ad radium circuli dati. Cui problemati inserviant tres radices inventæ paulio infra ostendam.

10. Verum arcum datum in tres partes ita elegantius dividemus. Sit arcus datus MPQN in tres æquales partes divisus in punctis P, Q, (*Fig.6*) ut chordæ MP, PQ, QN æquales sint. A punctis P, Q demittantur normales PS, QT in chordam MN. Rectæ MN, ST bifariam dividantur ab eodem puncto D. Vocetur $DM=a$, $DS=x$, $SP=y$, erit $ST=PQ=MP=2x$; ergo, quum sit $MP^2=MS^2+PS^2$, erit analytice $4x^2=aa-2ax+xx+yy$, vel $xx+\frac{2ax}{3}+\frac{aa}{9}=\frac{4aa}{9}+\frac{yy}{3}$. Pone $x+\frac{a}{3}=z$, ut sit $zz-\frac{4aa}{9}:yy::1:3::\frac{4aa}{9}:\frac{4aa}{3}$, quæ æquatio est ad hyperbolam, cujus semiaxis primus $=\frac{2a}{3}$, secundus $=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, quæ ita construitur divide MN in tres partes æquales MR, RA, AN. Centro A cum primo semiaxe $AR=AN=\frac{2a}{3}$, & cum secundo $=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ describatur hyperbola. Ejus intersectio P cum circulo dabit MP tertiam partem arcus MN; ex puncto P duc PQ parallelam MN, & punctum Q determinabit alias duas tertias partes PQ, QN.

11. Alio modo hæc solutio enunciari potest. Per punctum D age DB normalem MN. Foco M, vertice R, directrice DB describe hyperbolam, quæ secabit circulum in P ita, ut arcus MP sit tertia pars arcus MPQ. Quod ita demonstratur. Junge MP, duc directrici normalem PB, quam produc in Q. Ex proprietate hyperbolæ MR : RD :: MP : PB; sed MR est dupla RD; ergo MP dupla PB; sed PQ est etiam dupla PB; ergo $MP=PQ$, cui etiam est æqualis QN. Hyperbola ita descripta invenietur habere centrum in A, & oppositum verticem in N.

12. Hyperbola secat circulum non solum in puncto P, sed etiam in aliis duobus punctis 2P, 3P. Quid istæ intersectiones indicent videndum est. Punctum P trisecat arcum datum MPN. Punctum 2P trisecat arcum coalescentem ex integra circumferentia, & arcu dato. Nam ductis M2P, 2P2Q parallela MN, & 2QN, hæ omnes ex analyseos constructione æquales esse debent; ergo

go arcus M P 2 P, 2 P 3 P 2 Q, 2 Q M N æquales erant; atqui horum summa dat integram circumferentiam simul cum arcu dato M P N; ergo singuli ex tribus arcubus sunt tertia pars circumferentiæ simul, & arcus dati. Similiter punctum 3 P inservit dividendis trifariam duabus circumferentiis simul cum arcu dato. Etenim æquales sunt chordæ M 3 P, 3 P 3 Q, 3 Q N, quarum secunda est parallela M N; ergo arcus semicircumferentia majores M N 3 P, 3 P M 3 Q, 3 Q M N æquales erunt; sed isti simul sumpti dant duas circumferentias, & arcum datum M N; ergo singuli sunt tertia pars duarum cicumferentiarum & arcus dati. Ad dividendas tres circumferentias & arcum datum, inservit punctum P, quatuor circumferentias & arcum datum punctum 2 P, quinque circumferentias & arcum datum punctum 3 P, atque ita deinceps. Similiter punctum 3 P in tres partes æquales partitur circumferentiam dempto arcu dato, punctum 2 P duas circumferentias dempto arcu dato, punctum P tres circumferentias dempto dato arcu, atque ita deinceps. Quare apparet, æquationem ejusque constructionem inservire dividendis in tres partes æquales arcubus infinitis, nimirum illis omnibus, qui terminos habent in punctis M, N, qui infiniti sunt numero. Quare problema esset gradus indefiniti, aut trascendentis, nisi tria puncta P, 2 P, 3 P successive redirent eadem.

14. Facile est cognitu, puncta P, 2 P, 3 P dividere periferiam in tres æquales partes. Nam vocata circumferentia $= c$, & arcu dato $= a$, est M P 2 P $= \frac{c+a}{3}$; sed M P $= \frac{a}{3}$; ergo P 2 P $= \frac{c}{3}$. Similiter M N 3 P $= \frac{2c+a}{3}$; sed M 2 P $= \frac{c+a}{3}$; ergo 2 P 3 P $= \frac{c}{3}$; ergo etiam P 3 P $= \frac{c}{3}$. Circumferentia ergo in tres partes divisa est in punctis P, 2 P, 3 P. Nihil diximus de puncto N, in quo circulus, & hyperbola pariter se interfecant. Nam si ex puncto M ad N recta ducatur, tum ex N eidem parallela M N, & ex M iterum M N tres rectæ coincidunt; quare licet sint æquales, quum coincidant, trifectioni arcus non inserviunt.

15. Problema quartum. Datis duabus rectis ad angulos rectos se interfecantibus in C (*Fig. 7.*), ex dato puncto A ducere lineam A E F ita, ut pars E F sit æqualis datæ. Clauso rectangulo A D C B, vocetur B C $= a$, D C $= b$, E F $= c$, B E $= x$, ergo C E $= a - x$, & A E $= \sqrt{bb + xx}$. Quoniam est A E : B E :: F E : C E, erit analytice $\sqrt{bb + xx} : x :: c : a - x$, & quadrando $b^2 + x^2 : x^2 :: c^2 : a^2 - 2ax + x^2$, factoque transitu ad æquationem invenietur

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0. \\ &+ b^2x^2 \\ &- ccxx \end{aligned}$$

16. Ad hanc construendam pono $ab = xy$, & substitutio das

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = 0, \text{ \& dividendo per } xx \\ &+ b^2x^2 \\ &- c^2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax &+ aa - 2by + yy = 0, \text{ sive } \overline{a-x}^2 + \overline{b-y}^2 = cc, \text{ quæ æquatio est} \\ &+ bb \\ &- cc \end{aligned}$$

 ad

ad circulum. Constructio itaque hæc nascitur. Fiant duo parallelogramma CH, AK omnino æqualia DB, atque inter assymptota CBK, ABH describantur hyperbolæ oppositæ transeuntes per puncta G, I. Deinde centro G, radio $= c$ describatur circulus. Ex puncto intersectionis hyperbolæ, & circuli ex. ca. M agatur ordinata ME. Ex A per E ducatur AEF, erit EF $= c$. Si circulus secet utrumque ramum hyperbolæ, quatuor solutiones recipiet problema. In una, linea $= c$ posita erit intra angulum BCG, in altera intra angulum DCN, in aliis intra angulum ABK. Primæ duæ quæcumque sit linea $= c$ semper possibiles sunt, reliquæ evadunt sæpissime imaginariæ, quoties circulus non secat ramum transeuntem per I. Si circulus tangit hyperbolam, duæ coeunt in unam, & duo erunt valores æquales x negativæ, qui casus medius est inter reale, & imaginarium. Si ponam

$c = \overline{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}^{\frac{3}{2}}$, & $c^2 = a^2 + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} + b^2$, æquatio quarti gradus in

hanc mutatur $x^4 - 2ax^3 - 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0$. Observo hanc bis

$-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}x^2$

esse divisibilem per binomium $x + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, & facta divisione oriri

$x^2 - 2ax - 2b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}x + b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} = 0$. In hoc itaque casu duo sunt valores æquales negativi x, & duæ solutiones in unam coibunt: circulus igitur in hoc casu tanget hyperbolam. Reliqui valores x determinantur resoluta æquatione secundi gradus, & sunt $x = a + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} \pm \sqrt{a^2 + a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}}$. Ex his collige, quatuor esse solutiones reales si $c > \overline{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}^{\frac{3}{2}}$; duas esse reales, duas imaginarias, si $c < \overline{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}^{\frac{3}{2}}$.

17. Problema quintum. Super datam AB (Fig. 8.) formare triangulum isosceles ABC, cujus angulus C sit tertia pars tum anguli A, tum anguli B. Dividatur angulus B in tres partes æquales ductis lineis BD, BE. Triangulum BAE statim prodit simile CAB; ergo CA : AB :: AB : AE; quare vocatis CA $=$ CB $= x$, BA $=$ BE $= a$, erit $x : a :: a :$ AE $= \frac{a^2}{x}$; ergo CE $= x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$. Triangulum DAB est isosceles; ergo DA $=$ AB $= a$.

Trian-

Triangulum CBE est simile BDE; ergo CE:CB::BE:DB, sive analytice $\frac{x^2-a^2}{x} : x :: a : DB = \frac{ax^2}{x^2-a^2}$; **sed propter triangulum CDB isosceles**

$CD = DB = \frac{ax^2}{x^2-aa}$; **ergo, quum** $DA + DC = AC$, **erit** $a + \frac{ax^2}{x^2-aa} = x$,

ex qua prodit æquatio tertii gradus $x^3 - 2ax^2 - a^2x + a^3 = 0$.

18. Ad construendam æquationem utar una eademque parabola in duabus positionibus constituta. Multiplico æquationem per x, novamque radicem introduco, idest $x = 0$; provenit autem $x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 + a^3x = 0$. Pono $x^2 - ax = ay$, & quadrando $x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 = a^2y^2$, demptaque ex una parte $2a^2x^2$, ex altera $2a^3y + 2a^3x$, orietur $x^4 - 2ax^3 - a^2x^2 = a^2y^2 - 2a^3y - 2a^3x$, factaque substitutione, & divisione per aa, $yy - 2ay - ax = 0$. Sit $AB = a$ linea data, quæ bifariam dividatur in F (*Fig. 9.*), & erigatur normalis $FG = \frac{a}{4}$. Vertice G, & parametro $= a$, describatur parabola, quæ transibit per puncta A, B. Rectæ AL, LI erunt coordinatæ x, y æquationis $xx - ax = ay$. Rectæ AB erigatur normalis $AH = AB = a$, & parallela $HK = a$. Punctum K cadet extra parabolam jam descriptam. Vertice K, axe KH, eademque parametro $= a$, describatur eadem prorsus parabola, quæ transibit per punctum A, & rectæ AL, LI erunt coordinatæ x, y æquationis $yy - 2ay - ax = 0$. Parabolæ istæ duæ secabunt sese in punctis I, 2I, 3I, quare tres erunt radices æquationis, nempe AL, A2L, A3L. Prima positiva & $> a$; secunda negativa, & aliquantum $< a$; tertia positiva pariter $< a$, omnes autem sunt $> \frac{a}{2}$. De intersectione in puncto A non loquor, quia præbet radicem introductam $x = 0$.

19. Videndum est sedulo, quid indicent tres radices reales. Patet ex ipsa analysi primam $> a$ præbere triangulum ABC (*Fig. 8.*), in quo angulus ACB est ad CAB::1:3. Ad detegendum triangulum, quod suscit radix altera negativa aliquantum $< a$, sequamur præparationem effectam. Sit hoc triangulum ACB (*Fig. 10.*). Ducenda est BE ita, ut triangulum ABE sit simile ACB, ut AB = BE, & angulus ACB = ABE. Deinde ducenda BD ita, ut triangulum ECB sit simile EBD, debet autem esse DB = DC, DA = AB; igitur angulus CBE = ADB; ergo ACB = CBA + ADB = CAB + ADB = 2ADB + ABD; sed ADB = ABD, ergo ACB = 3ADB; sed CAB = ADB + ABD = 2ADB; ergo ang. ACB:CAB::3:2. Reapse si in hac hypothesi ponam $AC = x$, redit eadem prorsus æquatio. Quapropter radix negativa minor aliquantum quam a inservit construendo triangulo isoscele, in quo angulus ad verticem est ad angulum ad basim::3:2.

20. Spectanda restat radix minima. Sit hæc AC (*Fig. 11.*), factoque triangulo isoscele ACB, ducatur BE, quæ æquet AB, & triangulum ABE sit simile ACB. Deinde agatur BD ita, ut triangulum EBD sit simile ECB. Debet esse BD = DC, & AD = AB. His positis angulus ACB = ABE =

ABC + CBE = CAB + BDE; sed BDE quum sit æqualis duobus æqualibus CBD, BCD erit duplus BCD, qui æquat duos æquales CAB, CBA; adeoque est duplus CAB; igitur ACB quintuplus CAB. Quare radix minima inservit construendo triangulo isoscele, in quo angulus ad verticem ad alterutrum ex angulis ad basim se habeat ut 5 : 1.

21. Quodlibet ex tribus triangulis conducit ad divisionem circuli in septem partes æquales. Etenim inscribatur circulo triangulum ACB (*Fig.* 12.), cujus angulus ACB sit subtriplus cujuslibet angulorum A, B, erit arcus AB septima pars circumferentiæ. Inscribatur triangulum DCE, in quo angulus DCE sit ad unum ex duobus D, E ut 3 : 2, dimidium arcuum DC, CE erit circumferentiæ pars septima. Demum inscribatur triangulum FCG habens angulum FCG quintuplum tam anguli F, quam G, quilibet ex arcubus CF, CG erit pars septima circumferentiæ.

22. Hoc idem problema per circularis arcus trisectionem ope theoriæ sinuum, & cosinuum non ineleganter ita solvetur. Æquationem $x^3 - 2axx - a^2x + a^3 = 0$, ut fractiones vitentur, transmuto facta $a = 3f$, ut f sit datæ a pars tertia. Orietur æquatio $x^3 - 6fx^2 - 9ffx + 27f^3 = 0$. Ut secundus terminus arceatur pono $x = z + 2f$, & invenio $z^3 - 21ffz - 7f^3 = 0$. Quæ resoluta more cardanico, & facta divisione per 2 fiet

$$\frac{z}{2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{7f^3}{2} + \sqrt{\frac{7^2}{2^2}f^6 - 7^3f^6}} + \sqrt[3]{\frac{7f^3}{2} - \sqrt{\frac{7^2}{2^2}f^6 - 7^3f^6}}}{2}$$

, ex qua nascitur hæc constructio. Radio $KM = f\sqrt{7}$ describe circulum. Sume $KH = \frac{f}{2}$, & duc sinum HI (*Fig.* 13.). Arcum MI, circumferentiam + arcum MI, duas circumferentias + arcum MI trisecta in punctis Q, 2Q, 3Q, & duc sinus QP, 2Q2P, 3Q3P, erunt KP, K2P, K3P valores tres $\frac{z}{2}$. Abscinde $KL = f$, erunt LP, L2P, L3P valores $\frac{x}{2}$; medius negativus est, reliqui positivi. Quare eorum dupla dabunt triangulorum latera.

23. Problema sextum. In linea positione data CE (*Fig.* 14.) invenire punctum E, ad quod si ex punctis datis A, B ducantur rectæ AE, BE, tum si excitetur perpendicularis RS, sinus anguli AER sit ad sinum anguli BES in ratione data. Per A agatur FACD perpendicularis CE, tum producatur BE in F. Angulus AER = EAC, BES = EFC; ergo sinus angulorum EAC, EFC debent esse in ratione data. Abscinde FP = AE, & duc PQ normalem AC. Sumpto pro sinu toto AE, aut FP, constat EC, PQ esse sinus angulorum EAC, EFC; ergo EC : PQ debet esse in ratione data; sed EC : PQ :: EF : FP = AE; Ergo EF : EA debent esse in ratione data. Postquam in hoc conversum est problema propositum, comple rectangulum CG. Voca $CF = x$, $FG = CE = y$, $AC = a$, & demissa in FC normali BD sit $CD = b$, $BD = c$. Similitudo triangulorum dat FC : CE :: FD : DB, sive analytice $x : y :: b + x : c$, sive $cx = by + xy$, quæ est æquatio hyperbolæ inter asymptota. Præterea

FE.

FE $= \sqrt{xx+yy}$, AE $= \sqrt{aa+yy}$, denominataque ratione data $m:a$, erit $xx+yy:aa+yy::mm:aa$. Si $m=a$, & ratio data foret æqualitatis, ex ultima æquatione colligeretur $x=\pm a$, quod etiam sine calculo apertum est. Si $m>a$, æquatio est ad hyperbolam; si $m<a$, est ad ellypsim. Curva autem hæc simul cum hyperbola inter assymptota problematis exhibet solutionem.

24. Constructionem perficiamus in suppositione $m>a$. Producatur ad utramque partem BD, & huic ducatur perpendicularis BH. Inter assymptota BD, BH, describatur hyperbola transiens per punctum C, erunt CF, FG coordinatæ x, y primæ æquationis. Abscinde CM $=$ C 2M $= m$, & hoc semiaxe primo, altero vero $= \frac{ma}{\sqrt{mm-aa}}$, describe hyperbolam MG. In duobus punctis G, 2G hyperbolæ secant sese, ex quibus si demittantur ad CE normales GE, 2G 2E, determinabuntur duo puncta E, 2E, quæ duplicem dant problematis solutionem. Si fuerit $m<a$, centro E, semiaxibus m, $\frac{ma}{\sqrt{a^2-m^2}}$ describenda ellypsis, quæ semper hyperbolæ ramum CG in duobus punctis secabit, oppositum vero aut nusquam, aut in punctis duobus.

25. Problema septimum. Dato circulo, cujus centrum C, (*Fig.* 15.) datisque duobus punctis A, B, invenire punctum M, ad quod si agantur AM, BM, anguli AMC, BMC æquales sint. Agatur radius CM, tum ducatur MD faciens angulum MDC æqualem BMC, item ME faciens angulum MEC æqualem AMC. Quoniam triangula BMC, MDC similia sunt, erit BC: CM::CM: CD; sed BC, CM sunt datæ; ergo fiet data CD. Eodem modo propter similitudinem triangulorum AMC, MEC est AC: CM::CM: CE, igitur CE data est. Supponamus BC $>$ AC, erit CD $<$ CE. Vocaitaque CD $= a$, CE $= b$. Age MF, MG parallelas CA, CB, & voca CF $=$ MG $= y$, MF $=$ CG $= x$. Propter æqualitatem angulorum MDC, MEC ex conditione problematis erunt similia triangula MDF, MEG, ergo MF: DF::MG: EG, sive analytice $x:y-a::y:x-b$; igitur $xx-bx=yy-ay$; ergo $\overline{x-\frac{b}{2}}^2 - \frac{bb}{4} + \frac{aa}{4} = \overline{y-\frac{a}{2}}^2$, quæ est æquatio ad hyperbolam æquilateram, cujus constructio perficietur infra.

26. Interea adverte, si $a=b$, hoc est si BC $=$ AC, provenire ex extractione radicis duas æquationes, nempe $x=y$, $a-x=y$. Prima docet, dividendum esse bifariam angulum ACB (*Fig.* 16.) ducta linea M 2M, & puncta intersectionum M, 2M solutum problema exhibere. Secunda docet, inveniendas esse æquales CD, CE, (*Fig.* 17.) quæ sint tertiæ proportionales post CB, seu CA, & radium circuli; tum ducendam ED secantem circulum in punctis 3M, 4M. Quomodo puncta hæc solutum exhibeant problema videndum est. Agantur A 3M, B 3M, & 3MC. Quoniam AC: C 3M:: C 3M: CE, angulus A 3MC $=$ 3MEC. Simili modo quum sit BC: C 3M:: C 3M: CD, angulus B 3MC $=$ 3MDC; atqui 3MEC est complementum ad duos rectos anguli 3MDC: ergo angulus A 3MC complet duos rectos cum B 3MC; quare producta C 3M in L, angulus A 3ML $=$ B 3MC. Idem dicendum de puncto 4M. Hæc animadversio in casu maxime simplici ostendit, quomodo intersectionum puncta solutum problema exhibeant.

27. Ad

$$Cc.\frac{n\mu}{m} = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}} + \overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.\frac{n\mu}{m} = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}} - (\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{n}{m}}}{2r^{\frac{n}{m}-1}}$$; quæ

formulæ erant demonstrandæ.

12. Quoad numeros negativos fac advertas, quod antea notavi, cosinum logarithmi, aut arcus negativi eumdem esse, ac cosinum positivi; contra sinum logarithmi, aut arcus negativi esse quidem æqualem sinui positivo, sed tamen negativum. Quamobrem valebunt hujusmodi formulæ

$$Cb.-n\mu = \frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{n} + \overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Sb.-n\mu = \frac{-(\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{n} + (\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$Cc.-n\mu = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n} + \overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\mu = \frac{-(\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n} + (\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{n}}{2r^{n-1}}.$$

Quæ formulæ in duas fractiones transmutari possunt, in quibus negativum fit divisoris exponens in hunc modum

$$Cb.-n\mu = \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{-n}}$$

$$Sb.-n\mu = \frac{-r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{-n}}$$

$$Cc.-n\mu = \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}$$

$$\sqrt{-1}Sc.-\mu = \frac{-r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}} + \frac{r^{-n+1}}{2.\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}:$$

Si

Si redigas fractiones hujusmodi ad eumdem denominatorem, & pro communi divisore $\overline{Cb.\mu}^{2} - \overline{Sb.\mu}^{2}$, aut $\overline{Cc.\mu}^{2} + \overline{Sc.\mu}^{2}$ substituas rr illi æqualem ex natura hyperbolæ æquilateræ, & circuli, invenies æquationes quatuor, quæ a nobis probandæ sunt, scilicet

$$Cb.-n\mu = \frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{-n} + \overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$Sb.-n\mu = \frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{-n} - (\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}$$

$$Cc.-n\mu = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n} + \overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}.$$

$$\sqrt{-1}.Sc.-n\mu = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n} - (\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{-n}}{2r^{-n-1}}.$$

Quamobrem veritas formularum, quas præmisimus, demonstrata est in omnibus numeris rationalibus. Quod spectat ad irrationales, potest ea demonstrari adhibito calculo infinitesimali. Sed quum hoc ad præsens institutum nostrum minime pertineat, satis nobis erit in præsentia, illam ex inductione probasse.

13. Postquam ea, quæ necessaria visa sunt, de sinibus, & cosinibus ita demonstravimus, ut ad eadem deinceps redire non sit opus, accedamus propius ad constructionem radicum tertii gradus, quæ formulis cardanicis continentur. Radices illæ, ut constat ex capite præcedenti hanc habent formam

$$x = \overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{3}}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{3}}}^{\frac{1}{3}}.$$

Ut elegantiæ serviam divido per 2 hoc modo $\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{3}}}^{\frac{1}{3}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^{3}}}^{\frac{1}{3}}}{2}$, atque determino $\frac{x}{2}$ dimidium radicis quæsitæ. In prima hypothesi statuo tam a, quam b positivam. Duplicem casum in hoc distinguamus oportet; nam si $\frac{bb}{4} > a^{3}$, nihil imaginarii formula continebit; si vero $\frac{bb}{4} < a^{3}$, aderit radix imaginaria. In primo casu comparanda est cum expressione logarithmi subtripli, nempe cum $Cb.\frac{\mu}{3} = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}$; in secundo ca-

fu comparanda est cum formula arcus subtripli, nimirum cum

$$Cr.\frac{\mu}{3} = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{3}} + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}},$$

14. Fiat primi casus collatio, & orientur æquationes duæ $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{r^{-2}}$, $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{r^{-2}}$. Facta harum æquationum additione, & subtractione exurget $\frac{b}{2} = \frac{Cb.\mu}{r^{-2}}$, & $\sqrt{\frac{bb}{4} - a^3} = \frac{Sb.\mu}{r^{-2}}$; atqui $\overline{Cb.\mu}^2 - \overline{Sb.\mu}^2 = rr$ ergo $\frac{bb}{4} - \frac{bb}{4} + a^3 = \frac{rr}{r^{-4}}$, seu $a^3 = r^6$, seu $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2}$ erit $Cb.\frac{\mu}{3}$ existente μ eo logarithmo, cujus cosinus $= \frac{b}{2a}$ existente sinu toto $= a^{\frac{1}{2}}$. Hujusmodi autem orietur constructio (*Fig.* 1). Descripta hyperbola æquilatera, cujus sinus totus, seu semiaxis $AC = a^{\frac{1}{2}}$, abscinde $CM = \frac{b}{2a}$, & excitetur sinus MN. Ex punctis A, N demittantur in assymptotum normales AK, NP. Inter CK, CP inveniantur duæ mediæ proportionales, quarum prima sit CG. Ex G duc GE perpendicularem assymptoto, tum sinum EB, qui determinat cosinum $CB = \frac{x}{2}$.

15. Fiat alterius casus comparatio, & ex duabus æquationibus

$\frac{b}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{-2}}$,

$\frac{b}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{-2}}$ invenietur $\frac{b}{2} = \frac{Cc.\mu}{r^{-2}}$,

$\sqrt{a^3 - \frac{bb}{4}} = \frac{Sc.\mu}{r^{-2}}$; atqui $\overline{Cc.\mu}^2 + \overline{Sc.\mu}^2 = rr$; ergo $\frac{bb}{4} + a^3 - \frac{bb}{4} = \frac{r^2}{r^{-4}}$,

sive $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2}$ erit $Cc.\frac{\mu}{3}$, dummodo sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, & $Cc.\mu = \frac{b}{2a}$. Ex his pleno alveo fluit constructio. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, capiatur $CM = \frac{b}{2a}$, & agatur sinus MN, (*Fig.* 2) erit A N ar-

arcus $=\mu$. Arcus iste in tres partes dividatur, quarum prima sit $AE = \frac{\mu}{3}$; Ducatur sinus EB, cosinus $CB = \frac{x}{2}$. Non unus tantum arcus AN, sed infiniti existunt, quorum cosinus est $CM = \frac{b}{2a}$; nempe posita circumferentia circuli $= c$, & arcu $AN = \mu$, omnes arcus
μ, $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$ &c., imo & alii
μ, $-c+\mu$, $-2c+\mu$, $-3c+\mu$ &c., qui, ut vides, numero infiniti sunt, quos pariter si dividas in partes tres, invenies novos arcus $A\,2\,E$, $A\,3\,E$, quorum cosinus $C\,2\,B$, $C\,3\,B$, exhibent reliquos valores radicis $\frac{x}{2}$. Ne tamen putes, reales valores radicis $\frac{x}{2}$ esse numero infinitos, sunt enim tres solummodo. Nam divisio trium arcuum μ, $c+\mu$, $2c+\mu$, dat tria puncta E, 2 E, 3 E; at reliquorum arcuum divisiones in hæc eadem puncta cadent, proinde tres duntaxat habebuntur radices æquationis reales, quod clarius explicabimus capite sequenti in problemate de arcus trisectione.

15. Primæ hypothesi affinis est altera, in qua supponitur quidem a positiva, at b negativa. In hac æquatio, si speciei b mutatur signum, sequentem induit formam $\frac{x}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}$, quæ comparanda est cum cosinu logarithmi subtripli, si $\frac{bb}{4} > a^3$, cum cosinu arcus subtripli, si $\frac{bb}{4} > a^3$. Comparatio præbet eosdem valores, ac hypothesis prima cum hoc tantum discrimine, quod cosinus μ provenit negativus, existente sinu positivo. Quare in casu $\frac{bb}{4} > a^3$ hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera, cujus semiaxis $CA = a^{\frac{1}{2}}$, (*Fig.* 3) abscinde $CM = \frac{b}{2a}$, quæ quando negativa inventa est, sumitur ad partem cosinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN, quæ statuitur ad partes sinuum positivorum, quia sinus inventus est positivus. Ex N in assymptotum CK demittatur normalis NP, Inter GK, CP inveniantur duæ mediæ proportionales, quarum prima sit CG. Sit GE perpendicularis assymptoto, & EB axi, cosinus CB, qui negativus est, erit $= \frac{x}{2}$. In casu secundo ejusdem hypothesis, quum scilicet $\frac{bb}{4} > a^3$, hæc habetur constructio, quæ docet, omnes radices esse reales. Descripto circulo, cujus radius $= a^{\frac{1}{2}}$; abscindatur negativus cosinus $CM = \frac{b}{2a}$, (*Fig.* 4.) & excitetur positivus sinus MN. Arcus AN dividatur in partes æquales tres, quarum prima sit AE. Ducto sinu EB, determinatur cosinus CB, qui erit unus ex valoribus $\frac{x}{2}$. Vocato $AN = \mu$,

 ca-

capiantur tertiæ partes arcuum $c+\mu$, $2c+\mu$, quarum puncta ultima sint 2 E, 3 E, quæ determinant alios valores $\frac{x}{2}$, C 2 B, C 3 B.

16. Tertia hypothesis, in qua b positiva sit, a negativa, mutato signo speciei a, hujus formæ æquationem præbet

$$\frac{x}{2}=\frac{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}.$$

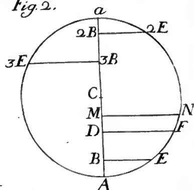
Hæc quum nihil imaginarii contineat ad hyperbolam est referenda. Nonnemo primoribus oculis formulam intuens fortasse judicabit, eam comparandam esse cum expressione cosinus logarithmi subtripli. Sed si comparationem instituat, cognoscet statim, sinum totum imaginarium oriri. Quod non indicat, constructionem esse impossibilem, sed formulam non per cosinum, sed per sinum hyperbolicum esse construendam. Quod ex eo quoque poteras colligere, quia si secus fieret, sinus major esset cosinu, quod in hyperbola omnino impossibile est. Itaque ut formulam referamus ad sinum, ita eam disponamus $\frac{x}{2}=\frac{\left(\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}+\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{2}$, quæ comparanda est cum sequenti

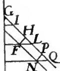
$$Sb.\frac{\mu}{3}=\frac{\left(Cb.\mu+Sb.\mu\right)^{\frac{1}{3}}-\left(Cb.\mu-Sb.\mu\right)^{\frac{1}{3}}}{2r^{-\frac{2}{3}}}.$$

Collatio sufficit æquationes duas $\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}+\frac{b}{2}=\frac{Cb.\mu+Sb.\mu}{r^{-2}}$, $\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}-\frac{b}{2}=\frac{Cb.\mu-Sb.\mu}{r^{-2}}$, ex quibus propter ambiguitatem signorum provenit $\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}=\frac{Cb.\mu}{r^{-2}}$; $\frac{b}{2}=\frac{Sb.\mu}{r^{-2}}$; atqui $\overline{Cb.\mu}^2-\overline{Sb.\mu}^2=rr$; ergo $\frac{bb}{4}+a^3-\frac{bb}{4}=a^3=r^6$, & $a^{\frac{1}{2}}=r$. Describe hyperbolam, cujus sinus totus $CA=a^{\frac{1}{2}}$ (*Fig.* 1); duc AK normalem assymptoto; accommoda sinum $MN=\frac{b}{2a}$; & assymptoto normalem demitte NP. Inveni CG primam ex duabus mediis proportionalibus inter CK, CP, ex G duc GE normalem assymptoto, & ex E agatur sinus EB, qui erit $=\frac{x}{2}$, nempe quæsitæ radicis dimidio.

16. Quar-

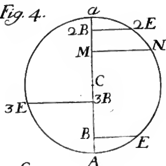
Fig. 2.


a
2B
2E
3E
3B
C
M
N
D
F
B
E
A

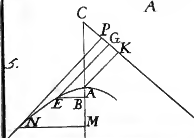

G
I
H
L
F
P
Q
N


N

Fig. 4.


a
2B
2E
M
N
C
3E
3B
B
E
A

5.


C
P
G
K
A
E
B
N
M

16. Quartam, & ultimam hypotesim, in qua non minus a, quam b negativa est, priori similem breviter expedio. Formula in hac provenit hujusmodi

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\sqrt{\frac{bb}{4}+a^3}+\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{2},$$

quæ collata cum expressione sinus logarithmi subtripli easdem determinationes præbet, ac in hypothesi superiori, cum hoc tantum discrimine, quod $Sb.\mu$ provenit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes sinuum negativorum applicetur $MN = \frac{b}{2a}$, (*Fig.* 5.) & ducta in assymptotum normali NP, inveniatur CG prima ex duabus mediis proportionalibus inter CK, CP. Agatur assymptoto normalis GE, & sinus EB, qui æquabit radicem $\frac{x}{2}$. Hac methodo expressiones cardanicæ, quæ proveniunt ex resolutione radicum tertii gradus, non solum utilitatem habent in quæstionibus arithmeticis, sed etiam in geometricis, quæ constructionem accipiunt vel descripto circulo, divisoque arcu in tres partes æquales, vel descripta hyperbola æquilatera, inventisque inter duas datas duabus mediis proportionalibus.

CAPUT DECIMUM TERTIUM

Áliquot tertii, & quarti gradus problemata resolvuntur.

1. PRoblema primum. Inter duas datas a, b invenire duas medias proportionales. Prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, b vocetur x. Conditio problematis statim æquationem offert; nempe $a :: x :: \frac{x^2}{a} :: \frac{x^3}{aa} = b$; seu $x^3 = a^2 b$, quæ est æquatio tertii gradus. Ut hanc resolvas in duas indeterminatas secundi gradus, pone $xx = ay$, ex qua provenit $xy = ab$, quæ duæ æquationes una ad parabolam, alia ad hyperbolam ita construuntur. Ad angulum rectum (angulo enim recto utemur, nisi elegantia prohibeat) constituantur AC, AQ (*Fig.* 1). Abscinde in prima AC, $= a$, atque hac parametro ad axem AQ delineetur parabola ATM. Seca in altera AB $= b$, & clauso parallelogrammo ACDB inter assymptota AQ, AC describe hyperbolam MD transeuntem per punctum D. Curvæ duæ descriptæ se in M dumtaxat intersecant. Normales rectis AC, AB agantur MP, MQ. Recta AP, seu MQ dabit primam ex mediis proportionalibus inter AC, AB $= x$; immo AQ, seu MP dabit secundam $= \frac{x^2}{a}$.

2. Si duas parabolas ad constructionem mavis adhibere, multiplica æquationem $x^3 = a^2 b$ per x, ut fit $x^4 = a^2 bx$. Pone ut supra $x^2 = ay$, unde proveniet $yy = bx$. Descripta ut supra parabola ATM, aliam describe ASM para-

parametro AB $= b$ ad axem AP. Duarum parabolarum intersectio M præbebit AP primam, AQ secundam ex duabus mediis proportionalibus inter AC, AB. Ad inveniendas tres æquationes, quas adhibuimus, non est necesse devenire ad æquationem determinatam. Nam vocatis mediis x, y est $a : x :: y :: b$; ergo statim habemus $ay = xx$, $bx = yy$, $ab = xy$.

3. Si libeat adhibere circulum, hanc sequere methodum. Duas æquationes ad parabolas simul junge in hunc modum $yy - ay + xx - bx = 0$, sive $\overline{y - \frac{a}{2}}^2 + \overline{x - \frac{b}{2}}^2 = \frac{aa}{4} + \frac{bb}{4}$ æquatio ad circulum, qui in hunc modum construitur. Sume CD $= \frac{b}{2}$, DE $= \frac{a}{2}$ (*Fig.* 2) positas ad angulum rectum in D, junge CE, quo radio describe circulum EAB. Parallelam diametro AB duc EP, erunt EP $= x$, MP $= y$. Quare si vertice E parametro $= b$, ad axem EP describas parabolam, intersectio M parabolæ, & circuli dabit EP primam, MP secundam ex mediis proportionalibus inter a, b. Quoniam in uno tantum puncto curvæ se secant, una tantum est realis solutio problematis.

4. Problema secundum. Intra rectum angulum ABC (*Fig.* 3.) ducere lineam AC transeuntem per datum punctum D ita, ut ex vertice B demissa in ipsam normali sit pars AE $=$ DC. Supponatur factum, & ex punctis D, E agantur DN, EM parallelæ BA. Quando AE $=$ DC, etiam BM $=$ NC, ergo BN $=$ MC. Vocetur DN $= a$, BN $=$ MC $= b$, NC $=$ BM $= x$. Quum ME sit media proportionalis inter BM, MC propter angulum rectum BEC erit EM $= \sqrt{bx}$; atqui NC : ND :: MC : ME; ergo $x : a : b : \sqrt{bx} :: \sqrt{b} : \sqrt{x}$; ergo $x^3 = a^2 b$, quæ formula, ut ex superiore problemate patet, docet, x esse primam ex mediis duabus proportionalibus inter a, b. Hoc idem sine speciebus poterat facile demonstrari. Agantur DP, EQ parallelæ. Constat AQ $=$ BP, & AP $=$ BQ. Itaque ajo CN, AP esse duas medias proportionales inter DN, DP. Nam ob angulum rectum BEA est AQ : QE, seu ND : NC :: QE $=$ NC : BQ $=$ AP. Sunt itaque in continua propositione ND, CN, AP. Præterea BM $=$ NC : ME $=$ AP :: ME $=$ AP : MC $=$ PD; ergo sunt pariter continue proportionales CN, AP, DP; igitur NC, AP sunt mediæ proportionales inter datas DN, DP. Quare soluto superiori problemate hoc quoque solutionem accipit, & per hujus solutionem duæ mediæ proportionales inveniuntur.

5. Ad hujusce problematis solutionem ita sine speciosa analysi possunt loci duo determinari. Ob angulum rectum BEC erit EM^2 $=$ MC . BM $=$ BN . BM. Quare si vertice B, axe BC, parametro BN describatur parabola; in hac curva situm erit punctum E. Similiter quum sit EM : DN :: MC $=$ BN : NC $=$ BM habebimus EM . BM $=$ BN . ND quæ est proprietas hyperbolæ inter asymptota; ergo si inter asymptota BA, BC describatur hyperbola transiens per punctum D, punctum E erit pariter in hac curva. Quare aliud esse non potest, quam punctum intersectionis parabolæ, & hyperbolæ.

6 Sed elegantior fortasse erit sequens solutio. Juncta BD describatur super ipsam semicirculus BED. In hujus periferia jacebit punctum E ob angulum rectum BEC. Deinde inter asymptota BA, BC describatur hyperbola transiens per punctum D. Quoniam hujus hyperbolæ proprietas est, ut ubique

EA

$EA = CD$ punctum E in hyperbola jacere debet. Ergo in intersectione hyperbolæ, & circuli: igitur si ab intersectione jungatur E D, quæ utrinque producatur, hæc erit linea quæsita. Elegimus potius hyperbolam quam parabolam, quia hyperbola inservit solvendo problemati, tametsi angulus A B C rectus non fuerit. Imo eadem solutio valebit, etiamsi angulus B E C rectus esse non debeat, sed quilibet datus, dummodo supra D B ejusmodi segmentum constituatur, quod datum angulum capiat. Quod si $AE : DC$ debeat esse in qualibet ratione data, docuimus Cap. 7. Num. 4. hoc pariter ab hyperbola præstari; quare hujus, & circuli intersectio solutionem problematis sufficiet.

7. Problema tertium. Datum arcum in tres æquales partes dividere. Arcus datus M P N, (*Fig.* 4.) cujus chorda M N, divisus sit in punctis P, Q, ut chordæ M P, P Q, Q N inter se æquales sint. Age radios C M, C P, C Q, C N, & ex puncto P duc P Z parallelam C Q. Quoniam angulus $MYP = CYR = CPQ = CMP$, triangula duo C M P, M Y P erunt similia; ergo $MY = MP$; eodem modo demonstratur $NR = QN$. Præterea $CM : MP :: MP : PY$. Triangulum C Y R est simile Z P Y; sed idem C Y R est simile C P Q, seu C M P, seu M P Y; ergo M P Y est simile Z P Y; ergo $MP : PY : PY :: YZ$; igitur Y Z est quarta proportionalis post C M, M P. Vocata itaque $CM = a$, $MP = x$, erit $YZ = \frac{x^3}{aa}$. Voca $MN = b$. Quoniam $MN = RN + ZR + MY - ZY$ fiet æquatio $b = 3x - \frac{x^3}{aa}$; ergo $x^3 - 3a^2x + a^2b = 0$.

8. Ut exemplum proponam constructionis peractæ per circulum, & ellypsim speciei datæ, cujus axes sint ut $\sqrt{2} : 1$, multiplico inventam æquationem per x, ut habeam $x^4 - 3aaxx + a^2bx = 0$. Pono $xx = ay$, ut facta substitutione proveniat æquatio $yy - 3xx + bx = 0$, cui addo $xx - ay = 0$ multiplicatam per m, ut oriatur $yy - may + \begin{matrix} mx^2 \\ -3x^2 \end{matrix} + bx = 0$. Ut circulus habeatur ponenda est $m = 4$, & æquatio nascetur $yy - 4ay + xx + bx = 0$. Ad ellypsim speciei datæ fiat $m = 5$, & æquatio nascetur $yy - 5ay + 2xx + bx = 0$. Ut construamus ellypsim adde $\frac{25aa}{4}$, & erit $\overline{\frac{5}{2}a - y}^2 = \frac{25aa}{4} - 2xx - bx$; dividatur per 2 $\frac{1}{2} \cdot \overline{\frac{5}{2}a - y}^2 = \frac{25aa}{8} - xx - \frac{b}{2}x = \frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} - (\overline{x + \frac{b}{4}}^2$; ergo $\frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} - (\overline{x + \frac{b}{4}}^2 : \overline{\frac{5}{2}a - y}^2 :: 1 : 2 :: \frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16} : \frac{25aa}{4} + \frac{bb}{8}$. Semiaxe majori $CA = \sqrt{\frac{25aa}{4} + \frac{bb}{8}}$, & minore $CB = \sqrt{\frac{25aa}{8} + \frac{bb}{16}}$ describatur ellypsis A B D E, (*Fig.* 5.) abscinde $CF = \frac{5a}{2}$, duc applicatam F L, quæ $= \frac{b}{4}$. Age L Q parallelam A C, erunt $LP = y$, $PM = x$. Ut circulus con-

conjungatur cum ellypsi, ita dispone æquationem $\overline{2a-y}^2+\overline{x+\frac{b}{2}}^2=4aa+\frac{bb}{4}$, ex qua hæc oritur constructio, abscinde $FS=2a$, cui sit normalis $RS=CQ=\frac{b}{4}$; age RL. Centro R radio RL describe circulum, in quo pariter LP erunt $=y$, $PM=x$. Circulus secabit ellypsim præter punctum L ubi fit $x, y=0$ in tribus punctis M, 2M, 3M, ex quibus si agantur ordinatæ MP, 2M2P, 3M3P, hæ sufficient nostræ æquationis radices duas positivas, unam negativam.

9. Si velles usurpare in constructione circulum datum, nihil faciendum est aliud, quum describere ellypsim, cujus axes sint ad axes AD, BE, ut radius circuli dati ad RL; tum semper usurpatis proportionalibus eodem modo peragatur constructio; ordinatæ quas intersectiones præbebunt non erunt quidem æquationis nostræ radices; sed ad has radices erunt in ratione data rectæ RL ad radium circuli dati. Cui problemati inserviant tres radices inventæ paulio infra ostendam.

10. Verum arcum datum in tres partes ita elegantius dividemus. Sit arcus datus MPQN in tres æquales partes divisus in punctis P, Q, (*Fig. 6*) ut chordæ MP, PQ, QN æquales sint. A punctis P, Q demittantur normales PS, QT in chordam MN. Rectæ MN, ST bifariam dividantur ab eodem puncto D. Vocetur $DM=a$, $DS=x$, $SP=y$, erit $ST=PQ=MP=2x$; ergo, quum sit $MP^2=MS^2+PS^2$, erit analytice $4x^2=aa-2ax+xx+yy$, vel $xx+\frac{2ax}{3}+\frac{aa}{9}=\frac{4aa}{9}+\frac{yy}{3}$. Pone $x+\frac{a}{3}=z$, ut sit $zz-\frac{4aa}{9}: yy::1:3::\frac{4aa}{9}:\frac{4aa}{3}$, quæ æquatio est ad hyperbolam, cujus semiaxis primus $=\frac{2a}{3}$, secundus $=\frac{2a}{\sqrt{3}}$, quæ ita construitur divide MN in tres partes æquales MR, RA, AN. Centro A cum primo semiaxe $AR=AN=\frac{2a}{3}$, & cum secundo $=\frac{2a}{\sqrt{3}}$ describatur hyperbola. Ejus intersectio P cum circulo dabit MP tertiam partem arcus MN; ex puncto P duc PQ parallelam MN, & punctum Q determinabit alias duas tertias partes PQ, QN.

11. Alio modo hæc solutio enunciari potest. Per punctum D age DB normalem MN. Foco M, vertice R, directrice DB describe hyperbolam, quæ secabit circulum in P ita, ut arcus MP sit tertia pars arcus MPQ. Quod ita demonstratur. Junge MP, duc directrici normalem PB, quam produc in Q. Ex proprietate hyperbolæ MR : RD :: MP : PB; sed MR est dupla RD; ergo MP dupla PB; sed PQ est etiam dupla PB; ergo $MP=PQ$, cui etiam est æqualis QN. Hyperbola ita descripta invenietur habere centrum in A, & oppositum verticem in N.

12. Hyperbola secat circulum non solum in puncto P, sed etiam in aliis duobus punctis 2P, 3P. Quid istæ intersectiones indicent videndum est. Punctum P trisecat arcum datum MPN. Punctum 2P trisecat arcum coalescentem ex integra circumferentia, & arcu dato. Nam ductis M2P, 2P2Q parallela MN, & 2QN, hæ omnes ex analyticos constructione æquales esse debent; ergo

go arcus MP2P, 2P3P2Q, 2QMN æquales erunt; atqui horum summa dat integram circumferentiam simul cum arcu dato MPN; ergo singuli ex tribus arcubus sunt tertia pars circumferentiæ simul, & arcus dati. Similiter punctum 3P inservit dividendis trifariam duabus circumferentiis simul cum arcu dato. Etenim æquales sunt chordæ M3P, 3P3Q, 3QN, quarum secunda est parallela MN; ergo arcus semicircumferentia majores MN3P, 3PM3Q, 3QMN æquales erunt; sed isti simul sumpti dant duas circumferentias, & arcum datum MN; ergo singuli sunt tertia pars duarum cicumferentiarum & arcus dati. Ad dividendas tres circumferentias & arcum datum, inservit punctum P, quatuor circumferentias & arcum datum punctum 2P, quinque circumferentias & arcum datum punctum 3P, atque ita deinceps. Similiter punctum 3P in tres partes æquales partitur circumferentiam dempto arcu dato, punctum 2P duas circumferentias dempto arcu dato, punctum P tres circumferentias dempto dato arcu, atque ita deinceps. Quare apparet, æquationem ejusque constructionem inservire dividendis in tres partes æquales arcubus infinitis, nimirum illis omnibus, qui terminos habent in punctis M, N, qui infiniti sunt numero. Quare problema esset gradus indefiniti, aut trascendentis, nisi tria puncta P, 2P, 3P successive redirent eadem.

14. Facile est cognitu, puncta P, 2P, 3P dividere periferiam in tres æquales partes. Nam vocata circumferentia $= c$, & arcu dato $= a$, est $MP2P = \frac{c+a}{3}$; sed $MP = \frac{a}{3}$; ergo $P2P = \frac{c}{3}$. Similiter $MN3P = \frac{2c+a}{3}$; sed $M2P = \frac{c+a}{3}$; ergo $2P3P = \frac{c}{3}$; ergo etiam $P3P = \frac{c}{3}$. Circumferentia ergo in tres partes divisa est in punctis P, 2P, 3P. Nihil diximus de puncto N, in quo circulus, & hyperbola pariter se intersecant. Nam si ex puncto M ad N recta ducatur, tum ex N eidem parallela MN, & ex M iterum MN tres rectæ coincidunt; quare licet sint æquales, quum coincidant, trisectioni arcus non inserviunt.

15. Problema quartum. Datis duabus rectis ad angulos rectos se intersecantibus in C (*Fig.7.*), ex dato puncto A ducere lineam AEF ita, ut pars EF sit æqualis datæ. Clauso rectangulo ADCB, vocetur $BC = a$, $DC = b$, $EF = c$, $BE = x$, ergo $CE = a - x$, & $AE = \sqrt{bb + xx}$. Quoniam est AE : BE :: FE : CE, erit analytice $\sqrt{bb+xx} : x :: c : a - x$, & quadrando $b^2 + x^2 : x^2 :: c^2 : a^2 - 2ax + x^2$, factoque transitu ad æquationem invenietur

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0. \\ &+ b^2x^2 \\ &- ccxx \end{aligned}$$

16. Ad hanc construendam pono $ab = xy$, & substitutio dat

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 &+ a^2x^2 - 2bx^2y + x^2y^2 = 0, \text{ \& dividendo per } xx \\ &+ b^2x^2 \\ &- c^2x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax &+ aa - 2by + yy = 0, \text{ sive } \overline{a-x}^2 + \overline{b-y}^2 = cc, \text{ quæ æquatio est} \\ &+ bb \\ &- cc \end{aligned}$$

ad

ad circulum. Constructio itaque hæc nascitur. Fiant duo parallelogramma CH, AK omnino æqualia DB, atque inter asymptota CBK, ABH describantur hyperbolæ oppositæ transeuntes per puncta G, I. Deinde centro G, radio $=c$ describatur circulus. Ex puncto intersectionis hyperbolæ, & circuli ex. ca. M agatur ordinata ME. Ex A per E ducatur AEF, erit EF $=c$. Si circulus secet utrumque ramum hyperbolæ, quatuor solutiones recipiet problema. In una, linea $=c$ posita erit intra angulum BCG, in altera intra angulum DCN, in aliis intra angulum ABK. Primæ duæ quæcumque sit linea $=c$ semper possibiles sunt, reliquæ evadunt sæpissime imaginariæ, quoties circulus non secat ramum transeuntem per I. Si circulus tangit hyperbolam, duæ coeunt in unam, & duo erunt valores æquales x negativæ, qui casus medius est inter reale, & imaginarium. Si ponam $c = \overline{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}^{\frac{3}{2}}$, & $c^2 = a^2 + 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}} + b^2$ æquatio quarti gradus in hanc mutatur $x^4 - 2ax^3 - 3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0$. Observo hanc bis

$$-3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}x^2$$

esse divisibilem per binomium $x + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$, & facta divisione oriri $x^2 - 2ax - 2b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}x + b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} = 0$. In hoc itaque casu duo sunt valores æquales negativi x, & duæ solutiones in unam coibunt: circulus igitur in hoc casu tanget hyperbolam. Reliqui valores x determinantur resoluta æquatione secundi gradus, & sunt $x = a + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} \pm \sqrt{a^{2} + 2a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}}$. Ex his collige, quatuor esse solutiones reales si $c > \overline{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}^{\frac{3}{2}}$; duas esse reales, duas imaginarias, si $c < \overline{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}^{\frac{3}{2}}$.

17. Problema quintum. Super datam AB (*Fig.* 8.) formare triangulum isosceles ABC, cujus angulus C sit tertia pars tum anguli A, tum anguli B. Dividatur angulus B in tres partes æquales ductis lineis BD, BE. Triangulum BAE statim prodit simile CAB; ergo CA : AB :: AB : AE; quare vocatis CA $=$ CB $= x$, BA $=$ BE $= a$, erit $x : a :: a :$ AE $= \frac{a^2}{x}$; ergo CE $= x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$. Triangulum DAB est isosceles; ergo DA $=$ AB $= a$.

Trian-

Triangulum CBE est simile BDE; ergo CE:CB::BE:DB, sive analytice $\frac{x^2-a^2}{x}:x::a:DB=\frac{ax^2}{x^2-a^2}$; sed propter triangulum CDB isosceles $CD=DB=\frac{ax^2}{x^2-aa}$; ergo, quum $DA+DC=AC$, erit $a+\frac{ax^2}{x^2-aa}=x$, ex qua prodit æquatio tertii gradus $x^3-2ax^2-a^2x+a^3=0$.

18. Ad construendam æquationem utar una eademque parabola in duabus positionibus constituta. Multiplico æquationem per x, novamque radicem introduco, idest $x=0$; provenit autem $x^4-2ax^3-a^2x^2+a^3x=0$. Pono $x^2-ax=ay$, & quadrando $x^4-2ax^3+a^2x^2=a^2y^2$, demptaque ex una parte $2a^2x^2$, ex altera $2a^2y+2a^3x$, orietur $x^4-2ax^3-a^2x^2=a^2y^2-2a^2y-2a^3x$, factaque substitutione, & divisione per aa, $yy-2ay-ax=0$. Sit $AB=a$ linea data, quæ bifariam dividatur in F (*Fig.9.*), & erigatur normalis $FG=\frac{a}{4}$. Vertice G, & parametro $=a$, describatur parabola, quæ transibit per puncta A, B. Rectæ AL, LI erunt coordinatæ x, y æquationis $xx-ax=ay$. Rectæ AB erigatur normalis $AH=AB=a$, & parallela $HK=a$. Punctum K cadet extra parabolam jam descriptam. Vertice K, axe KH, eademque parametro $=a$, describatur eadem prorsus parabola, quæ transibit per punctum A, & rectæ AL, LI erunt coordinatæ x, y æquationis $yy-2ay-ax=0$. Parabolæ istæ duæ secabunt sese in punctis I, 2I, 3I, quare tres erunt radices æquationis, nempe AL, A2L, A3L. Prima positiva & $>a$; secunda negativa, & aliquantum $<a$; tertia positiva pariter $<a$, omnes autem sunt $>\frac{a}{2}$. De intersectione in puncto A non loquor, quia præbet radicem introductam $x=0$.

19. Videndum est sedulo, quid indicent tres radices reales. Patet ex ipsa analysi primam $>a$ præbere triangulum ABC (*Fig.8.*), in quo angulus ACB est ad CAB::1:3. Ad detegendum triangulum, quod sufficit radix altera negativa aliquantum $<a$, sequamur præparationem effectam. Sit hoc triangulum ACB (*Fig.10.*). Ducenda est BE ita, ut triangulum ABE sit simile ACB, ut $AB=BE$, & angulus $ACB=ABE$. Deinde ducenda BD ita, ut triangulum ECB sit simile EBD; debet autem esse $DB=DC$, $DA=AB$; igitur angulus $CBE=ADB$; ergo $ACB=CBA+ADB=CAB+ADB=2ADB+ABD$; sed $ADB=ABD$; ergo $ACB=3ADB$; sed $CAB=ADB+ABD=2ADB$; ergo ang. ACB:CAB::3:2. Reapse si in hac hypothesi ponam $AC=x$, redit eadem prorsus æquatio. Quapropter radix negativa minor aliquantum quam a inservit construendo triangulo isoscele, in quo angulus ad verticem est ad angulum ad basim::3:2.

20. Spectanda restat radix minima. Sit hæc AC (*Fig.11.*), factoque triangulo isoscele ACB, ducatur BE, quæ æquet AB, & triangulum ABE sit simile ACB. Deinde agatur BD ita, ut triangulum BBD sit simile ECB. Debet esse $BD=DC$, & $AD=AB$. His positis angulus $ACB=ABE=$

ABC + CBE = CAB + BDE; sed BDE quum sit æqualis duobus æqualibus CBD, BCD erit duplus BCD, qui æquat duos æquales CAB, CBA; adeoque est duplus CAB; igitur ACB quintuplus CAB. Quare radix minima inservit construendo triangulo isoscele, in quo angulus ad verticem ad alterutrum ex angulis ad basim se habeat ut 5 : 1.

21. Quodlibet ex tribus triangulis conducit ad divisionem circuli in septem partes æquales. Etenim inscribatur circulo triangulum ACB (*Fig.* 12.), cujus angulus ACB sit subtriplus cujuslibet angulorum A, B, erit arcus AB septima pars circumferentiæ. Inscribatur triangulum DCE, in quo angulus DCE sit ad unum ex duobus D, E ut 3 : 2, dimidium arcuum DC, CE erit circumferentiæ pars septima. Demum inscribatur triangulum FCG habens angulum FCG quintuplum tam anguli F, quam G, quilibet ex arcubus CF, CG erit pars septima circumferentiæ.

22. Hoc idem problema per circularis arcus trisectionem ope theoriæ sinuum, & cosinuum non ineleganter ita solvetur. Æquationem $x^3 - 2axx - a^2x + a^3 = 0$, ut fractiones vitentur, transmuto facta $a = 3f$, ut f sit datæ a pars tertia. Orietur æquatio $x^3 - 6fx^2 - 9ffx + 27f^3 = 0$. Ut secundus terminus arceatur pono $x = z + 2f$, & invenio $z^3 - 21ffz - 7f^3 = 0$. Quæ resoluta more cardanico, & facta divisione per 2 fiet

$$\frac{z}{2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{7f^3}{2} + \sqrt{\frac{7^2}{2^2}f^6 - 7^3f^6}} + \sqrt[3]{\frac{7f^3}{2} - \sqrt{\frac{7^2}{2^2}f^6 - 7^3f^6}}}{2}$$

, ex qua nascitur hæc constructio. Radio $KM = f\sqrt{7}$ describe circulum. Sume $KH = \frac{f}{2}$, & duc sinum HI (*Fig.* 13.). Arcum MI, circumferentiam + arcum MI, duas circumferentias + arcum MI trisecta in punctis Q, 2Q, 3Q, & duc sinus QP, 2Q2P, 3Q3P, erunt KP, K2P, K3P valores tres $\frac{z}{2}$. Abscinde $KL = f$, erunt LP, L2P, L3P valores $\frac{x}{2}$; medius negativus est, reliqui positivi. Quare eorum dupla dabunt triangulorum latera.

23. Problema sextum. In linea positione data CE (*Fig.* 14.) invenire punctum E, ad quod si ex punctis datis A, B ducantur rectæ AE, BE, tum si excitetur perpendicularis RS, sinus anguli AER sit ad sinum anguli BES in ratione data. Per A agatur FACD perpendicularis CE, tum producatur BE in F. Angulus AER = EAC, BES = EFC; ergo sinus angulorum EAC, EFC debent esse in ratione data. Abscinde FP = AE, & duc PQ normalem AC. Sumpto pro sinu toto AE, aut FP, constat EC, PQ esse sinus angulorum EAC, EFC; ergo EC : PQ debet esse in ratione data; sed EC : PQ :: EF : FP = AE; Ergo EF : EA debent esse in ratione data. Postquam in hoc conversum est problema propositum, comple rectangulum CG. Voca $CF = x$, $FG = CE = y$, $AC = a$, & demissa in FC normali BD sit $CD = b$, $BD = c$. Similitudo triangulorum dat FC : CE :: FD : DB, sive analytice $x : y :: b + x : c$, sive $cx = by + xy$, quæ est æquatio hyperbolæ inter assymptota. Præterea

FE

$FE = \sqrt{xx+yy}$, $AE = \sqrt{aa+yy}$, denominataque ratione data $m:a$, erit $xx+yy : aa+yy :: mm : aa$. Si $m = a$, & ratio data foret æqualitatis, ex ultima æquatione colligeretur $x = \pm a$, quod etiam sine calculo apertum est. Si $m > a$, æquatio est ad hyperbolam; si $m < a$, est ad ellypsim. Curva autem hæc simul cum hyperbola inter asymptota problematis exhibet solutionem.

24. Constructionem perficiamus in suppositione $m > a$. Producatur ad utramque partem BD, & huic ducatur perpendicularis BH. Inter asymptota BD, BH, describatur hyperbola transiens per punctum C, erunt CF, FG coordinatæ x, y primæ æquationis. Abscinde $CM = C2M = m$, & hoc semiaxe primo, altero vero $= \frac{ma}{\sqrt{mm-aa}}$, describe hyperbolam MG. In duobus punctis G, 2G hyperbolæ secant sese, ex quibus si demittantur ad CE normales GE, 2G2E, determinabuntur duo puncta E, 2E, quæ duplicem dant problematis solutionem. Si fuerit $m < a$, centro E, semiaxibus m, $\frac{ma}{\sqrt{a^2-m^2}}$ describenda ellypsis, quæ semper hyperbolæ ramum CG in duobus punctis secabit, oppositum vero aut nusquam, aut in punctis duobus.

25. Problema septimum. Dato circulo, cujus centrum C, (*Fig.* 15.) datisque duobus punctis A, B, invenire punctum M, ad quod si agantur AM, BM, anguli AMC, BMC æquales sint. Agatur radius CM, tum ducatur MD faciens angulum MDC æqualem BMC, item ME faciens angulum MEC æqualem AMC. Quoniam triangula BMC, MDC similia sunt, erit BC : CM :: CM : CD; sed BC, CM sunt datæ; ergo fiet data CD. Eodem modo propter similitudinem triangulorum AMC, MEC est AC : CM :: CM : CE, igitur CE data est. Supponamus $BC > AC$, erit $CD < CE$. Vocaitaque $CD = a$, $CE = b$. Age MF, MG parallelas CA, CB, & voca $CF = MG = y$, $MF = CG = x$. Propter æqualitatem angulorum MDC, MEC ex conditione problematis erunt similia triangula MDF, MEG, ergo MF : DF :: MG : EG, sive analytice $x : y-a :: y : x-b$; igitur $xx - bx = yy - ay$; ergo $\overline{x-\frac{b}{2}}^2 - \frac{bb}{4} + \frac{aa}{4} = \overline{y-\frac{a}{2}}^2$, quæ est æquatio ad hyperbolam æquilateram, cujus constructio perficietur infra.

26. Interea adverte, si $a = b$, hoc est si $BC = AC$, provenire ex extractione radicis duas æquationes, nempe $x = y$, $a - x = y$. Prima docet, dividendum esse bifariam angulum ACB (*Fig.* 16.) ducta linea M2M, & puncta intersectionum M, 2M solutum problema exhibere. Secunda docet, inveniendas esse æquales CD, CE, (*Fig.* 17.) quæ sint tertiæ proportionales post CB, seu CA, & radium circuli; tum ducendam ED secantem circulum in punctis 3M, 4M. Quomodo puncta hæc solutum exhibeant problema videndum est. Agantur A3M, B3M, & 3MC. Quoniam AC : C3M :: C3M : CE, angulus A3MC = 3MEC. Simili modo quum sit BC : C3M :: C3M : CD, angulus B3MC = 3MDC; atqui 3MEC est complementum ad duos rectos anguli 3MDC: ergo angulus A3MC complet duos rectos cum B3MC; quare producta C3M in L, angulus A3ML = B3MC. Idem dicendum de puncto 4M. Hæc animadversio in casu maxime simplici ostendit, quomodo intersectionum puncta solutum problema exhibeant.

27. Ad

27. Ad constructionem venio. Inventis ut supra CD, CE, (*Fig.* 18.) claudatur parallelogrammum END; cujus diagonalis CN bifariam dividatur in O, ex quo puncto agantur OR, OS parallelæ CA, CB. Punctum O erit hyperbolæ centrum, OR, OS positiones diametrorum conjugatarum. Abscindantur OP, O2P æquales $\sqrt{\frac{bb-aa}{4}}$. Ex verticibus P, 2P delineetur hyperbola æquilatera, quæ transibit per puncta E, N, C, D, & secabit circulum in punctis M, 2M, 3M, 4M. Si agantur AM, BM, angulus AMC = BMC. Idem dic de puncto 2M. Si agantur A3M, B3M, angulus A3MC complebit duos rectos cum angulo B3MC, quod dicendum item est de puncto 4M.

28. Problema octavum. Invenire circulum ABD (*Fig.* 19. 20. 21.), in quo si ab extremis punctis diametri aptentur chordæ BD = a, AE = c, sit chorda ED = b. Antequam solutionem aggredior, modos omnes, quibus in circulo sitæ esse possunt chordæ, contemplor. Primum chordæ AE, BD sitæ sint ad eamdem diametri partem, & arcus, quos subtendunt, simul sumpti minores sint circumferentiæ dimidio, ut exhibet fig. 19. Deinde chordæ AE, BD jaceant quidem ad eamdem diametri partem, sed arcus simul sumpti superent dimidium circumferentiæ, quod ostendit fig. 20. Postremo chordæ AE, BD sitæ sint ad diversas diametri partes, ut in fig. 21. In casibus omnibus agatur AI normalis DE, si opus est, productæ; tum jungatur AD. In fig. 19. angulus AED complet duos rectos cum ABD; in reliquis AED = ABD; ergo in omnibus AEI = ABD; ergo triangula rectangula ABD, AEI sunt similia; ergo erit AB : BD :: AE : EI. Quare vocatis AB = y, EI = x, erit $y : a :: c : x$, & $yx = ac$, quæ æquatio valet in omnibus casibus.

29. In omnibus figuris $AB^2 = BD^2 + AD^2$; sed in figura prima $AD^2 = AE^2 + DE^2 + 2ED.EI$; in aliis $AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2ED.EI$. Quare adhibitis speciebus analyticis fiet in prima $yy = aa + bb + cc + 2bx$; in aliis $yy = aa + bb + cc - 2bx$. Secunda ex his æquationibus convenit cum prima, dummodo in hac spectetur x tamquam negativa. Quum autem in omnibus valeat $xy = ac$, si x est negativa, y quoque negativa sit, oportet. Quare si adhibeamus primam ex duabus æquationibus, x, y positivæ inservient primo casui, x, y negativæ reliquis duobus. Verum ut negativarum radicum rectus fiat usus, quid intersit inter secundum, & tertium casum, oportet considerare. In secundo quando chorda DE magis distat a centro, quam aliæ chordæ AE, DB, erit DE minor tum AE, tum BD, seu analytice $b < a$, $b < c$. At in tertio chorda DE non potest esse minor utraque ex chordis AE, BD, sed debet esse alterutra major. Itaque positis negativis x, y, si b sit minor tum a, tum c, habetur casus secundus, secus exurget casus tertius. Verum si accidat, ut inveniatur y minor una ex tribus chordis, circulus fit impossibilis, & ea solutio evadit imaginaria.

30. His adnotatis revocemus æquationes inventas, easque construamus, nempe $yx = ac$, quæ est ad hyperbolam, & $yy = aa + bb + cc + 2bx$, quæ est ad parabolam. Se intersecent RS, KG (*Fig.* 22.) ad angulos rectos in F. Sume FG = a, GH = x, supra ambæ sint positivæ, infra negativæ, & inter asymptota RS, KG describatur hyperbola transiens per punctum H. Abscinde

$FK = \frac{aa+bb+cc}{2b}$, & vertice K parametro $2b$, describe parabolam. In triplici puncto habetur curvarum interſectio. Primum in M, quod dat $FL = x$, $LM = y$ ambas poſitivas, atque adeo unam ſolutionem ad caſum primum ſpectantem. Secunda interſectio in puncto P, quæ, ut in pluribus periculum fecimus, dat ſemper diametrum PQ aliqua ex tribus chordis minorem; quare inutilis hæc eſt circulo deſcribendo. Tertia in N, quæ præbere poteſt tum ſecundum, tum tertium caſum; dabit ſecundum ſi $b < a$, & $b < c$, ſecus dabit tertium.

31. Sed duarum æquationum auxilio, ejecta ſpecie x, inveniamus formulam, in qua inſit tantum y. Ex æquatione prima $x = \frac{ac}{y}$, quo valore ſubſtituto in ſecunda fit $yy = aa + bb + cc + \frac{2abc}{y}$, ſive $y^3 - y.\overline{aa+bb+cc} - 2abc = 0$. Æquationem hanc per coſinus circulares hoc modo conſtruamus (*F.* 23). Deſcribatur circulus, cujus radius $CB = \sqrt{\frac{aa+bb+cc}{3}}$. Sumatur $Cq = \frac{abc}{\frac{1}{3}.\overline{aa+bb+cc}}$, ductoque ſinu qQ, arcus BQ dividatur in tres partes æquales, & tertia ejus pars ſit BT. Demitte Tt. Coſinus Ct erit $= \frac{y}{2}$, adeoque radius circuli requiſiti. Si vocato quadrante $= q$, & integra circumferentia $= 4q$, accipias $BKR = \frac{4q+BQ}{3}$; tum $BKAS = \frac{8q+BQ}{3}$, Cr, Cs exhibebunt dimidia reliquarum radicum.

32. Aliquot determinationes ex conſtructione colligantur. Si $a = b = c$, ut tres chordæ ſint inter ſe æquales, erit $CB = a$, $Cq = a$; ergo $Bq = 0$; quare dimidium unius radicis æquationis eſt CB, & circulus deſcriptus radio CB ille eſt, qui quæritur. Reapſe tres chordæ in ſemicirculo æquales radium ſingulæ æquant. Ut alias radices naneiſcamur, dividenda eſt integra circumferentia in tres partes æquales in punctis M, N; linea autem MN normalis eſt AC; quare reliquarum radicum dimidia erit Cm, quæ, ut notum eſt, æquat dimidium CB. Si radio Cm deſcribatur circulus, tres chordæ æquales omnes coincident cum diametro. Quamquam deinceps mutatur radius circuli; tamen litteræ B, K, M &c. ſignabunt puncta analoga illis, quæ ſupra definivimus, aut definiemus infra. Pono unam chordam ex. ca. $b = 0$, fiet $CB = \sqrt{\frac{aa+cc}{3}}$, & $Cq = 0$; ergo BQ erit quadrans, & punctum Q coincidet cum K. Sumatur BP tertia pars quadrantis, & Cp erit radius circuli deſcribendi, in quo chordæ a, c circumferentiam exhaurient. Ad alias radices inveniendas, accipiatur BKO æqualis tertiæ parti quinque quadrantum, hoc eſt $= \frac{5q}{3}$, & habebimus $KO = KP$, & $AO = BP$; igitur $Co = Cp$. Demum ſumendus arcus, qui ſit tertia pars novem quadrantum, hoc eſt æqualis tribus quadrantibus; punctum igitur extremum arcus cadet in L, quod dat tertiam radicem nullam.

33. Si

33. Si non omnes a, b, c, sint æquales, quum abc semper sit minor $\left(\frac{aa+bb+cc}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, erit ubique $Cq < CB$; ergo Ct erit unius radicis dimidium, quod dabit radium primo casui inservientem, existente BT tertia parte arcus BQ, qui arcus BT est semper minor BP. Seca $MR = BT$, punctum R cadet inter puncta M, O. Hoc punctum præbet Cr dimidium secundæ radicis negativæ, quæ inservit aut secundo casui, si $b < a$, & $b < c$, aut tertio, si formulæ istæ locum non habeant. Demum accipe $NS = BT$, punctum S cadet inter N, L. Tertia radix est dupla Cs negativa, sed non potest circulo describendo inservire, quia diameter aliqua chorda minor invenietur.

34. Problema nonum. Data parabola ADE, (*Fig. 24.*) cujus princeps parameter $AI = a$, excitataque verticis tangente AB, datoque in hac puncto B, ducere lineam BDE ita, ut, demissis ex punctis sectionis ordinatis DF, EG, intercepta $FG = a$, hoc est parametrum. Hoc problema non difficile propono, ut methodus cognoscatur, qua problemata tractentur, quæ lineas includunt dependentes a duobus punctis sectionis. Si enim in hoc assumam tamquam incognitam unam ex duabus AF, DF, quum hæ reciprocentur cum lineis AG, GE, æquatio assurget ad gradum duplo majorem, quam necesse est. Quapropter ejusmodi incognita assumenda est, quæ eadem sit respectu utriusque puncti sectionis D, E. Producta EDB in H hujusmodi erit angulus BHA, & lineæ ab eo dependentes. Accipiamus itaque pro incognita tangentem anguli BHA, quam vocemus $= t$, posito sinu toto $= a$. Vocemus præterea $AB = b$, $AF = x$; ergo ex natura parabolæ $DF = \sqrt{ax}$.

35. His positis manifestum est, fore $t : a :: AB = b : AH = \frac{ab}{t}$; ergo $HF = \frac{ab}{t} + x$; atqui $a : t :: HF, DF$, seu $:: \frac{ab}{t} + x : \sqrt{ax}$; ergo $ab + tx = a\sqrt{ax}$, & quadrando $a^2b^2 + 2abtx + t^2x^2 = a^3x$, sive $x^2 + \frac{2ab}{t}.x - \frac{a^3}{t^2}x = -\frac{a^2b^2}{t^2}$. Ad inveniendum duplicem valorem x, formulam ita dispone

$$\overline{x + \frac{ab}{t} - \frac{a^3}{2t^2}}^{\,2} = \frac{a^2b^2}{t^2} - \frac{a^4b}{t^3} + \frac{a^6}{4t^4} - \frac{a^2b^2}{t^2} = \frac{a^6}{4t^4} - \frac{a^4b}{t^3}; \text{ ergo}$$

$$x = \frac{a^3}{2t^2} - \frac{ab}{t} \pm \frac{a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4t^2} - \frac{a^2b}{t}}.$$ Duplex valor x dat duas AF, AG; signum superius $+$ denotat majorem AG, signum inferius $-$ denotat minorem AF; ergo differentia duorum valorum nempe $\frac{2a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4tt} - \frac{a^2b}{t}}$ denotat interceptam FG, quæ ex conditione problematis debet $= a$; ergo nascitur æquatio $\frac{2a}{t}\sqrt{\frac{a^4}{4tt} - \frac{a^2b}{t}} = a$, sive $\frac{a^4}{t^2} - \frac{4aab}{t} = tt$, sive $t^4 + 4a^2bt - a^4 = 0$.

36. Ut

36. Ut ad constructionem perveniamus, ponamus $tt = ax$, atque hæc est parabola ipsa data, si in axe sumamus abscissas x, ejusque ordinatæ sint t. Peracta substitutione $a^2x^2 + 4a^2bt - a^4 = 0$, vel $x^2 + 4bt - aa = 0$. Huic addamus æquationem primam, ut sit $x^2 - ax + tt + 4bt = aa$, sive $\overline{x - \frac{a}{2}}^2 + \overline{t + 2b}^2 = \frac{5aa}{4} + 4bb$, quæ est ad circulum, cujus radius $= \sqrt{\frac{5aa}{4} + 4bb}$. Hanc constructionem analysis suppeditat. Sumpta AK dupla AB, eique normali $KL = \frac{a}{2}$, centro L, radio $= \sqrt{\frac{5aa}{4} + 4bb}$ describe circulum, qui secabit parabolam in punctis M, 2M, ex quibus ad AB productam duc normales MN, 2M2N. Ex punctis N, 2N age NI, 2NI, quibus sint parallelæ BDE, B2D2E, istæ erunt lineæ a problemate requisitæ. Quamquam hoc est problema quarti gradus, tamen hæc constructio certat cum constructionibus æquationum secundi gradus; nam quum data sit parabola, per solas rectas, & circulos perficitur. Quod pro virili parte curandum est, quoties sectio aliqua conica data supponitur.



LIBER TERTIUS

DE LOCIS TERTII, ET SUPERIORUM GRADUM ET DE ÆQUATIONIBUS EXCEDENTIBUS GRADUM QUARTUM.

CAPUT PRIMUM.

De formatione æquationum.

Quoniam ad resolutionem, & constructionem accedimus earum æquationum, quæ superant gradum quartum, moneamus statim oportet, methodos plerosque ab auctoribus inventas non ita late patere, quemadmodum in æquationibus gradus inferioris. Ingenium nihilominus, & solertiam suspiciemus, qua methodi amplificatæ sunt; & remedia exhibita ad earum defectum supplendum. Ab æquationum formatione initium ducamus.

1. Ut res a suis principiis ducatur, necesse est meminisse eorum, quæ de æquationibus generatim docuimus in libro primo, nimirum æquationem nihil aliud esse, quam productum, cujus unus, aut plures factores $= o$, aut potius in quo factores singuli esse possunt $= o$, & æquationum radices esse eorumdem factorum terminos secundos affectis signo contrario. Tot autem sunt, & factores, & radices, quot dimensiones maximæ potestatis incognitæ. Quod quamquam constat ex iis, quæ diximus de æquationibus primi, secundi, tertii, & quarti gradus; tamen, ut res universalius probetur, & ut detegantur methodi determinandi radices, ab analyseos scriptoribus problema inversum spectatum est, nimirum quænam resultet æquatio, si ejus radices supponantur esse datæ quantitates; quod problema directo multo est facilius. Quæratur caussa exempli, quænam sit æquatio, in qua valor x potest æque esse aut 2, aut 3, aut 5. Formentur tres factores simplices $x - 2$, $x - 3$, $x - 5$, & eorum productum fiat $= o$. Nascetur æquatio $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = o$. Quando hæc exprimi quoque potest hoc modo $x - 2 . x - 3 . x - 5 = o$, perspicuum est, eam veram esse vel $x - 2 = o$, vel $x - 3 = o$, vel $x - 5 = o$, quia si multiplicator unus $= o$, totum productum $= o$; ergo æque valere potest $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$, quæ sunt æquationis radices. Quare radix æquationis invenietur, si habeatur binomium per quod exacte dividi possit; est enim secundus terminus binomii mutato signo. Præterea si pro x scribas aut 2, aut 3, aut 5, æquatio nullescet. Itaque si habeas quantitatem, quæ substituta pro x, reddat formulam nullam, habebis æquationis radicem.

2. Sed ad opportuna consectaria deducenda, rem generalius pertractemus. Radices æquationis sint a, b, c, d, e. Efforma binomia $x - a$, $x - b$, $x - c$; $x - d$, $x - e$, eademque simul multiplica, ut obtineas

$x^5 - a$.

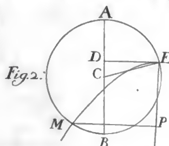


Fig. 2.

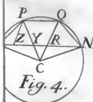


Fig. 4.

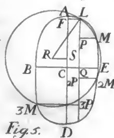


Fig. 5.



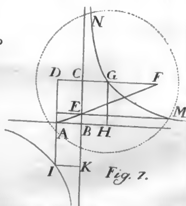
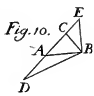
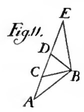
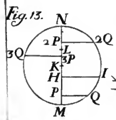


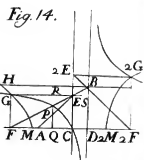
Fig. 7.

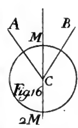

I
B
L

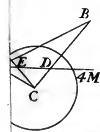

Fig. 10.
E
C
A
B
D


Fig. 11.
E
D
C
B
A


Fig. 13.
N
2P
2Q
3Q
L
3P
K
H
I
P
Q
M


Fig. 14.
2E
2G
H
B
R
G
ES
P
F M A Q C
D 2M 2F


A
B
M
C
Fig 16
2M


B
E
D
4M
C

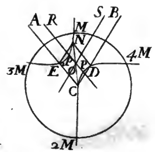

A R
S B
M
N
4M
3M
E
D
C
2M

Fig. 18.

Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 24.

$$\begin{array}{llllll}
x^5 - a.x^4 & + ab.x^3 & - abc.x^2 & + abcd.x & - abcde & = 0 \\
 - b & + ac & - abd & + abce & & \\
 - c & + ad & - abe & + abde & & \\
 - d & + ae & - acd & + acde & & \\
 - e & + bc & - ace & + bcde & & \\
 & + bd & - ade & & & \\
 & + be & - bcd & & & \\
 & + cd & - bce & & & \\
 & + ce & - bde & & & \\
 & + de & - cde & & &
\end{array}$$

æquationem, in qua x poteſt ſingulos hos valores obtinere a, b, c, d, e. Ex hac ſequentes proprietates deducantur. Primus terminus nihil eſt, niſi incognita elata ad poteſtatem expreſſam a radicum numero; unde ſequitur tot eſſe radices, quot ſunt unitates componentes maximum exponens incognitæ. Secundus terminus continet incognitam elevatam ad poteſtatem unitate minorem, habetque pro coefficiente omnes ſecundos terminos factorum ſimul ſumptos, ſive ſummam omnium radicum mutato ſigno. In tertio termino exponens item unitate minuitur, ejuſque coefficiens eſt ſumma productorum, quæ fiunt ex binis ſecundis terminis factorum, ſeu ex binis radicibus. In quarto poteſtas incognitæ gradatim minuitur, & coefficiens eſt aggregatum factorum, quæ coaleſcunt ex ternis ſecundis terminis factorum, ſive mutato ſigno ex ternis radicibus, atque ita deinceps uſque ad ultimum terminum, qui eſt productum ex omnibus ſecundis terminis factorum, ſive radicum, ſi harum ſigna mutentur. In tertio, quinto, ceteriſque terminis imparibus non eſt neceſſe mutare ſigna radicum, quia quum numerus earum, quæ in ſeſe ducuntur, par ſit, vel mutetur, vel idem retineatur ſignum, factum idem, eodemque ſigno affectum exurget. Proprietates iſtæ maxime ſecundæ ſunt, & facem prætulerunt in multis inquiſitionibus.

3. Ut harum proprietatum fiat uſus, neceſſe eſt ordinare æquationem reſpectu incognitæ, ita ut terminus primus habeat pro coefficiente ſolam unitatem, & reliqui gradatim collocentur omnes ad unam æquationis partem. Si aliquis terminus deſit, non eſt omittendus, ſed numerandus facto coefficiente $= 0$. Si ſecundus terminus deſit, oportet ut ſecundi termini factorum, ſive radices omnes ſimul ſumptæ propter contrarietatem ſignorum ſeſe deſtruant, & fiant $= 0$. Si ultimus terminus deſit, una ex radicibus, aut ex ſecundis terminis factorum erit $= 0$. Renatus Carteſius regulam deducit ab expoſitis proprietatibus, per quam cognoſcitur, quotnam ſint in æquatione poſitivæ radices, quot negativæ. Nam tot ſunt radices poſitivæ, quot in terminis, qui conſequuntur, adſunt mutationes ſignorum $+$ in $-$, aut $-$ in $+$. Tot ſunt radices negativæ, quot vicibus ſignum idem in duobus ſucceſſivis terminis reperitur.

Ita in æquatione $x^2 + 3x - 4 = 0$, quia una eſt ſucceſſio ſignorum, & una mutatio, una erit radix negativa, nempe $x = -4$, una poſitiva hoc eſt $x = 1$. Hæc regula apprime cum veritate conſentit, ſi reales fuerint omnes æquationis radices. Verum ſi ſint aliquæ imaginariæ, fallax eſt, & nullius uſus. Proponimus exemplum. In æquatione $x^2 - 2x + 7 = 0$ ex permutatione ſignorum colligere oporteret, duas eſſe radices poſitivas. Multiplico per $x + 3$, & radix,

 quæ

quæ additur, est negativa. Provenit æquatio $x^3+x^2+x+21=0$, in qua, quum numquam signum mutetur, radices omnes deberent esse negativæ. Itaque quoties adsunt radices imaginariæ, deficit regula cartesiana; utrum autem adsint necne, plerumque nobis ignotum est.

4. Iam vero supponamus, æquationis radices omnes æquales esse, & singulos factores $=x+a$, existente eorum numero $=m$. Facile est cognitu, primum terminum $=x^m$; secundum terminum $=x^{m-1}$ multiplicatum per ma, quia factorum secundi termini omnes $=a$, & eorum numerus $=m$; tertium terminum esse x^{m-2} multiplicatum per aa toties sumptum, quot rectangula ab, ac, ad &c. componi possunt ex quantitatibus a, b, c, d &c. quarum numerus est m, quia termini secundi factorum omnes $=a$; quartum terminum esse x^{m-3}, ejusque coefficiens a^3 toties accipiendum, quot producta potest præbere numerus m quantitatum, si ternæ inter sese multiplicentur; atque ita de terminis aliis. Quæstio igitur ad hoc redacta est, ut cognoscamus, quot combinationes fieri possunt ex numero m quantitatum, si binæ, si ternæ, si quaternæ accipiantur, atque ita deinceps. Nam supponentes numeros harum combinationum exprimi per A, B, C, D &c., habebimus potestatis $\overline{x+a}^{m}$ quæsitum valorem esse

$$x^m + max^{m-1} + Aa^2x^{m-2} + Ba^3x^{m-3} + Ca^4x^{m-4} + Da^5x^{m-5} \text{ \&c.}$$

5. Ad inveniendum quot combinationes, seu producta ab, ac, ad &c. sufficiat numerus m literarum a, b, c &c., si binæ sumantur, advertimus, efformatis omnibus productis, numerum litterarum, quæ in ipsis scriptæ sunt, duplum esse numeri productorum. Advertamus deinde, quamlibet ex literis a, b, c eisdem vicibus repeti, & quum per alias omnes litteras debeat multiplicari, non per se ipsam, non posse repeti nisi vicibus $m-1$; igitur numerus literarum scribendarum ad formanda producta erit $=m.\overline{m-1}$; sed numerus literarum duplus est numeri productorum; ergo productorum numerus erit $=\frac{m.\overline{m-1}}{2}$; atque hic est valor A, sive coefficientis tertii termini formulæ quæsitæ.

6. Quod spectat ad coefficiens termini quarti, idest ad numerum productorum abc, abd, abc &c., si literæ ternæ sumantur, manifestum est, numerum hunc esse tertiam partem numeri literarum, quæ scriptæ reperiuntur, formatis productis omnibus. Observemus præterea, singulas literas iisdem vicibus repeti, & harum vicium numerum eum esse, qui exprimit quot producta præbeant omnes aliæ literæ, illa una excepta, si binatim sumantur. Etenim patet, quamlibet literam ex. ca. a conjungendam esse cum productis omnibus bc, bd, cd &c. binarum aliarum literarum. Numerus igitur vicium, quo repetitur quælibet ex literis a, b, c, d &c. idem est ac numerus productorum, quæ præbentur a literis numero $m-1$ binatim acceptis; atqui constat, productorum numerum esse $=\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2}$; ergo hic quoque est numerus, quo quælibet litera repetitur; igitur quum numerus literarum sit $=m$; numerus literarum scriptarum $=\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2}$; ergo numerus productorum, quæ dant literæ ternatim

tim sumptæ, quando hujus est pars tertia, erit $= \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{2 \cdot 3}$. Atque hic est valor B, seu coefficiens termini quarti.

7. Coefficiens quinti termini C, idest numerus productorum, quæ quaternæ literæ efficiunt, similiter invenietur $= \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Nam numerus iste debet esse pars quarta litterarum scriptarum in hisce productis, & quælibet litera iisdem vicibus repetitur, & conjungitur cum omnibus productis trium literarum, quarum numerus $= m - 1$. Patet enim, horum productorum numerum esse $\frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{2 \cdot 3}$; igitur quum literæ sint numero m, producta quaternarum erunt numero $\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Eadem methodo coefficientia reliquorum terminorum invenies, progressu satis manifesto.

8. Quæ quum ita sint valor binomii $x + a$ elati ad potestatem m detegitur $x^m + m a x^{m-1} + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{2} a^2 x^{m-2} + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{2 \cdot 3} a^3 x^{m-3}$ $+ \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{m-4} + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot \overline{m-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 \cdot x^{m-5}$ &c. Si haberetur binomium $x - a$, eadem formula valeret, dummodo a spectaretur tamquam negativa; quare signa mutanda essent in illis terminis, ubi a dimensionem obtinet imparem, hoc est in secundo, quarto, ceterisque terminis paribus.

9. His explicatis nihil facilius est, quam uti præcedente formula ad elevandum binomium ad potestatem datam. Namque in valore $\overline{x+a}^m$ substituendus erit pro x primus binomii terminus, pro a secundus, pro m potestas data. Elevandum sit binomium $3ec - 2bd$ ad potestatem quintam. Pone $3ec = x$, $-2bd = a$, $5 = m$, & invenies $x^m = \overline{3ec}^5 = 243 e^5 c^5$,

$m a x^{m-1} = 5 \cdot -2bd \cdot \overline{3ec}^4 = -810 b d e^4 c^4$

$\frac{m \cdot \overline{m-1}}{2} \cdot a^2 x^{m-2} = 10 \cdot 4 b^2 d^2 \cdot \overline{3ec}^3 = 1080 b^2 d^2 e^3 c^3$

$\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{2 \cdot 3} \cdot a^3 x^{m-3} = 10 \cdot (\overline{-2bd}^3 \cdot \overline{3ec}^2 = -720 b^3 d^3 e^2 c^2$

$\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{m-4} = 5 \cdot (-\overline{2bd}^4 \cdot 3ec = 240 b^4 d^4 e c$

$\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3} \cdot \overline{m-4}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 x^{m-5} = 1 \cdot (-\overline{2bd}^5 \cdot \overline{3ac}^0 = -32 b^5 d^5$.

Termini isti sufficiunt, & præbent potestatem quæsitam; nam reliqui, qui consequuntur, quum habeant in coefficiente factorem $m - 5 = 0$, omnino nullescunt. Itaque si inventos terminos in summam colligas, habebis $\overline{3ec - 2bd}^5$.

10. For-

10. Formula inventa, quæ tamquam canonica spectari debet, utilitatem habet in elevandis ad potestatem datam polynomiis. Incipiamus a trinomiis. Fiat x æqualis primo trinomii termino, & a reliquorum duorum summæ. Facta substitutione sese offerunt sola binomia ad datas potestates efferenda, quæ ex formula canonica tractantur. Si habeatur quadrinomium; posito x æquali primo quadrinomii termino, & a reliquis terminis, factaque substitutione sese offerent solum trinomia ad datam potestates elevanda. Ita elevatio polynomii cujuslibet ad potestatem datam reducetur ad polynomium simplicius, quod efferendum erit ad datas potestates.

11. Afferamus exemplum in trinomio $e+2b-c$ elevando ad potestatem quartam. Erit $m=4$, $x=e$, $a=2b-c$. Qui valores substituti in formula canonica dant, $x^m = e^4$; $m a x^{m-1} = 4.\overline{2b-c}.e^3 = 8be^3 - 4ce^3$

$$\frac{m.\overline{m-1}}{2}.a^2x^{m-2} = 6.\overline{2b-c}^2.e^2 = 24b^2e^2 - 24bce^2 + bc^2e^2;$$

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3} = 4.\overline{2b-c}^3.e = 32b^3e - 48b^2ce + 24bc^2e - 4c^3e$$

$$\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-1}}{2.3.4} = \overline{2b-c}^4 = 16b^4 - 32b^3c + 24b^2c^2 - 8bc^3 + c^4.$$

Quare his terminis collectis habebis potestatem quæsitam.

12. Quoniam radices omnes exprimi possunt per potestates fractas, & fractiones per potestates negativas, quia $\sqrt[n]{\overline{x+a}^r} = \overline{x+a}^{\frac{r}{n}}$, & $\frac{1}{\overline{x+a}^r} = \overline{x+a}^{-r}$, videtur nostra formula canonica sese extendere ad extractionem radicum, & ad evolvendas fractiones in series, si in ipsa pro m substituatur in primo casu $\frac{r}{n}$, in secundo $-r$. Sed quoniam modus hic probandi per inductionem nonnullis minus placet, danda est opera, ut demonstremus, valere formulam canonicam etiam in exponentibus fractis, & negativis. Primum quoad numeros fractos, ajo, veram esse æquationem A (*Tav. 1*), in qua nostra formula continetur. Si æquationem A dividas per $x^{\frac{r}{n}}$, & ponas $\frac{a}{x} = z$, proveniet æquatio B, cujus veritas probanda est. Ad quod præstandum sufficit ostendere, eamdem quantitatem oriri, si æquationis B pars utraque elevetur ad integram potestatem n, seu posita æquatione C veram esse æquationem D. Quando r, n sunt numeri integri eleventur ex formula canonica duo binomia ad suas potestates, & proveniet æquatio E, cujus veritas est, patefacienda. Hanc ob rem ex valore s inveniendi sunt s^2, s^3, s^4 &c., tum multiplicanda s per n, s^2 per $\frac{n.\overline{n-1}}{2}$, s^3 per $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}$ atque ita de aliis, ut habeantur valores omnium terminorum componentium æquationis E partem alteram. Valores isti inventi, & alii aliis opportune suppositi æquationem F sufficient. Si fiat autem termi-

terminorum reductio in secunda æquationis parte, provenit æquatio G, quæ eadem est ac æquatio E. Igitur æquatio B, atque adeo æquatio A probata remanet. Itaque formula canonica rite applicatur omnibus potestatibus positivis vel integræ sint, vel fractæ.

13. Accedens ad exponentes negativos ajo, valere æquationem A (*Tab.* 2), vel r sit numerus integer, vel fractus. Si hanc æquationem dividas per x^{-r}, tum ponas $\frac{a}{x} = z$, invenies æquationem B. Quum autem $\overline{1+z}^{-r} = \frac{1}{\overline{1+z}^{r}}$, æquatio C eadem erit ac, B. Evolvatur binomium $\overline{1+z}^{r}$ per formulam canonicam, & orietur æquatio D; quæ apprime cum veritate consentiet, si denominator primæ partis cum parte altera multiplicatus exhibeat unitatem. Facta autem hac multiplicatione provenit formula E, in qua, si reductio fiat, nihil aliud remanet nisi unitas, ceteris terminis sese ex contrarietate signorum destruentibus. Quamobrem satis demonstratum est, formulam canonicam ubique valere quicumque sint exponentes integri vel fracti, positivi vel negativi. Demonstrandum quidem superest eamdem formulam valere, si exponentes sint numeri irrationales; sed hoc præstare non licet sine calculi integralis auxilio. Hæc autem est celeberrima formula neutoniana, per quam & potestates obtinentur, & radices fractionesque nullo negotio in series convertuntur. Ad hanc vero probandam usi sumus methodo Clairaut viri doctissimi, quæ nobis maxime visa est elegans, & exacta.

CAPUT SECUNDUM.

De transformatione æquationum, & earumdem reductione per factores rationales.

1. Quoniam methodi transformandæ æquationis cujuslibet gradus eædem sunt ac illæ, quas Cap. 8. lib. 2. tradidimus ad transformandas æquationes tertii, & quarti gradus, iccirco eas hic paucis attingam, ostendens, quomodo, & ad quem usum superioribus æquationibus applicari possint. Transformantur æquationes auctis, vel minutis earum radicibus quantitate data. Hoc præstabis si ponas $x = y + m$; per hanc enim substitutionem augebis, si m sit negativa, minues, si sit positiva. Usus præcipuus hujus transformationis in eo positus est, ut arceatur ab æquatione secundus terminus, opportune determinata quantitate m, quæ quantitas debet esse æqualis coefficienti secundi termini diviso per exponentem primi signo mutato. Hoc autem ita generatim ostendo. Sit æquatio $x^{n} + ax^{n-1}$ &c. $= 0$. Pone $x = y + m$, factaque substitutione invenies

$$\left.\begin{array}{l} y^{n} + mny^{n-1} + m^{2}.\frac{n.\overline{n-1}}{2}y^{n-2} \text{ \&c.} \\ + ay^{n-1} + m.\overline{n-1}.a.y^{n-2} \text{ \&c.} \end{array}\right\} = 0.$$

Ut deleatur secundus, sit oportet

ret $mn+n=o$, five $m=\frac{-a}{n}$. Q. E. D.

2. Per hanc transformationem licebit etiam removere ab æquatione tertium, quartum, quintum &c. terminum, resolvendo æquationem secundi, tertii, quarti &c. gradus. Verum ad removendum quartum, sextum, ceterosque terminos in sedibus paribus collocatos, obtinebis semper valorem realem m, quia m data est in æquatione gradus imparis, quæ semper prædita est saltem una radice reali. At in tertio, quinto, ceterisque terminis imparibus, m data erit in æquatione pari, quæ aliquando nullam habebit radicem realem, sed omnes imaginarias. Ad tollendum terminum ultimum, necesse est resolvere æquationem ejusdem gradus, imo eamdem cum proposita. Inservit etiam hæc transformatio ad obtinendum, ut terminus dato coefficienti afficiatur. Facta enim substitutione satis erit, ponere coefficiens dati termini æquale datæ quantitati, & per resolutionem æquationis, quæ oritur, valorem m determinare.

3. Transformatur æquatio, si alia inveniatur, cujus radices ad radices propositæ sint in data ratione. Hoc obtinetur per substitutionem $x=\frac{my}{n}$. Præcipuus usus hujusce transformationis elucet in eliminandis fractionibus ab æquatione. Quoniam usus iste maximi momenti est, uno aut altero exemplo videtur illustrandus. Sit æquatio $x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}=o$. Pone $x=\frac{m}{n}y$: ergo $\frac{m^5}{n^5}y^5-\frac{m^4}{2n^4}y^4+\frac{m}{3n}y-\frac{1}{4}=o$; five facta multiplicatione per n^5, & divisione per m^5, $y^5-\frac{n}{2m}y^4+\frac{n^4}{3m^4}y-\frac{n^5}{4m^5}=o$. Ut æquatio omni fractione liberetur, oportet ut n sit divisibilis per $2m, 3m, 4m$, quod obtinebis, si ponas $n=12m$; proveniet enim $y^5-\frac{12m}{2m}y^4+\frac{\overline{12}^4 m^4 y}{3.m^4}-\frac{\overline{12}^5.m^5}{4.m^5}=o$, five $y^5-6y^4+4.\overline{12}^3.y-3.\overline{12}^4=o$, quæ omnium fractionum est expers. Ex hoc exemplo patet nihil referre, quicumque fuerit valor m; quare expeditioris calculi caussa præstabit ponere $m=1$.

4. Exemplum alterum sufficiat æquatio tertii gradus $x^3+\frac{a}{b}x^2+\frac{c}{d}x+\frac{e}{f}=o$. Pono $x=\frac{1}{n}y$, ut fiat $\frac{1}{n^3}y^3+\frac{a}{n^2b}y^2+\frac{c}{nd}y+\frac{e}{f}=o$, five multiplicando per n^3

$y^3+\frac{na}{b}y^2+\frac{n^2c}{d}y+\frac{n^3e}{f}=o$. Ut removeantur fractiones necesse est, ut n sit divisibilis per b, d, f. Erit autem semper, si ponas $n=bdf$. Nam orietur $y^3+adfy^2+b^2f^2dcy+b^3d^2f^2e=o$, in qua nulla est fractio.

5. Potes

A $\overline{x+a}^{\frac{r}{n}} = x^{\frac{r}{n}} + \ldots \frac{\frac{r}{n} - 2 . \frac{r}{n} - 3}{3.4} x^{\frac{r}{n} - 4} a^4 + \&c.$

B $\overline{1+z}^{\frac{r}{n}} = 1 + \frac{r}{n} \ldots$

C $s = \frac{r}{n} z \ldots$

D $\overline{1+z}^{r} = \overline{1+s}^{n} \ldots$

E $1 + rz + \frac{r . \overline{r-1}}{2} \ldots \overline{-2}\, s^3 + \frac{n . \overline{n-1} . \overline{n-2} . \overline{n-3}}{2.3.4} s^4 + \&c.$

F

1

$+ ns \quad \ldots \frac{. \frac{r}{n} - 2 . \frac{r}{n} - 3}{2.3.4} z^4 + \&c.$

$+ \frac{n . \overline{n-1}}{2} s^2 \quad \ldots \frac{\frac{7r}{n} - 11}{12} z^4 + \&c.$

$+ \frac{n . \overline{n-1} . \overline{n- \ldots}}{2.3} \quad \ldots \frac{r}{n} - 1 . z^4 + \&c.$

$+ \frac{\ldots n - 1 . \overline{n - \ldots}}{2.3.4} \quad \ldots \frac{r^4}{n^4} z^4 + \&c.$

$+ \&c. \qquad + \&c.$

G $1 + ns + \frac{n . \overline{n-1}}{1} s^2 \ldots + \frac{r . \overline{r-1} . \overline{r-2} . \overline{r-3}}{2.3.4} z^4 \&c.$

A $\overline{x+a}^{\,-r} = x^{-}$

$\frac{}{3}\, a^4 x^{-r-4}$ &c.

B $\overline{1+z}^{\,-r} = 1 -$

C $\frac{1}{\overline{1+z}^{\,r}} = 1 -$

D $\overline{\qquad\qquad}$

$1 + rz + \frac{r.r}{2} \;\; \frac{-1 . \overline{r+2}}{2.3} . z^3 + \frac{r.\overline{r+1}.\overline{r+2}.\overline{r+5}}{2.34} . z^4$ &c.

E $1 - rz + \frac{r.}{}$

$+ rz - r$

$+ \frac{r.}{}$

5. Potes per hanc transformationem obtinere, ut æquationis terminus datus dato afficiatur coefficiente, quod non $=o$ ponendum est. Nam facta substitutione $x=\frac{1}{n}y$, eliminatisque divisoribus, pone coefficiens dati termini æquale datæ quantitati, & resoluta æquatione determina valorem n. Sed si resolvenda sit æquatio gradus paris, aliquando valor n provenit imaginarius, & operatio turbabitur. Ad exemplum unicum propono æquationem $x^4+2x^3-3x^2+2x+1=o$. Facta substitutione, $x=\frac{1}{n}y$, ejectisque divisoribus, oritur $y^4+2ny^3-3n^2y^2+2n^3y+n^4=o$. Si velis secundum terminum habere coefficiens $=1$, pone $2n=1$, & $n=\frac{1}{2}$, & rem conficies. Si velis tertii termini coefficiens $=-2$, fac $3n^2=2$, & $n=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. At si optares, ut coefficiens ejusdem termini esset $=2$, tum invenires $n=\pm\sqrt{\frac{-2}{3}}$, qui valor est imaginarius, & imaginariis æquationem repleret. Idem dic de terminis aliis.

6. Transformatio æquationis in aliam, cujus radices sint reciprocæ, convertit primos æquationis terminos in ultimos, & viceversa. Quare si æquatio careat penultimo termino in aliam transmutabitur, quæ carebit secundo. Substitutio adhibenda est $x=\frac{A}{y}$, in qua A pro libito potest determinari. Sit æquatio $x^7-3x^6+2x^2-2=o$. Utens substitutione invenies

$$\frac{A^7}{y^7}-\frac{3A^6}{y^6}+\frac{2A^2}{y^2}-2=o.$$

Multiplica per y^7, divide per 2, & inverso terminorum ordine, omnia signa in contraria converte, ut nanciscaris

$$y^7-A^2y^5+\frac{3A^6y}{2}-\frac{A^7}{2}=o,$$

quæ caret secundo termino, quum proposita careret penultimo. Hæc a fractionibus libera erit, si A accipiatur numerus par, qui sit divisibilis per 2.

7. Omnes istæ transformationes utilitatem habent in reductione æquationum. Nam sæpe æquatio, cujus reductio difficultatem habet maximam, & laborem poscit improbum, si opportune transformetur, negotio facili reducitur. Reduci æquationes dicimus, quum resolvuntur in duas, aut plures gradus inferioris. Ita reducetur æquatio $x^4+\overline{a+b}.x^3+abx^2+\overline{a-b}.c^2x-c^4=o$, si resolvatur in duas secundi gradus nempe $x^2+ax-cc=o$, $x^2+bx+cc=o$. Constat autem æquationem semper esse divisibilem per singulas earum, in quas resolvitur. Sed quoniam reductio æquationum & maximi momenti est, & maximæ difficultatis, methodi aperiendæ sunt, quibus, quum fieri potest, voti compotes efficiamur. Ac primum loquamur de reductione per factores simplices rationales.

8. Ad hanc rem meminisse oportet, ultimum terminum æquationis esse productum ex secundis terminis omnium factorum simplicium ex quibus, æquatio

tio componitur. Quare si æquatio divisorem habet linearem, hic constabit ex incognita addito, demptove divisore aliquo ultimi termini. Quapropter si omnes divisores rationales ultimi termini inveniantur, & tentetur æquationis divisio per incognitam additis, demptisve hisce divisoribus, palam fiet, utrum æquatio habeat, nec ne divisorem simplicem, adeoque radicem rationalem, ac propterea hac ratione resolvi possit. Ad exemplum ponatur æquatio $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$. Video, ultimum terminum alios divisores rationales habere non posse præter 1, 3, quibus tam signum $+$, quam $-$ est præfigendum. Per quatuor itaque factores tentari potest divisio $x - 1$, $x - 3$, $x + 1$, $x + 3$. Per duos ultimos frustra tentatur divisio; per duos primos divisio completur, & utraque divisione facta remanet $x - 1$; ergo æquatio coalescit ex tribus factoribus $x - 3$, $x - 1$, $x - 1$, & tres habet radices rationales $x = 3$, $x = 1$, $x = 1$, quarum duæ sunt æquales. Verumtamen si nullus sit factor simplex, qui constet ex incognita addito, demptove aliquo rationali divisore ultimi termini, evidens est, æquationem nulla præditam esse radice commensurabili. Adverte, quo expeditior fiat methodus, æquationem fore divisibilem per factorem linearem, quoties hujus secundus terminus mutato signo pro incognita substitutus, præbet terminos omnes ex contrarietate signorum sese elidentes.

9. Adversus hanc methodum sese offert difficultas, quæ primo intuitu videtur maxima. Si æquationis radix, seu secundus factoris terminus non sit numerus integer, sed fractus, qua ratione tentando inveniri poterit, quum ultimus terminus per infinitas fractiones dividi possit. Sed hanc difficultatem tollemus, si demonstremus, in æquatione, in qua nulla sit fractio, non posse valorem incognitæ esse fractionem. Hoc ostendam in æquatione secundi gradus, ex qua progrediar ad superiores. Sit æquatio $xx + ax + b = 0$ in qua a, b non sint fracti. Si fieri potest valor x sit fractio $\frac{m}{n}$; ergo facta substitutione habebimus

$\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b = 0$; ergo $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} = -b$; igitur $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n}$, sive $\frac{m}{n} . \overline{\frac{m}{n} + a}$

debet esse numerus integer; ergo $\frac{m}{n} + a$ aut debet esse n, aut multipla n. Sit fn; ergo $\frac{m}{n} = fn - a$; sed hic est numerus integer; ergo $\frac{m}{n}$ est integer, quod est contra hypothesim. Simili modo in æquatione tertii gradus $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, ubi nulla est fractio, sit $x = \frac{m}{n}$; ergo

$\frac{m^3}{n^3} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} = -c$; igitur $\frac{m^3}{n^3} + \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n}$, seu $\frac{m}{n} . \overline{\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b}$

est numerus integer; ergo necessario $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} + b$ erit multipla n. Sit fn; ergo

$\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n} = fn - b$; ergo $\frac{m^2}{n^2} + \frac{am}{n}$, sive $\frac{m}{n} . \overline{\frac{m}{n} + a}$ est numerus integer; igi-

igitur $\frac{m}{n}+a$ multipla n. Sit gn; ergo $\frac{m}{n}=gn-a$; igitur $\frac{m}{n}$ est numerus integer contra hypothesim. Quisque videt, progressum hunc demonstrandi eodem modo extendi ad æquationes quarti, quinti, & superioris gradus. Constat igitur radicem æquationis, in qua nulla sit fractio, fractionem esse non posse. Quæ quum ita sint, hoc unice evincit difficultas, difficile esse invenire factores rationales æquationum, in quibus continentur fractiones. Verum istæ per methodos paullo ante traditas transformantur in æquationes omni fractione carentes. Ad rem nostram redeamus.

10. Si divisores ultimi termini pauci fuerint, haud ægre analysta calculos aggredietur. Sed si plures fuerint, ut aliquando contingit, multiplicium calculorum labor adeo improbus, ac molestus evadit, ut quemlibet analystam valeat deterrere. Quare danda est opera, ut methodi patefiant, quibus inutiles cognoscantur, & calculi solum in quampaucis instituantur. Si formula A, cujus incognita est x, habeat factorem linearem $x+a$, advertendum est, facta $x=b$, numerum, in quem æquatio A convertitur, fore divisibilem per $b+a$. Ita formula x^4-x^2+x-10, quæ habet factorem simplicem $x+2$, si ponatur $x=3$, ut evadat 65, erit divisibilis per $3+2=5$, quod cum veritate consentit. Ex hac animadversione collige, in æquatione habente pro factore $x+a$, si fiat $x=o$, debere esse a divisorem ultimi termini, quod supra monuimus; si fiat $x=1$, numerum in quem mutatur æquatio habere divisorum $1+a$; demum si fiat $x=-1$, numerum, qui resultat, habere divisorem $-1+a$. Quandoquidem numeri $1+a$, a, $-1+a$, ita sunt affecti, ut primus secundum, secundus tertium unitate superet, proclive est cognitu, nullum ex divisoribus, quos præbet suppositio $x=o$, posse esse quæsitum numerum a, nisi aliquis ex divisoribus, quos sufficit suppositio $x=1$, superet a unitate, & nisi aliquis ex illis, quos dat suppositio $x=-1$, sit minor a unitate. Si hoc criterium adhibeas, multas divisiones inutiles effugies, dum inquiris radices commensurabiles. Si inter divisores ultimi termini, seu qui oriuntur ex suppositione $x=o$, plures fuerint, qui hisce conditionibus prædití sint, pone $x=2$, & observa, qui nam divisores orti ex hac suppositione excedant unitate illos, qui oriuntur ex suppositione $x=1$; qui enim hanc conditionem non habent, sunt excludendi. Ceterum memoria retinendum, singulis divisoribus præfigi posse non minus signum $+$, quam $-$.

11. Ut theoria hæc usu fiat familiaris, aliquot exemplis illustranda est. Inquiro radices commensurabiles æquationis $x^3-2xx-13x+6=o$. Inci-

A	B	C	D	
			I	II
2	20			
1	8	1, 2, 4, 8	4	-2
0	6	1, 2, 3, 6	3	-3
-1	16	1, 2, 4, 8, 16	2	-4
-2	16			

pio a suppositionibus, quas scribo in columna A, & pono $x=o$, formula fit 6; in suppositione $x=1$, formula fit 8; in suppositione $x=-1$, fit 16. Hos numeros scribo in columna B. In hac operatione signa negliguntur. Numerorum, qui inventi sunt, divisores omnes scribo sub C unum post alium; nempe numeri 6 divisores sunt $1, 2, 3, 6$; atque ita de aliis. Observo, utrum in diviso-

 ribus

ribus ſuppoſitionis $x = 0$ ſit aliquis, cui ſi addatur unitas, inveniatur in diviſoribus ſuppoſitionis $x = 1$, & ſi unitas detrahatur, inveniatur in diviſoribus ſuppoſitionis $x = -1$. Invenio duos, nempe 3, & -3. Hos ſcribo in D ſimul cum diviſoribus aliarum ſuppoſitionum, qui implent conditiones requiſitas. Præter duos hoſce nullus apparet. Rejectis igitur ceteris omnibus, unice per $x+3$, $x-3$ diviſio tentanda eſt. Si optas cognoſcere, utrum ambo factores, an unus tantum ſit utilis, pone $x = 2$. Formula ſit 20, in quo continetur factor 5, qui ſuperat unitate quatuor, & -2, qui ſuperat unitate -2. Hæc itaque ſuppoſitio neutrum excludit. Pone $x = -2$, formula ſit 16, in quo numero continetur quidem diviſor 1, qui deficit unitate a 2; at non continetur -5, qui unitate eſt minor quam -4. Excinditur ergo tamquam inutilis factor $x-3$, & ſolum tentanda diviſio per $x+3$. Facta vero diviſione remanet $x^2 - 5x + 2$. Æquatio igitur propoſita in duas reſolvitur $x+3=0$, $x^2-5x+2=0$, & habet radicem rationalem $x = -3$.

12. Exemplum alterum præbeat æquatio $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$

A	B	C
$x = 2$	24	
$x = 1$	0	diviſores omnes
$x = 0$	24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
$x = -1$	24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24
$x = -2$	0	

D

I	II	III *	IV *	V	VI
0	3	-1	4	-2	5
-1	2	-2	3	-3	4
-2	1	-3	2	-4	3

Exordior a ſuppoſitionibus, quæ continentur in columna A, & dant numeros columnæ B. Horum numerorum diviſores omnes continentur in C, ubi advertendum eſt o habere tamquam diviſores numeros omnes. Sex ſunt numeri, qui implent conditiones requiſitas, qui notati ſunt in D ſimul cum diviſoribus ſuperioribus, & inferioribus, a quibus differunt unitate. Aliqui ſine dubio inutiles ſint oportet. Quare ponamus $x = 2$, & formula evadit 24. Primus, ſecundus, quintus & ſextus numerus non excluduntur, quia in 24 inveniuntur diviſores 1, 4, -1, 6; at ſecundus, & quartus excluduntur, quia in 24 non inveniuntur diviſores, 0, 5. Si poneres $x = -2$, formula evaderet 0, qui quum omnes diviſores contineat, numerum nullum poteſt excludere. Si poneres $x = 3$, $x = -3$, nullus ex quatuor excluderetur. Reapſe æquatio eſt diviſibilis per quatuor factores $x-1$, $x+2$, $x-3$, $x+4$, & habet quatuor radices rationales $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$, $x = -4$. Quotieſcumque formula per aliquam ſuppoſitionem evadet $= 0$, advertendum eſt, in ea ſuppoſitione radicem æquationis contineri. Ita quoniam propoſita æquatio in duplici ſuppoſitione evadit $= 0$, nempe $x = 1$, $x = -2$, radices æquationes ſunt 1, -2.

13. Ad exemplum tertium proponatur æquatio

$$x^5 - 30x^3 + 29x^2 - 32x + 60 = 0$$

A	B	C
$x = 2$	96	
$x = 1$	28	1, 2, 4, 7, 14, 28
$x = 0$	60	1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
$x = -1$	150	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150

D

I	II	III	IV
*	*		
−1	4	−4	7
−2	3	−5	6
−3	2	−6	5

In ſuppoſitionibus $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, quæ notatæ ſunt in A, inveniatur quid fiat formula. Hoc autem indicat columna B. Numerorum inveniantur diviſores omnes, ut factum eſt in C. In D noto omnes diviſores mediæ lineæ, quibus in linea ſuperiore eſt diviſor major unitate, in inferiore minor. Sunt autem quatuor. Præter hos ceteri excluſi remanent, Ut ad pauciores redigantur, pone $x = 2$, & formula fiet 96. Ut primus diviſor valeret, deberet 96 habere pro diviſore 0; quod quum non accidat, primus numerus excluditur. Ut valeret ſecundus, deberet 96 eſſe diviſibilis per 5; quod quum fieri non poſſit, etiam ſecundus excluditur. Ut reliqui valeant, neceſſe eſt, ut 96 ſit diviſibilis per −3, & 8; dividi autem poteſt per utrumque. Divide itaque æquationem per duos factores $x - 5$, $x + 6$. Diviſio completur, & utraque peracta remanet formula $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$. Quare æquatio propoſita reſolvitur in tres duas lineares; & unam gradus tertii, & habet duas radices commenſurabiles nimirum $x = 5$, $x = -6$.

14. Poſtquam rationem docuimus inveniendi factores ſimplices rationales æquationum cujuslibet gradus, ſi adſint, poſtulabit nonnemo, ut etiam factores rationales ſecundi gradus inveniam; nam quum æquationum ſecundi gradus reſolutio ſit in poteſtate, maximam hæc theoria præbebit utilitatem. Ponamus $xx + bx + a$ eſſe factorem rationalem formulæ datæ, ſeu quod idem eſt eſſe ejuſdem formulæ diviſorem exactum. Si fiat $x = 0$, patens eſt in æquatione nihil remanere præter ultimum terminum, & in diviſore remanere tantummodo $+a$. Igitur neceſſe eſt a eſſe unum ex diviſoribus ultimi termini. Si fiat $x = 1$, diviſor evadet $1 + b + a$, qui eſt diviſor numeri, in quem convertitur formula in eadem ſuppoſitione. Igitur hujus numeri diviſores omnes inveniantur, ab iiſdem affectis ram ſigno $+$, quam $-$ demitur unitas. In numeris, qui prodibunt, contineatur oportet numerus $b + a$. Simili modo facta $x = -1$, diviſor evadet $1 - b + a$, qui dividet numerum, in quem in facta ſuppoſitione formula mutatur. Inveniantur ergo diviſores hujus numeri, ab iiſque unitas detrahatur. In numeris, qui inveniuntur, exiſtet numerus $-b + a$. Quoniam a eſt media arithmetica inter $b + a$, $-b + a$, ſequitur, in tribus ſeriebus, quæ continent numeros $b + a$, a, $-b + a$, eos tantum numeros eſſe conſiderandos, qui ſunt in arithmetica progreſſione. Ex numeris tribus arithmetice proportionalibus, qui reſpondet ſuppoſitioni $x = 0$, accipiendus eſt tamquam a; qui vero reſpondet ſuppoſitioni $x = 1$ accipiendus tamquam $b + a$. Superior ab hoc detrahatur & remanebit b. Subſtitue hos valores in trinomio $xx + bx + a$, & habebis factorem, per quem tentanda eſt diviſio, quæ ſi compleatur, habebitur æquationis factor rationalis ſecundi gradus, qui quærebatur.

15. Verum ſi plures habeantur numeri arithmetice proportionales reſpondentes ſuppoſitionibus $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, ne diviſorum multiplicitas analyſtam deterreat, aliæ ſuppoſitiones faciendæ erunt, ut $x = -2$, $x = -3$, vel

$x = 2$,

$x=2$, $x=3$, per quas inutiles numeri excludantur. Pone caussa exempli $x=-2$, $x=-3$, trinomium evadet $4-2b+a$, $9-3b+a$, per quod erit divisibilis formula, si in ipsa quoque fiat substitutio. Igitur ex divisoribus hujus numeri tam positive quam negative acceptis facienda est detractio 4, 9, & invenientur numeri, in quibus $-2b+a$, $-3b+a$ debent contineri. Hi autem quum sint termini progressionis $b+a$, a, $-b+a$, $-2b+a$, $-3b+a$ &c., evidens est, illas tantum progressiones utiles esse posse, quæ in novis suppositionibus habent terminos, qui consequuntur. Ceteras omnes tamquam inutiles rejice.

14. Exemplum primum præbeat æquatio quinti gradus

$$x^5+3x^4+2x^3+8x^2-36x+21=0.$$

A	B	C	D	E
1	1	1	1	−2, 0
0	21	1, 3, 7, 21	0	−21, −7, −3, −1, +1, +3, +7, +21,
−1	65	1, 5, 13, 65	1	−66, −14, −6, −2, 0, +4, +12, +64,
−2	125	1, 5, 25, 125	4	−129, −29, −9, −5, −3, +1, +21, +121,
−3	147	1, 3, 7, 21, 49, 147	9	−156, −58, −30, −16, −12, −10, −8, −6, −2, +12, +40, +138.

F

I	II	III	IV	V
*	*	*		*
−2	−2	0	0	0
−1	+1	−7	−3	−1
0	+4	−14	−6	−2
+1			−9	−3
			−12	

Suppositiones continentur in columna A, nempe $x=1$, $x=0$, $x=-1$. Formula in his evadet 1, 21, 65 ut in columna B. Horum numerorum invenio divisores omnes, quos pono in C. In D pone suppositionum quadrata. Ex singulis divisoribus sumptis tam positive, quam negative fac demas hæc quadrata, & provenient numeri, qui scripti sunt in E. Vide quot series arithmeticas possint habere in tribus lineis, quæ respondent tribus suppositionibus. Quinque dumtaxat sunt, quas scribo in F. Secundum scribe in trinomio pro a, primum dempto secundo pro b, & habebis quinque trinomia, per quæ tentanda est æquationis divisio.

17. Verum ut a tot molestiis divisionibus liberemur, fiat nova suppositio $x=-2$. Formula evadit 125. Hujus numeri omnes divisores scribantur in C. Ab his tam præfigendo signum +, quam −, detrahatur quadratum suppositionis 4, & numeri qui proveniunt scribantur in E. Ut prima series arithmetica valere possit, in his debet reperiri $+1$; reperitur; ergo non remanet exclusa. Ut valeat altera, deberet apparere $+7$; non apparet; ergo excluditur. Excluditur tertia, quia non adest -21, quarta, & quinta non excluduntur, qui adsunt numeri -9, -3, per quos producuntur progressiones arithmeticæ. Ut aliquas excludam ex tribus, quæ reliquæ sunt, utor nova suppositione $x=-3$, per quam formula convertitur in numerum 147, cujus divisores omnes invenio, & colloco in C. Ab his sumptis cum positive, tum negative demo quadratum suppositionis 9, & proveniunt numeri, qui apparent in E. In his, ut prima, & ultima series valeant, debet inesse $+2$, -4; non adsunt ergo series istæ excluduntur. Ut valeat quarta, debet adesse -12; adest; ergo series hæc, quæ est unica, tentanda est. Itaque $a=-3$, & $b=0+3=3$; qui valores positi in

ti in trinomio dant $x^2 + 3x - 3$. Tentetur divisio, qua peracta provenit $x^3 + 5x - 7$. Æquatio itaque quinti gradus in duas resolvitur rationales, alteram secundi, alteram tertii gradus, nempe $x^2 + 3x - 3 = 0$, $x^3 + 5x - 7 = 0$.

18. Secundum exemplum præbeat æquatio

$x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5 = 0$. Ut brevitati calculi serviam, accipio quinque suppositiones, nempe $x = 2$, $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$, quas scribo in A.

A	B	C	D	E
2	133	1, 7, 19, 133	4	− 137, − 23, − 11, − 5, − 3, + 3, + 15, + 129
1	33	1, 3, 11, 33	1	− 34, − 12, − 4, − 2, 0, + 2, + 10, + 32
0	5	1, 5	0	− 5, − 1, + 1, + 5
− 1	1	1	1	− 2 0
− 2	3	1, 3	4	− 7, − 5, − 3, − 1

F

I	II
15	3
10	2
5	1
0	0
− 5	− 1

In B scribo numeros, in quos convertitur formula in singulis suppositionibus. Horum numerorum divisores collocentur in C. Continet D quadrata suppositionum. A singulis divisoribus negative, & positive acceptis demo quadratum suppositionis, & qui numeri exurgunt scribo in E. Observo an habere possint combinationes numerorum arithmetice proportionalium, quorum unus sit in prima linea, alter in secunda, tertius in tertia, atque ita deinceps. Invenio duas quas scribo in F. Superfluum est, efficere novas suppositiones, ut una excludatur; nam quum formula sit quatri gradus, si gaudet uno factore secundi gradus rationali, gaudet etiam altero. Ex prima serie colligimus $a = 5$, $b = 10 - 5 = 5$; ergo nascitur trinomium $x^2 + 5x + 5$. Ex secunda sequitur $a = 1$, $b = 2 - 1 = 1$, unde secundum trinomium $x^2 + x + 1$. Reapse si unum per alterum multiplicetur, redit formula proposita. Quare æquatio resolvitur in duas rationales secundi gradus.

19. Supposuimus hactenus primum æquationis terminum omni coefficiente carere, si unitatem excipias. Quod si alio affectus sit coefficiente, licebit per hoc dividere æquationem, tum eamdem transformare in aliam fractionum expertem, deinde ad inveniendos factores rationales uti regulis expolitis. Sed si molesta est hæc transformatio, principia tradita huic quoque casui applicari possunt. Incipiamus a divisoribus unius dimensionis. Formulæ datæ sit factor $mx + a$. Si ponas x successive æqualem $2, 1, 0, -1, -2$; hic factor evadet $2m + a$, $m + a$, a, $-m + a$, $-2m + a$, quæ sunt in aritmetica progressione, in qua hæc advertenda sunt. Omnium terminorum differentia m est coefficiens speciei x in factore. Eadem differentia m debet esse divisor coefficientis primi termini formulæ propositæ. Quantitas a respondens suppositioni $x = 0$ est factoris secundus terminus. Demum termini progressionis arithmeticæ erunt divisores formulæ propositæ, si in ipsa pro x successive substituatur $2, 1, 0, -1, -2$. His animadversis, quum quærendi sunt divisores lineares, in prima columna pone suppositiones in secunda columna numeros, in quos proposita formula convertitur in singulis suppositionibus. Horum numerorum inveni divisores omnes. In his selige illos, qui sunt in arithmetica progressione, cujus differentia sit divisor

ficiens primi termini propositæ est 4, qui habet tres divisores, nempe 1, 2, 4. Si eligam 1, nequidquam res tentatur, nullus enim obtinetur factor secundæ dimensionis satisfaciens. Assumamus 2, & in D scribantur quadrata suppositionum multiplicata per 2. Hi numeri detracti a singulis divisoribus positis in C acceptis tum positive, tum negative obtineo numeros notatos in E. His sedulo examinatis unam dumtaxat invenio progressionem arithmeticam, quam scribo in F. Hujus numerus medius -11 respondens suppositioni $x=0$ ponatur in trinomio pro a. Ut habeam b demo, $-11ex-3$, & habeo $b=8$; ergo trinomium fit $2x^2+8x-11$, per quod si dividatur formula, exurgit quotiens $2x^3-7$.

23. Si quærantur factores formulæ, quæ quintum gradum non superent, si existant, semper invenientur per methodos expositas. Nam si formulæ istæ careant factoribus gradus primi, & secundi, nullum habere possunt factorem gradus tertii. Sed si formula ad sex, aut amplius dimensiones ascendat, poterit sæpe resolvi in factores trium, aut plurium dimensionum. Methodus inveniendi hujusmodi factores innititur iisdem principiis. Sed quum calculus longus satis fiat, ac molestus, neque magnam habeat utilitatem, ad utiliora progrediemur.

24. Quæ tradita sunt hactenus, pertinent ad æquationes numericas, quarum factores rationales determinantur. Nunc de æquationibus literalibus. Ac primum æquatio præter x includat solum a, atque ita, ut in singulis terminis summa exponentium x, & a sit eadem. In his res est nullius negotii. Nam pone $a=1$, tum æquationis numericæ, quæ provenit, inveni factores rationales. Si sint lineares secundum terminum multiplica per a, si sint secundi gradus, multiplica secundum terminum per a; tertium per aa, & habebis factores quæsitos. Sit data æquatio $x^3+4ax^2-17a^2x-12a^3=0$. Pone $a=1$, ut exurgat æquatio numerica $x^3+4x^2-17x-12=0$. Hæc, ut ex regulis traditis cognosces, habet factorem simplicem $x-3$, ergo proposita habebit factorem $x-3a$. Similiter si proponatur æquatio $2x^5+5ax^4-3a^2x^3-8a^3x^2-20a^4x+12a^5=0$, pone $a=1$, ut habeas $2x^5+5x^4-3x^3-8x^2-20x+12=0$, quæ prædita est factore duarum dimensionum $2x^2+5x-3$; igitur proposita erit prædita factore $2x^2+5ax-3aa$.

25. Quamquam in æquationibus illis, quæ præter x duas literas a, b, continent, iisdem regulis potes obtinere factores simplices, & duarum dimensionum, tamen aliquot artificia analytica, quæ quasi non vocata sese offerunt, te voti compotem expeditius efficient. Inquiramus primum, utrum formula habeat factores, qui non contineant nisi duas literas ex. ca. x, a. Quoniam b in factore locum non habet, nihil conferet divisioni, ergo divisio æque perfici poterit, tametsi fit $b=0$. Deleantur itaque termini omnes, in quos ingreditur b; quæ residua est formula, eumdem factorem habebit; idem igitur erit divisor tum quantitatis residuæ, tum integræ, seu, quod idem est, eorum terminorum, qui deleti sunt. Quapropter si inveniatur harum quantitatum communis divisor maximus, obtinebitur factor quæsitus ex duabus literis coalescens, cujuscumque sit dimensionis.

26. Ut

26. Ut theoria aliquo exemplo fiat clarior, sit æquatio $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + ab^2x + a^4 + a^2b^2 = 0$, cujus inquiritur factor constans ex solis litteris x, a. Sepone terminos, in quibus adest b, nempe $abbx + a^2b^2$; remanent $x^4 + ax^3 + 2a^2x^2 + 3a^3x + a^4$. Duarum formularum, nempe sepositæ, & residuæ, inveni divisorem communem, qui est $x + a$; hic erit factor propositæ. Similiter sit æquatio $x^5 - 4ax^4 + 6aax^3 - abx^3 + abbx^2 + 2a^2bx^2 - 4a^3x^2 - 2a^2b^2x - 2a^3bx + 2a^3b^2 = 0$. Sepone terminos, ubi adest b, hoc est formulam A. $-abx^3 + abbx^2 + 2a^2bx^2 - 2a^2b^2x - 2a^3bx + 2a^3b^2$, & reliqua est B. $x^5 - 4ax^4 + 6a^2x^3 - 4a^3x^2$. Duarum formularum A, B inveniendus est divisor communis. Formulam A divide per b, & sepone terminos, ubi b adhuc locum habet, hoc est C. $abx^2 - 2a^2bx + 2a^3b$, & remanet D. $-ax^3 + 2a^2x^2 - 2a^3x$. Idem divisor debet esse communis etiam formulis C, D. Harum formularum divisor est $xx - 2ax + 2aa$. Inquiro, utrum dividat etiam formulam A. Divisio perficitur ergo $x^2 - 2ax + 2aa$, est factor æquationis propositæ.

27. Nunc vero spectemus formulam ex tribus litteris x, a, b constantem, quæ aut nullum habeat factorem ex duabus tantum literis compositum, aut, si habeat ab eodem fuerit liberata. Quæramus ejus factores unius dimensionis, qui constent tribus literis. Factorem hujusmodi exprimo per $mx + na + pb$. Si successive fiant a, x, $b = 0$, factor in tres mutatur $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$. In his terminus quilibet bis reperitur; nam si spectes primum, terminus mx apparet etiam in tertia, & pb in secunda. Ita de aliis. Præterea earum summa dat duplum divisoris integri. Nemo unus non videt, tres formulas $mx + pb$, $na + pb$, $mx + na$ dividere formulam datam, si in ipsa successive fiant a, x, $b = 0$. Quare ad inveniendos divisores simplices formulæ propositæ, fac successive a, x, $b = 0$, & adnota tres formulas, quæ exurgunt in tribus suppositionibus, quæ duabus tantum literis constabunt. Harum omnium fac invenias divisores omnes simplices duabus literis constantes. Ex his elige tres, quibus insit conditio supra posita, ut quilibet unius terminus in aliis duobus reperiatur. Si hujusmodi invenies divisores, dimidium eorum summæ factorem simplicem formulæ propositæ exhibebit. Si ad inveniendos tres divisores duarum literarum, qui impleant conditiones requisitas, necesse est, in aliquo utriusque termini signa mutare, id omnino faciendum esse constat, quia quæ quantitas aliam dividit, dividet etiam mutatis signis.

28. Exemplis theoria illustranda est. Sit æquatio $2x^3 + 7ax^2 - 3bx^2 + 5a^2x - 3abx + 4b^2x + 10ab^2 - 6b^3 = 0$.

A	B	C	D
$x = 0$	$10abb - 6b^3$	$5a - 3b$, $10a - 6b$	$5a - 3b$
$a = 0$	$2x^3 - 3bx^2 + 4b^2x - 6b^3$	$2x - 3b$	$2x - 3b$
$b = 0$	$2x^3 + 7ax^2 + 3a^2x$	$2x + 5a$	$2x + 5a$

In

In A pono suppositiones; In B scribo quantitates, in quas in singulis suppositionibus mutatur proposita; In C harum quantitatum divisores omnes duarum literarum; in D vero divisores tres, qui implent conditiones requisitas, ut scilicet termini unius in duobus aliis reperiantur. Hos divisores collige in summam, & accipe dimidium, & habebis factorem propositæ $2x+5a-3b$. Reapse peracta divisione remanebit quotiens $x^2+ax+2bb$.

29. Exemplum alterum præbeat æquatio

$$8x^4-2ax^3-10bx^3-3a^2x^2-5abx^2-12abbx+9a^2b^2+15ab^3=0$$

A	B	C	D
$x=0$	$9a^2b^2+15ab^3$	$3a+5b,\ 9a+15b$	$-3a-5b$
$a=0$	$8x^4-10bx^3$	$4x-5b,\ 8x-10b$	$4x-5b$
$b=0$	$8x^4-2ax^3-3a^2x^2$	$4x-3a,\ 2x+a$	$4x-3a$

In A habes suppositiones, in B formulas, in quas mutatur proposita in istis suppositionibus, in C harum formularum divisores omnes duarum literarum. Si primo ex his divisoribus mutes omnia signa, tres invenies, qui requisitis conditionibus satisfaciunt, quos scribo in D. Dimidium summæ horum trium $4x-3a-5b$ præbet divisorem propositæ, factaque divisione potieris quotiente $2x^3+ax^2-3abb$.

30. In his exemplis non scripsimus in columna C divisores unius literæ, quia isti sufficere non possent factorem compositæ ex tribus literis constantem, sed tantum ex duabus. Hos autem paullo ante alia methodo docuimus invenire. Verum si quis hac methodo vellet divisores duarum literarum simul cum divisoribus trium literarum determinare, id facere posset, dummodo una tantum dimensione donati sint. Unico exemplo rem patefaciam in æquatione

$$16x^3+16bx^2-48ax^2+35a^2x-16abx-6a^3+3a^2b=0$$

A	B	C
$x=0$	$-6a^3+3a^2b$	$\overset{(3)}{a},\ \overset{(3)}{-2a+b}$
$a=0$	$16x^3+16bx^2$	$\overset{(16)}{x},\ \overset{(16)}{x+b}$
$b=0$	$16x^3-48ax^2+35a^2x-6a^3$	$a-4x,\ 3a-4x,\ x-2a$

D

I	II	III
$-a$	$-3a$	$-2a+b$
$4x$	$4x$	$x+b$
$4x-a$	$4x-3a$	$x-2a$

In A de more scribo suppositiones, in B formulas, in quas mutatur proposita in singulis suppositionibus, in C harum formularum divisores. Ne autem eorum numerus plus nimio augeretur, apposui supra numerum intra ( ) positum, qui indicat divisorem illum literalem posse multiplicari & per eum numerum, & per singulos ejusdem numeri divisores. Ita formulæ mediæ divisor est x, qui habet suprapositum (16), qui docet, non solum x, sed etiam $2x$, $4x$, $8x$, $16x$ esse similiter ejusdem formulæ divisores. His effectis inquiro inter divisores tres, qui impleant conditionem, ut termini unius in aliis duobus reperiantur. Tri-

 pli-

plici modo id obtinetur, ut apparet in D. Igitur dimidium summæ accipiendo habebimus tres factores propositæ $4x-a$, $4x-3a$, $x-2a+b$. Reapse si dividas propositam per $4x-a$, invenies quotientem $4x^2-11ax+4bx+6a^2-3ab$. Hunc si dividas per $4x-3a$, invenies $x-2a+b$.

31. Aliquot animadversiones non dissimiles illis, quas fecimus in divisoribus unius dimensionis, methodum aperient inveniendi factores duarum dimensionum. Sit factor, qui quæritur, $mx^2+nax+pbx+qa^2+rab+sb^2$. Ponantur successive x, a, $b=0$, atque in his suppositionibus factor in tres formulas convertitur nimirum

$qa^2+rab+sb^2$	quæ sine dubio divident formulam propositam, si in ipsa successive fiant $x, a, b=0$. In his divisoribus termini, qui continent quadrata literarum x, a, b, bis inveniuntur in duobus, qui autem continent rectangula ex duabus literis semel.
$mx^2+pbx+sb^2$	
$mx^2+nax+qa^2$	

Quare in tribus divisoribus duarum literarum, quæ a proposita elicientur, hæc conditio spectanda erit, ut quadrata semper reperiantur in duobus, rectangula numquam repetantur. His inventis accipiatur dimidium summæ quadratorum, et integra summa rectangulorum. Quod prodibit erit factor quæsitus æquationis.

32. Exemplum primum det formula

$$x^4-3ax^3-a^2x^2+abx^2-b^2x^2+3a^3x-3ab^2x-a^3b-ab^3=0$$

A	B	C	D I	D II
$x=0$	$-a^3b-ab^3$	ab, $aa+bb$	ab	$-aa-bb$
$a=0$	$x^4-b^2x^2$	xx, $xx-bb$	xx	$xx-bb$
$b=0$	$x^4-3ax^3-a^2x^2+3a^3x$	x^2-3ax, $xx-aa$	$xx-3ax$	$xx-aa$

In A continentur suppositiones, in B quantitates, in quas mutatur proposita in suppositionibus singulis. Harum divisores duarum dimensionum continentur in C. Qui implent conditiones requisitas habentur in D. Ex his, si accipias dimidium summæ quadratorum, et integra rectangula, invenies duos factores $xx-3ax+ab$, $xx-aa-bb$, quos si invicem multiplices restituent propositam formulam. In primo factorum ternario potest rectangulum ab, affici utroque signo $+$, $-$. Ambiguitas vero per actualem divisionem tollenda est. Si instituisses divisionem propositæ formulæ per $xx-3ax-ab$, divisio non compleretur; ergo hic non est factor propositæ. Completur autem, si fiat per $xx-3ax+ab$.

33. Exempium secundum, & ultimum habebis in æquatione $2x^5-3ax^4+3a^2x^3+b^2x^3-3a^3x^2-ab^2x^2+a^4x+a^2b^2x-a^3b^2=0$

A	B	C
$x=0$	a^3b^2	a^2, ab, bb
$a=0$	$2x^5+b^2x^3$	x^2, $2x^2+bb$
$b=0$	$2x^5-3ax^4+3a^2x^3-3a^3x^2+a^4x$	$2x^2-ax$, x^2+aa.

D I	D II
bb	aa
$2xx+bb$	xx
$2xx-ax$	$xx+aa$

Formula convertitur in eas, quæ sunt in B, si fiant suppositiones positæ in A. Divisores duarum dimensionum formularum B habes in C. Inquiro eos, qui implent conditiones, quæ postulantur. Qui scri-

ſcripti ſunt in D primo loco, ſine dubio adimplent. Ex his formatur factor $2xx - ax + bb$, per quem reapſe formula propoſita diviſibilis eſt. Adverto tres quoque, qui ſcripti ſunt ſecundo loco, conditionem implere, tametſi in illos b non ingrediatur; nam quadrata iterantur non iteratis rectangulis; ergo per illos inveniemus factorem duarum literarum $xx + aa$. Facta autem utraque diviſione orietur $x - a$. Quare æquatio reſolvetur in tres, unam ſimplicem, & duas ſecundi gradus. Non vacat, dicere de diviſionibus plurium dimenſionem, & literarum; quæ majorem utilitatem habent, ea ſatis nobis explicata videntur. Teoriam hanc factorum rationalium dilucide, eleganter, atque accurate pertractavit Clairaut Vir Doctiſſimus, a quo accepimus. Ceterum uſus, atque eſercitatio, quæ in hiſce rebus plurimum valet, faciliores methodos tibi ſuggeret ad inveniendos factores rationales plurium æquationum.

CAPUT TERTIUM.

De reſolutione æquationum per factores quoſcumque.

Poſtquam methodum tradidimus reſolvendi æquationes per factores rationales, ut rectum ordinem ſequamur, ea tradenda eſt, quæ pertinet ad factores quoſcumque. Quemadmodum autem illa, ita hæc quoque tentando perficitur. Primum methodum aperiemus in æquationibus quarti gradus, deinde in æquationibus quinti, & ſexti, unde quantum generalis ſit, apparebit.

1. Sit propoſita æquatio $x^4 + ax^3 + \begin{matrix} aaxx \\ - abxx \end{matrix} - a^2bx - a^3b = 0$. Accipe duas æquationes ſecundi gradus $xx + yx + u = 0$, $xx + sx + z = 0$, in quibus y, u, s, z ſunt quantitates determinandæ in progreſſu analyſeos; eaſdemque ſimul multiplica, ut habeas

$$\begin{matrix} x^4 + yx^3 + ux^2 + usx + zu = 0. \\ + sx^3 + syx^2 + zyx \\ + zx^2 \end{matrix}$$

Hujus termini ſinguli comparentur, & æquatur cum ſingulis terminis propoſitæ. Secundi termini comparati dant $s = a - y$, ultimi $z = -\frac{a^3b}{u}$, quarti $yz + su = -a^2b$. In hac ſubſtituantur valores s, z, ut habeatur ſequens æquatio inter y, u; $y = \frac{au^2 + a^2bu}{uu + a^3b}$. Ex æquatione $z = -\frac{a^3b}{u}$ docemur, u eſſe diviſorem termini a^3b. Hujus quantitatis inveniantur diviſores omnes ſecundi gradus (diviſores unius, aut trium dimenſionum ad rem non faciunt, quia æquationes ſubſidiariæ ſunt ſecundi gradus). Ii autem ſunt $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a\sqrt{ab}$. Incipiamus a primo, & ponamus $u = ab$, qui valor dabit $y = \frac{2ab}{a+b}$. Quare una ex æquationibus ſubſidiaris fiet $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$.

Ne-

Nequidquam tentabis per hanc dividere æquationem propositam, divisio enim non perficitur; igitur divisor assumptus est inutilis. Tentemus alium divisorem $-ab$, facta $u=-ab$, invenietur autem $y=o$; ergo subsidiaria æquatio fiet $xx-ab=o$. Per hanc dividitur formula proposita, & quotiens resultat $xx+ax+aa$. Itaque æquatio data resolvitur in duas $xx-ab=o$, $xx+ax+aa=o$. Si sumpsisses $u=aa$, invenisses $y=a$, & formula subsidiaria mutata fuisset in $xx+ax+aa$, per quam divisa proposita, ortus fuisset quotiens $xx-ab$. Quod si tentatis divisoribus omnibus, divisio non perficitur, æquatio saltem per hanc methodum reduci non potest.

2. Si in hac analysi divisiones vitare velis, ex assumpto valore u inveni reliquas y, s, z. Earum valores in trinomiis colloca, trinomia inter se multiplica. Si exurgat æquatio proposita, res perfecta est; sin minus alii divisores tentandi. Sed expeditius hoc cognosces, si eam æquationem respicias, quam tertii termini præbent, nempe $u+sy+z=aa-ab$, cujus usus factus est nullus. Si valores u, y, s, z substituti reddant hanc æquationem identicam, inserviunt resolutioni propositæ; secus sunt prorsus inutiles.

3. Quærantur factores æquationis $x^4+2bx^3+bbxx-a^3b=o$. Hujus termini comparentur cum singulis terminis ejus, quæ nascitur ex duobus trinomiis auxiliaribus inter se multiplicatis, quæ habetur N. 1. Orientur quatuor æquationes $y+s=2b$, $u+sy+z=bb$, $zy+su=o$, $zu=-a^3b$. Ex prima $s=2b-y$, ex ultima $z=-\frac{a^3b}{u}$, qui valores s, z ponantur in tertia $-\frac{a^3by}{u}+2bu-uy=o$ idest $y=\frac{2buu}{a^3b+uu}$. Quando autem ex æquatione $z=-\frac{a^3b}{u}$ apparet u esse divisorem quantitatis $-a^3b$, accipiamus hujus divisores omnes secundi gradus, qui sunt $\pm a^2$, $\pm ab$, $\pm a\sqrt{ab}$. Si primi duo rationales examinentur, palam fiet, eos esse omnino inutiles, quia secunda æquatio non redditur identica. Examinemus $a\sqrt{ab}$, quæ fiat $=u$, invenietur $y=b$, $z=-a\sqrt{ab}$, $s=b$. Hi valores ponantur in secunda æquatione, & exurget $a\sqrt{ab}+bb-a\sqrt{ab}=bb$, quæ est identica; ergo isti valores resolutionem suppeditant. Trinomia autem erunt $xx+bx+a\sqrt{ab}=o$, $xx+bx-a\sqrt{ab}=o$. Eadem invenisses, supponendo $u=-a\sqrt{ab}$. Reapse duo trinomia multiplicata æquationem propositam producunt.

4. In æquationibus quinti gradus duæ æquationes accipiendæ sunt in subsidium, altera secundi gradus, altera tertii, atque earum productum comparandum est cum proposita, ut coefficientes determinentur. Sit æquatio $x^5-4ax^4+6a^2x^3-8a^3x^2+5a^4x-a^5=o$. Sume duas æquationes auxiliares $xx+yx+u=o$, $x^3+txx+sx+z=o$, quarum productum erit

$$x^5+yx^4+ux^3+tux^2+sux+zu=o$$
$$+tx^4+tyx^3+syx^2+zyx$$
$$+sx^3+zx^2$$

Si hujus termini æquentur singulis ter-

terminis propositæ nascentur quinque æquationes nempe $y+t=-4a$, $u+ty+s=6a^2$, $tu+sy+z=-8a^3$, $su+zy=5a^4$, $zu=-a^5$. Ex prima $t=-4a-y$; ex ultima $z=-\frac{a^5}{u}$; ex quarta $s=\frac{5a^4-zy}{u}=\frac{5a^4}{u}+\frac{a^5y}{uu}$.

Valores isti collocentur in secunda, ut oriatur $u-4ay-yy+\frac{5a^4}{u}+\frac{a^5y}{uu}=6a^2$, sive $yy+4ay-\frac{a^5y}{uu}=-6aa+u+\frac{5a^4}{u}$. Quoniam ex æquatione $z=-\frac{a^5}{u}$, cognoscimus u esse divisorem a^5, accipiamus hujus quantitatis divisores omnes, qui sunt $\pm aa$. Ponamus primum $u=aa$. Æquatio ultimo inventa fiet $yy+3ay=0$, hoc est vel $y=0$, vel $y=-3a$. Examinemus valorem primum $y=0$. His suppositis, erit $t=-4a$, $s=5aa$, $z=-a^3$. Valores isti collocentur in tertia æquatione, cujus nullus factus est usus, & fiet $-4a^3-a^3=-8a^3$, quæ minime identica est; ergo sunt inutiles. Examinemus secundum valorem $y=-3a$, & habebuntur valores $t=-a$, $s=2a^2$, $z=-a^3$, qui in tertia positi dant $-a^3-6a^3-a^3=-8a^3$, quæ identica est; ergo valores isti satisfaciunt. Positi itaque in formulis subsidiariis dabunt duas, in quas resolvitur proposita æquatio, nimirum $xx-3ax+aa=0$, $x^3-ax^2+2a^2x-a^3=0$; quæ duæ æquationes simul multiplicatæ propositam restituunt. Si divisor $+aa$ inutilis inventus esset, tentare oporteret $-aa$. Quod si neuter satisfaceret, æquatio saltem per hanc methodum esset irreducibilis.

5. Altera æquatio resolvenda sit $x^5+ax^4+a^3x^2-a^2b^2x-a^4=0$. Hujus
$-a^2bx^2$
termini singuli comparentur cum terminis ejus, quæ oritur ex multiplicatione duarum auxiliarium, & habetur N. 4. Æquationes quinque provenient $t+y=a$, $u+ty+s=0$, $tu+sy+z=a^3-a^2b$, $su+zy=-a^2b^2$, $zu=-a^4b$. Ex prima $t=a-y$, ex ultima $z=-\frac{a^4b}{u}$. In quarta substitue valorem z, & invenies $s=-\frac{a^2b^2}{u}+\frac{a^4by}{uu}$. Secunda, substitutis valoribus t, s fiet $u+ay-yy-\frac{a^2b^2}{u}+\frac{a^4by}{uu}=0$, sive $yy-ay-\frac{a^4by}{uu}=\frac{uu-a^2b^2}{u}$. Quum u debeat dividere quantitatem a^4b, hujus divisores secundi gradus accipiantur omnes, qui sunt $\pm aa$, $\pm ab$, $\pm a\sqrt{ab}$. Singuli examinandi sunt, sed aliis frustra tentatis, examinemus $-ab$, & ponamus $u=-ab$. Æquatio inter y, u proveniet $yy-ay-\frac{a^2y}{b}=0$, ex qua $y=0$, & $y=\frac{ab+aa}{b}$. Si hoc secundo valore y uta-

utamur, fiet $t = -\frac{aa}{b}$, $s = ab + \frac{a^3}{b} + \frac{a^4}{bb}$, $z = a^3$, qui valores ponantur in æquatione tertia, cujus nullus usus factus est, & orietur

$-a^3 + a^2 b + a^3 + \frac{a^4}{b} + \frac{a^5}{b^2} + \frac{a^5}{bb} + \frac{a^6}{b^3} + a^3 = a^3 - a^2 b$, quæ non est identica. Utamur ergo valore $y = o$, ex quo valores proveniunt $t = a$, $s = ab$, $z = a^2$. Æquatio tertia per hos valores mutatur in hanc $-a^2 b + a^3 = a^3 - a^2 b$, quæ identica est; ergo valores positi satisfaciunt. Itaque equationes, in quas resolvitur proposita sunt $xx - ab = o$, $x^3 + ax^2 + abx + a^3 = o$, quæ invicem multiplicatæ eamdem restituunt.

6. Tametsi sexti gradus æquatio resolvi aliquando possit in tres secundi gradus, tamen loquemur solum de resolutione in duas, aut ambas tertii gradus, aut unam secundi, alteram quarti; quia si resolvi potest in tres secundi gradus, resolvi etiam poterit in duas unam secundi, alteram quarti gradus, quæ item resolvi poterit in duas secundi. Sit æquatio $x^6 - 13ax^5 + 45a^2x^4 - 71a^3x^3 + 57a^4x^2 - 16a^5x + 2a^6 = o$, resolvenda in duas unam secundi, alteram quarti gradus. Accipe itaque æquationes duas $xx + yx + u = o$, $x^4 + px^3 + tx^2 + sx + z = o$, quas simul multiplica, ut habeas

$$\begin{aligned} x^6 + px^5 + tx^4 + sx^3 + zx^2 &+ zyx + zu \\ + yx^5 + pyx^4 + tyx^3 + syx^2 &+ sux \quad = o. \\ + ux^4 + pux^3 + tux^2 & \end{aligned}$$

Hujus termini singuli comparentur cum terminis datæ, ut oriantur sex æquationes $p + y = -13a$, $t + py + u = 45a^2$, $s + ty + pu = -71a^3$, $z + sy + tu = 57a^4$, $zy + su = -16a^5$, $zu = 2a^6$. Ex prima $p = -13a - y$, ex ultima $z = \frac{2a^6}{u}$. Valor p substituatur in secunda, & orietur $t = 45aa + 13ay + yy - u$. Valorem z pone in quinta, & invenies $s = -\frac{2a^6 y}{uu} - \frac{16a^5}{u}$. Valores inventi substituantur in quarta, & nascetur

$yy - \frac{16a^5uy + 13au^3y + 2a^6u - 57a^4uu + 45a^2u^3 - u^4}{u^3 - 2a^6} = o$. Quando u debet dividere $2a^6$, & divisores magis simplices sunt $\pm aa$, $\pm 2aa$, $\pm aa\sqrt{2}$, his æqualis u poni potest. Verum si facias u æqualem aut aa, aut $-aa$, nihil invenies. Tenta igitur $u = 2aa$. Fiet $yy + 15ay + 22aa = o$, quæ resoluta dat duos valores $y = -10a$, $y = -2a$. Primum tentando inutilem deprehendes. Secundus valor y dabit $p = -11a$, $t = 31a^2$, $s = -7a^3$, $z = a^4$, qui positi in æquatione tertia, qua nondum usi sumus, efficent

$-7a^3-42a^3-22a^3=-71a^3$, quæ identica eſt. Quare formulæ duæ, in quas propoſita reſolvitur, erunt $xx-2ax+2aa=0$, $x^4-11ax^3+21a^2x^2-7a^3x+a^4=0$, quæ in ſeſe ductæ eamdem reſtituent.

7. Animadverſio hic omittenda non eſt. Si adhibuiſſem non quartam æquationem, ſed tertiam, prodiiſſet æquatio cubica $2y^3+26ay^2+81a^2y+74a^3=0$; quum antea invenerim æquationem quadraticam, quæ facilioris eſt reſolutionis. Quare electio terminorum, quibus utamur, plurimam afferre poteſt utilitatem. Nihilominus per æquationem cubicam rem eodem modo conficerem, quia ejus radices ſont $y=-2a$, $y=-\frac{11a}{2}\mp\frac{a}{2}\sqrt{47}$, quarum una, nimirum $-2a$, eos valores præberet, quæ quartam æquationem redderent identicam.

8. Propono nunc æquationem ſexti gradus reſolvendam in duas tertii ſcilicet; $x^6+3ax^5+4aax^4+6a^3x^3+6a^4x^2+3a^5x+2a^6=0$. In auxilium vocandæ ſunt de more duæ æquationes tertii gradus $x^3+yx^2+px+u=0$, $x^3+tx^2+sx+z=0$, quarum productum eſt hujuſmodi.

$$\left.\begin{array}{l} x^6+yx^5+px^4+ux^3+tux^2+sux+zu \\ \quad +tx^5+tyx^4+ptx^3+psx^2+pzx \\ \qquad +sx^4+syx^3+zyx^2 \\ \qquad\quad +zx^3 \end{array}\right\} =0.$$

Terminorum comparatio dabit ſex æquationes ſcilicet $y+t=3a$, $p+ty+s=4a^2$, $u+pt+sy+z=6a^3$, $tu+ps+zy=6a^4$, $su+pz=3a^5$, $zu=2a^6$. Ex prima $t=3a-y$; ex ultima $z=\frac{2a^6}{u}$. In quinta iſti valores ſubſtituantur, & invenientur

$s=\frac{3a^5}{u}-\frac{2a^6p}{uu}$. Ex ſecunda ſubſtitutis valoribus

$p=\frac{4a^2u^2-3a^5u+u^2y^2-3auy^2}{uu-2a^6}$; item ex tertia

$p=\frac{6a^3u^2-u^3-3a^5uy-2a^6u}{3auu-u^2y-2a^6y}$. Duo valores p inter ſe æquentur, expurgataque æquatione invenietur

$$\begin{array}{l} y^3 - 6a^7uy^2 + 8a^8uy - 6a^3u^3 \\ -6au^3y^2 - 6a^5u^2y + 9a^6u^2 \\ +13a^2u^3y - 12a^9u \\ +4a^{12} \\ -u^4 \\ \hline u^3 + 2a^6u \end{array} = o.$$

Quoniam ex ultima constat u esse divisorem $2a^6$, omnes hujus quantitatis divisores tentemus. Pono itaque $u = a^3$, & æquatio orietur $y^3 - 4ay^2 + 5a^2y - 2a^3 = o$, quæ habet duas radices æquales nempe $y = a$, & unam inæqualem $y = 2a$. Hac utamur, & inveniemus valores $t = a$, $z = 2a^3$, $p = a^2$, $s = a^2$, qui valores positi in quarta æquatione dant $a^4 + a^4 + 4a^4 = 6a^4$, hoc est identicam. Valores itaque utiles sunt, & dant æquationes tertii gradus $x^3 + 2ax^2 + aax + a^3 = o$, $x^3 + ax^2 + a^2x + 2a^3 = o$, quæ in sese ductæ propositam restituunt. Si valor $y = 2a$ fuisset inutilis, tentassem alium $y = a$. Si hic quoque inutilis deprehensus fuisset, ponenda foret successive u æqualis aliis divisoribus tertij gradus quantitatis $2a^6$. Quod si omnes forent inutiles, per hanc methodum resolvi æquatio non posset.

9. Quamquam methodus ista applicari etiam possit æquationibus graduum superiorum, tamen difficultas maxime ob terminorum multiplicitatem augetur. Si resolvenda esset æquatio gradus octavi in duas quarti, in singulis æquationibus auxiliaribus quatuor indeterminatæ haberentur; quare facto etiam unius termino ultimo æquali divisori ultimi termini propositæ, se se offerrent æquationes solidæ, quæ difficilia sunt resolutionis. Attamen si resolvantur, voti compotes efficiemur. Methodus ista, quæ tentando progreditur, ad optatum exitum sæpenumero non perducit. Attamen si formulæ eæ sint, quæ convertibiles nominantur, sine dubio istæ in plures secundi gradus resolventur quæ quidem aliquando imaginaria possunt continere. Æquationes convertibiles sunt gradus paris, ejusque exponens vocetur $= n$; In primo termino adest x^n, habens pro coefficiente solam unitatem, in ultimo est quantitas constans, quam voco $= a^n$. Quilibet terminus positus inter medium, & ultimum divisus per congruam radicem a^n debet esse præditus eodem coefficente, & signo, quo terminus respondens positus inter medium, & primum. Ita convertibiles erunt æquationes $x^4 + bx^3 + ccxx + aabx + a^4 = o$, $x^6 - bx^5 + b^2x^3 - a^4bx + a^6$. Methodus resolvendi has æquationes est hujusmodi. Assumatur formula secundi gradus $xx + fx + aa = o$, in qua f est quantitas determinanda. Deinde formetur formula convertibilis inferior duobus gradibus, ita ut primus terminus sit x^{n-2}, ultimus a^{n-2}, cujus coefficientes pariter sint indeterminati. Istæ duæ æquationes simul multiplcentur, & ejus, quæ nascitur, termini singuli comparentur cum terminis datæ, usque ad terminum medium inclusive; ceterorum enim comparatio easdem, ac primi æquationes præbent. Eje-

ctis

ctis omnibus indeterminatis præter f, proveniat æquatio inter f, & constantes Valores omnes ex hac æquatione eliciti, positi in trinomio $xx+fx+aa=o$, exhibebunt æquationes secundi gradus, in quas proposita resolvitur.

10. Propono ad exemplum primum æquationem convertibilem $x^4+2bx^3+2aabx+a^4=o$. Efformo æquationem convertibilem duobus gradibus inferiorem, scilicet $xx+bx+aa=o$, quam multiplico per trinomium $xx+fx+aa$, ut nascatur convertibilis æquatio

$$\begin{array}{l} x^4+bx^3+2a^2x^2+a^2fx+a^4=o. \\ \quad +fx^3+fbx^2+a^2bx \end{array}$$

Comparatio terminorum duas æquationes præbet $f+b=2b$, $2aa+fb=o$. Valorem b elicitum ex prima substitue in secunda, ut habeas $2aa+2bf-ff=o$, seu $ff-2bf=2aa$, cujus radices sunt $f=b\pm\sqrt{2aa+bb}$. Hos valores pone in trinomio, & habebis $xx+bx+x\sqrt{2aa+bb}+aa=o$, $xx+bx-x\sqrt{2aa+bb}+aa=o$, in quas æquatio proposita resolvitur.

11. Exemplum alterum sufficiat æquatio $x^6+a^6=o$. Efformo æquationem convertibilem gradus quarti $x^4+gx^3+bx^2+a^2gx+a^4=o$, quam multiplico per trinomium $xx+fx+aa=o$, ut habeam formulam convertibilem gradus sexti

$$\begin{array}{l} x^6+gx^5+bx^4+a^2gx^3+a^4x^2+a^4fx+a^6=o. \\ \quad +fx^5+fgx^4+fbx^3+a^2fgx^2+a^4gx \\ \qquad\quad +a^2x^4+a^2gx^3+a^2bx^2 \end{array}$$

Facta comparatione cum proposita secundi, tertii, & quarti termini præbentur tres æquationes $f+g=o$, $b+fg+a^2=o$, $2a^2g+fb=o$. Ex prima $g=-f$, qui valor substitutus in reliquis dat duas $b-ff+aa=o$, $-2a^2f+fb=o$. Ex harum prima $b=-aa+ff$; ergo facta substitutione in altera $f^3-3a^2f=o$, ex qua tres valores f proveniunt $f=o$, $f=a\sqrt{3}$, $f=-a\sqrt{3}$. Hi valores positi in trinomio $xx+fx+aa=o$ dant tres æquationes secundi gradus, in quas proposita resolvitur, scilicet $xx+aa=o$, $xx+ax\sqrt{3}+aa=o$, $xx-ax\sqrt{3}+aa=o$. Gabriel Manfredius Analysta doctissimus in primo Ac. Bononiensis tomo formulas convertibiles in usum traduxit ad resolvenda nonulla binomia, & trinomia in factores reales secundi gradus; quod nos deinceps adhibita faciliori methodo absolvemus.

12. Non videtur hoc loco omittenda methodus deprimendi æquationes, quotiescumque constat, eas præditas esse duabus, aut pluribus radicibus æqualibus, quam tradit Joannes Huddenius vir celeberrimus in fine Geometriæ cartesianæ de reductione æquationum regula 10. Illa enim sæpe in usum traducitur, & utilissima est. Sed quoniam sine ulla demonstratione proponitur, danda nobis opera est, ut certa fundamenta detegamus, quibus innititur. Demonstravimus Cap. primo, binomium $x+a$ elevatum ad potestatem m ita exprimi $x^m+max^{m-1}+\frac{m.\overline{m-1}}{2}a^2x^{m-2}+\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}a^3x^{m-3}$ &c. Si ab

 hac

hac formula tollamus primum terminum x^m, tum auferamus maximum factorem cujuslibet divisoris, demum dividamus per ma, proveniet formula

$x^{m-1} + \overline{m-1}\,.\,a x^{m-2} + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{2} a^2 x^{m-3}$ &c., quæ nihil est aliud, nisi binomium $x+a$ elatum ad potestatem $m-1$, uno scilicet gradu minorem. Verum facile est cognoscere, hæc omnia obtineri, si singulos formulæ terminos multiplicemus per singulos terminos seriei arithmeticæ $0, 1, 2, 3$ &c., eosque omnes dividamus per ma. Quapropter si supponamus $x+a=0$, constat fore tum $\overline{x+a}^m = 0$, tum $\overline{x+a}^{m-1} = 0$, atque in hac secunda formula numerum radicum æqualium esse unitate minorem quam in prima. Igitur si singulos terminos expositæ formulæ, quæ supponitur $=0$, multiplicemus per singulos terminos seriei arithmeticæ $0, 1, 2, 3$ &c., resultabit formula quæ erit $=0$, & habebit numerum radicum æqualium unitate imminutum. Idem manifestam est valere, si singuli termini multiplicentur per seriem arithmeticam $0, n, 2n, 3n$ &c. quia hæc nova series hoc solum discrimen inducit, quod singulos terminos multiplicat per n.

13. Idem dicas velim, si æquationis singulos terminos multiplices per singulos terminos cujuslibet seriei arithmeticæ $b, b+n, b+2n, b+3n$ &c. Nam hæc operatio nihil aliud præstat, quam multiplicare primum singulos terminos per b, quod dat $b\,.\,\overline{x+a}^m$; tum eosdem successive multiplicare per $0, n, 2n, 3n$ &c.; quod ut constat ex N. superiore dat $nma\,.\,\overline{x+a}^{m-1}$; ergo hæc operatio præbet formulam æqualem $b\,.\,\overline{x+a}^m + mna\,.\,\overline{x+a}^{m-1}$, seu $\overline{bx+ba+mna}\,.\,\overline{x+a}^{m-1}$, quæ habet $m-1$ radices æquales, adeoque $=0$.

14. Quod demonstratum est de illis æquationibus, quæ solis radicibus æqualibus constant, idem non est difficile extendere ad illas quoque, quæ radices habent partim æquales, partim inæquales. Intelligantur primum, omnes termini formulæ exprimentis potestatem m binomii $x+a$ duci in x^p, tum termini singuli multiplicentur per terminos singulos seriei arithmeticæ cujuslibet $b, b+n, b+2n$, &c. manifestum est provenire formulam, quæ æquabit $\overline{bx+ba+mna}\,.\,x^p\,.\,\overline{x+a}^{m-1}$, quæ $=0$, & habet radices æquales $m-1$. Iam vero specta quamlibet æquationem coalescentem partim ex radicibus æqualibus, partim ex inæqualibus. Radices æquales det $\overline{x+a}^m$, inæquales formula $x^p + Ax^{p-1} + Ba^{p-2}$ &c. Itaque æquatio ita disponi poterit

$$\begin{aligned} & x^{m+p} + ma x^{m+p-1} + \frac{m.\overline{m-1}}{2} a^2 x^{m+p-2} + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3} a^3 x^{m+p-3} \text{ \&c} \\ & \quad + Ax^{m+p-1} + maAx^{m+p-2} + \frac{m.\overline{m-1}}{2} a^2 A x^{m+p-3} \text{ \&c.} \\ & \quad + Bx^{m+p-2} + maBx^{m+p-3} \text{ \&c.} \\ & \quad + \text{\&c.} \end{aligned}$$

Si

Si hujus formulæ termini ſinguli ducantur in terminos ſeriei arithmeticæ b, $b+2n$, $b+2n$, $b+3n$ &c., manifeſtum eſt, terminos poſitos in ſuperiori linea horizontali multiplicari per ſeriem, cujus primi termini ſunt b, $b+n$; terminos poſitos in ſecunda linea horizontali duci in terminos ſeriei, cujus ſunt primi termini $b+n$, $b+2n$; ſimiliter qui poſiti ſunt in linea horizontali tertia duci in ſeriem, cui primi termini ſunt $b+2n$, $b+3n$, atque ita deinceps; ſed iſtæ lineæ horizontales ſunt poteſtas m binomij $x+a$, ducta in terminos x^p, Apx^{p-1}, Bx^{p-2} &c.; ergo facta multiplicatione omnes $=o$, & continent $m-1$ radices æquales; ergo tota æquatio $=o$, & continet radices æquales numero $m-1$. Q. E. D.

15. His demonſtratis regula Huddenii fit manifeſta. Si habeas æquationem, cui inſint duæ, aut plures radices æquales, ejus terminos multiplica per terminos cujuslibet ſeriei arithmeticæ; æquatio, quæ proveniet, continebit eaſdem radices æquales, ſed earum numerus erit unitate minutus. Formulæ datæ, & inventæ diviſor communis inveniatur, qui continebit factorem præbentem radices equales. Per hunc dividatur data tot vicibus, quot ſunt radices æquales, & remanebit formula alias radices continens. Utile autem erit vel maxime eligere ſeriem arithmeticam, quæ incipiat a o; nam ita æquatio provenit uno gradu depreſſior. Verum potes, adhibitis duabus ſeriebus arithmeticis duas æquationes invenire, quarum diviſor communis dabit factorem, per quem data eſt dividenda. Cave tamen, ne utraque æquatio oriatur eadem. Juvabit vero ſecundam ſeriem eligere, quæ deſinat in o. Ita enim, facta diviſione per x, obtinebitur æquatio inferior gadu uno. Si radices æquales eſſent plures, quam duæ, potes multiplicationem per ſeriem arithmeticam iterare, donec habeas æquationem unam tantum ex radicibus æqualibus continentem. Adverte, in hac analyſi non eſſe omittendos terminos, qui deſunt, & ſpectandos eſſe, ut multiplicatos per o.

16. Æquationem præditam duabus radicibus æqualibus $x^3-5x^2+8x-4=o$, multiplico per ſeriem arithmeticam $o, 1, 2, 3$, ut fiat $-5x^2+16x-12=o$. Eamdem multiplico per ſeriem inverſam $3, 2, 1, o$, ut oriatur $3x^3-10x^2+8x=o$, ſive facta per x diviſione $3x^2-10x+8=o$. Æquationum inventarum diviſor communis eſt $x-2$, per quem bis diviſa æquatione data fit $x-1=o$. Itaque æquationis duæ radices æquales erunt $x=2$, inæqualis $x=1$.

17. Proponatur reſolvenda æquatio quarti gradus, in qua conſtat adeſſe duas radices æquales

$x^4 * -43x^2+150x-144=o$. Multiplica terminos ſingulos per
$o, 1, 2, 3, 4$

$-86x^2+450x-576=o$, ſeu facta diviſione per 2

$-43x^2+225x-288=o$. Si multiplicarem per ſeriem $4, 3, 2, 1, o$ proveniret æquatio tertii gradus. Hujus autem, & ſuperioris inveniendus eſſet diviſor communis. Quare ſatius erit multiplicare per ſeriem $3, 2, 1, o, -1$, ut proveniat æquatio quarti gradus, ſed quæ reſolvi poſſit ad modum quadraticæ, hoc eſt $3x^4-43x^2+144=o$. Reſolvamus primam æquationem, & fiet

$x-$

$\overline{x - \frac{225}{2.43}}^2 = \frac{\overline{225}^2}{2^2.\overline{43}^2} - \frac{288}{43} = \frac{50625 - 49536}{2^2.\overline{43}^2} = \frac{1089}{2^2.\overline{43}^2}$: ergo $x = \frac{225 \pm 33}{2.43}$. Ex qua duo eruuntur valores $x = 3$, $x = \frac{96}{43}$. Resolvamus alteram $\overline{x^2 - \frac{43}{2.3}}^2 = \frac{\overline{43}^2}{2^2.3^2} - \frac{144}{3} = \frac{1849 - 1728}{2^2.3^2} = \frac{121}{2^2.3^2}$; ergo $x^2 = \frac{43 \pm 11}{2.3}$, ex quo duo valores $x^2 = \frac{54}{2.3} = \frac{27}{3} = 9$, $x^2 = \frac{32}{2.3} = \frac{16}{3}$. Primus dat $x = 3$. Itaque communis divisor erit $x - 3$. Per hunc bis divisa æquatione proposita prodibit $xx + 6x - 16 = 0$, quæ radices inæquales præbebit.

18. Quoniam in æquationibus raro existunt conditiones, per quas radices veræ ex superioribus methodis deteguntur, propterea conati sunt analystæ, hasce radices per approximationem, ut ajunt, determinare, hoc est invenire radicem, quæ differat a vera, quantitate quantum volueris minima. Plures methodi excogitatæ sunt; nos unam tantum scilicet nevvtonianam paucis exponemus. Quam ob rem necesse est præmittere aliqua de limitibus æquationum, quam theoriam Erasmus Bertolinus in introductione ad geometriam Cartesii acceptam refert Florimundo de Baune. Limites æquationum sunt quantitates duæ inæquales, intra quas radix vera posita est. Quomodo autem hi limites inveniantur propositis aliquot exemplis declaramus.

19. Sit æquatio $x^2 + px = q$; ergo $px < q$, & $x < \frac{q}{p}$. Similiter erit $q > x^2$, & $\sqrt{q} > x$, & $x\sqrt{q} > x^2$, & addendo px, fiet $px + x\sqrt{q} > x^2 + px$; sed $x^2 + px = q$; ergo $px + x\sqrt{q} > q$, & $x > \frac{q}{p + \sqrt{q}}$. Itaque verus valor x positus est inter quantitates inæquales $\frac{q}{p}$, $\frac{q}{p + \sqrt{q}}$, quæ sunt limites, est enim x minor prima, major secunda. Nunc quæramus limites æquationis $x^2 - px + q = 0$; erit $x^2 + q = px$; ergo $x^2 < px$, & $x < p$. Similiter quia $x^2 = px - q$, quantitas $px - q$ erit positiva; igitur $px > q$, & $x > \frac{q}{p}$. Itaque limitec erunt p, $\frac{q}{p}$. Sit æquatio $x^2 = px + q$, erit $x^2 > q$, & $x > \sqrt{q}$, & $x\sqrt{q} > q$; ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$; sed $px + q = x^2$, ergo $px + x\sqrt{q} > x^2$, ex qua sequitur $x < p + \sqrt{q}$. Similiter $x^2 > px$, & $x > p$; ergo $px > p^2$, & $px + q > p^2 + q$; sed $px + q = x^2$; ergo $x^2 > p^2 + q$, & $x > \sqrt{p^2 + q}$. Quare limites æquationis sunt $p + \sqrt{q}$, qua x minor est, & $\sqrt{p^2 + q}$, qua x est major.

20.

20. Definiamus limites æquationis $x^3+r=qx$; Erit $qx>r$; ergo $x>\frac{r}{q}$; Similiter $x^3<qx$; ergo $x^2<q$, & $x<\sqrt{q}$. In æquatione $x^3+qx=r$ ita procede; est $qx<r$; ergo $x<\frac{r}{q}$. Item $r>x^3$, & $r^{\frac{1}{3}}>x$, & $r^{\frac{2}{3}}>x^2$; ergo $r^{\frac{2}{3}}x>x^3$, & $r^{\frac{2}{3}}x+qx>x^3+qx$; sed $x^3+qx=r$; ergo $r^{\frac{2}{3}}x+qx>r$, & $x>\frac{r}{r^{\frac{2}{3}}+q}$; quare x posita est inter limites, & est minor $\frac{r}{q}$, major $\frac{r}{r^{\frac{2}{3}}+q}$. Si habeatur æquatio $x^3-px^2=r-qx$. Si sit $x>p$, erit quoque $r>qx$, seu $x<\frac{r}{q}$. Si vero $x<p$, erit quoque $r<qx$, & $x>\frac{r}{q}$. In utroque casu igitur limites sunt p, & $\frac{r}{q}$. In æquatione $x^3+r=px^2+qx$ est $px^2+qx>r$, & $x^2+\frac{q}{p}x>\frac{r}{p}$, & $x^2+\frac{q}{p}x+\frac{q^2}{4p^2}>\frac{r}{p}+\frac{q^2}{4p^2}$, & $x+\frac{q}{2p}>\frac{1}{2p}\sqrt{4rp+qq}$, demum $x>\frac{\sqrt{4rp+qq}-q}{2p}$. Similiter $px^2+qx>x^3$, & $q>x^2-px$, & $q+\frac{pp}{4}>\overline{x-\frac{p}{2}}^2$; ergo $x-\frac{p}{2}<\frac{1}{2}\sqrt{4q+pp}$, demum $x<\frac{\sqrt{4q+pp}+p}{2}$. Limites itaque sunt $\frac{\sqrt{4rp+qq}-q}{2p}$, $\frac{\sqrt{4q+pp}+p}{2}$. Hæc exempla sufficant ad ostendendam methodum inveniendi limites æquationis, quæ solum industriam in analysta requirit.

21. Inventis limitibus ad determinandam radicem prope veram per approximationem hæc methodus tenenda est, Assume quantitatem intra limites positam, quam voco $=p$, tum fac $x=p+y$, quæ y satis exigua erit. Facta substitutione invenietur æquatio continens y, in qua ob exiguitatem y, omnes ejus potestates excepta infima deleantur; quare valor y statim determinabitur, quem valorem adde p, & qui resultat voca $=q$, hic erit valor x proprior vero. Si optas appropinquare magis, fac $x=q+y$, & repete operationem, donec valor x quantum volueris parum a vero discrepet. Ut autem radicalia, & fractiones diversæ vitentur, utile erit, quemadmodum vulgo fit, omnia in fractionibus decimalibus exprimere. Unum aut alterum exemplum methodum declarabit.

22. Æquationis $x^2-5x-31=0$ radix per approximationem invenienda sit.

fit! Quoniam 8 positus est inter $5+\sqrt{31}$, & $\sqrt{56}$, qui sunt limites æquationis, pone $x=8+y$. Facta substitutione fiet

$$\begin{array}{lll} x^2 & 64+16y+yy & \\ -5x = & -40-5y & =0 \\ -31 & -31 & \end{array}$$

Ergo deleta yy propter exiguitatem fiet $-7+11y=0$, sive $y=\frac{7}{11}$, sive proxime $=0.6$; ergo $x=8.6$. Pono iterum $x=8.6+y$, & æquatio in hanc mutatur

$$\begin{array}{ll} x^2 & \frac{7396}{100}+\frac{172}{10}y+yy \\ -5x = & -\frac{430}{10}-5y \\ & -31 \end{array}$$

Deleta yy, & reductione facta $-0.04+1220y=0$; ergo $y=\frac{0.04}{1220}=0.0032$.

Itaque $x=8.6032$, qui valor magis ad verum accedit. Fac tertio $x=8.6032+y$ Invenies

$$\begin{array}{lll} x^2 & 74.01505024+17.20640000.y+y^2 & \\ -5x= & -43.01600000-5.00000000.y & =0 \\ -31- & 31.00000000 & \end{array}$$

sive $-0.00094976+12.20640000.y$, sive $y=0.0000077808$, seu $x=8.6032077808$. Atque hac methodo progredieris, si velis ad valorem verum x magis magisque accedere.

23. Simili modo investigo radicem æquationis $x^3+2x^2-23x-70=0$. Limitum methodus me docet, valorem x non multum abesse a 5. Quare fit $x=5+y$. Æquatio omissis superioribus potestatibus y fiet

$$\begin{array}{lll} x^3 & 125+75y\ldots\ldots & \\ +2x^2 & 50+20y\ldots\ldots & \\ = & & =0 \\ -23x & -115-23y & \\ -70 & -70. & \end{array}$$

sive $-10+72y=0$ aut $y=\frac{10}{72}=0.1$ proxime. Itaque habemus $x=5.1$. Ponamus iterum $x=5.1+y$, habebimus

$$\begin{array}{lll} x^3 & 132.651+78.030.y\ldots\ldots & \\ +2x^2 & 52.020+20.400.y\ldots\ldots & \\ = & & =0 \\ -23x & -117.300-23.000.y & \\ -70 & -70.000 & \end{array}$$

Reducta itaque æquatione obtinemus $-2.629+75.430.y=0$, sive $y=\frac{2.629}{75.430}$, quæ quam proxime $=0.0349$; ergo $x=5.1349$. Eodem modo licet progredi, quousque libuerit.

24. Sed relictis methodis, quæ aut tentando procedunt, aut solum valorem vero proximum inveniunt, videamus, quænam æquationes gradum quartum excedentes tutam exactamque resolutionem accipiunt; non enim suppetit methodus

ecu-

æcumenica, qua omnes resolvamus. Resolvuntur autem primo, quum spoliatæ secundo termino carent aliis omnibus, si ultimum excipias; deinde quum unus tantum terminus ex mediis adest, in quo exponens incognitæ dimidium est exponentis termini primi, quod contingere non potest, nisi exponens maximum sit numerus par; post resolvuntur, quum ex mediis adsunt termini duo ita, ut exponentia in tribus terminis sint quemadmodum 3, 2, 1, quod postulat exponens maximum esse divisibile per 3; demum quum medii termini tres sunt, & exponentia sunt ut 4, 3, 2, 1, quod obtineri nequit, nisi exponens primi termini dividi possit per 4. Adverte, perfici eodem modo resolutionem, tametsi aliquis ex terminis desit, & intelligatur multiplicatus per o. Hæc omnia clara sunt ex iis, quæ diximus de resolutione æquationum secundi, tertii, & quarti gradus. Nemo unus non videt, conditiones istas angustis admodum finibus contineri in omnibus æquationibus, sed in illis præsertim, in quibus incognitæ exponens maximum est numerus primus. In his enim præter primam conditionem nulla haberi potest, sub qua resolutionem accipiant. Verum Vincentius Riccatus opusculo quarto tomi primi methodum aperuit determinandi omnes æquationes cujuscumque gradus, quarum radix una eo modo exprimi potest, quo radix cardanica æquationum cubicarum. Ne theoriam maximi momenti prætermittamus, quæ magis necessaria sunt, desumemus ex eo opusculo, quod si legas, eamdem uberius tractatam comperies.

25. Rem itaque aggrediens incipiam ab æquationibus gradus alterius, deinde ad altiores progrediar. Pono $x = m + n$, elevo ad quadratum $xx = mm + 2mn + nn$, sive $xx - 2mn \begin{matrix} -mm \\ -nn \end{matrix} = o$. Hujus radix est $x = m + n$, cui etiam addere possumus $x = -m - n$, ut radicem extrahenti palam fiet. Ad æquationes cubicas progrediens elevo $x = m + n$ ad tertiam potestatem $x^3 = m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$, quam ita dispono $x^3 = m^3 + 3mn . \overline{m+n} + n^3$. Ad eamdem partem translatis terminis, substituo x pro $m + n$, & invenio $x^3 - 3mnx \begin{matrix} -m^3 \\ -n^3 \end{matrix} = o$, cujus radix una erit $x = m + n$. Ad hanc æquationem unica hæc conditio requiritur, ut secundus terminus desit, quod semper obtinere possumus. Ut æquationes gradus quarti expediam, effero ad quartam potestatem $x = m + n$, & invenio $x^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$, quæ hoc modo est distribuenda $x^4 = m^4 + 4mn . \overline{m+n}^2 \begin{matrix} \\ -2m^2n^2 \end{matrix} + n^4$. Pro $m + n$ pono x, & translatis terminis nanciscor $x^4 - 4mnx^2 + 2m^2n^2 \begin{matrix} -m^4 \\ -n^4 \end{matrix} = o$, cujus radix una $x = m + n$. In qua æquatione hæc conditio necessaria est, ut deficiente secundo termino desit etiam quartus, adeoque nulla potestas impar incognitæ x reperiatur.

26. Elevetur ad quintam potestatem $x = m + n$, & prodibit $x^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$. Hæc autem ita disponenda

est $\begin{array}{l} x^5 = m^5 + 5mn.\overline{m+n}^3 + n^5 \\ \qquad - 5m^2n^2.\overline{m+n} \end{array}$. Ejice binomium $m+n$ substituta x, & transfer terminos, $x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x \begin{array}{l} - m^5 \\ - n^5 \end{array} = 0$. Conditiones in æquatione insunt duæ. Prima petit, ne termini omnes non absint, in quibus incognita parem tenet dimensionem. Altera exigit, ut coefficiens x^3 elatum ad quadratum sit quintuplum coefficientis x. Sexta potestas æquationis $x = m+n$ erit $x^6 = m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$. Hanc ita dispone $\begin{array}{l} x^6 = m^6 + 6mn.\overline{m+n}^4 + n^6 \\ \qquad - 9m^2n^2.\overline{m+n}^2 \\ \qquad + 2m^3n^3 \end{array}$. Si transferas terminos, & substituas x pro $m+n$, habebis $x^6 - 6mnx^4 + 9m^2n^2x^2 - 2m^3n^3 \begin{array}{l} - m^6 \\ - n^6 \end{array} = 0$, in qua præter conditionem requirentem, ut omnis terminus absit, in quo x ad imparem potestatem ascendit, necesse est, ut coefficiens termini x^2 sit æquale quadrato coefficientis x^4 diviso per 4.

27. Quum agitur de æquatione gradus septimi, potestas septima æquationis $x = m+n$ ita erit distribuenda $\begin{array}{l} x^7 = m^7 + 7mn.\overline{m+n}^5 + n^7 \\ \qquad - 14m^2n^2.\overline{m+n}^3 \\ \qquad + 7m^3n^3.\overline{m+n} \end{array}$, quæ facta consueta substitutione, & translatis terminis in hanc mutabitur $x^7 - 7mnx^5 + 14m^2n^2x^3 - 7m^3n^3x \begin{array}{l} - m^7 \\ - n^7 \end{array} = 0$. Hæc caret terminis omnibus, in quibus x ad parem potestatem ascendit. Præterea si coefficientis termini x^5 divisi per 7 quadratum sumas, & multiplices per 14, habebis coefficiens termini x^3, si sumas cubum, & multiplices per 7, habebis coefficiens termini x. Æquatio his conditionibus prædita obtinet radicem $x = m+n$. Postquam elevaveris $x = m+n$ ad octavam potestatem, æquationem ita distribue $\begin{array}{l} x^8 = m^8 + 8mn.\overline{m+n}^6 + n^8 \\ \qquad - 20m^2n^2.\overline{m+n}^4 \\ \qquad + 16m^3n^3.\overline{m+n}^2 \\ \qquad - 2m^4n^4 \end{array}$, cujus terminos si transferas, & pro $m+n$ ponas x, invenies

x^8

$x^8 - 8mnx^6 + 20m^2n^2x^4 - 16m^3n^3x^2 + 2m^4n^4 \begin{array}{l}-m^8\\-n^8\end{array} = o$. Ab hac abſunt termini omnes poteſtatis imparis, & coefficientia determinata ſunt uno determinato. Ad æquationem gradus noni inveniendam, eadem methodo utere, atque hanc obtinebis $x^9 - 9mnx^7 + 27m^2n^2x^5 - 30m^3n^3x^3 + 9m^4n^4x \begin{array}{l}-m^9\\-n^9\end{array} = o$, cujus radix una eſt $x = m + n$.

28. Mirabuntur fortaſſe nonnulli, me uſque ad æquationem gradus noni methodum produxiſſe, quæ cæteroquin non videtur difficilis intellectu. Verum hoc maxime neceſſarium viſum eſt, ut eas, quibus æquationes noſtræ præditæ ſunt, conditiones determinarem. Quiſque videt æquationes viduatas ſecundo termino carere ſimiliter quarto, ſexto, aliiſque tenentibus ſedes pares. Quare æquatio gradus imparis nullum habet terminum, in quo x obtineat poteſtatem parem; contra in æquationibus gradus paris nullus erit terminus, in quo x teneat imparem dimenſionem. Ultimus terminus communis omnibus eſt $-m^p - n^p$: p eſt exponens maximum incognitæ x. Præterea in æquationibus paribus adeſt terminus $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$; qui cenſendus eſt coefficiens quantitatis x^0. Termini, qui exiſtunt in æquatione, ſi excipias m^p, n^p, quibus ſemper præfigitur ſignum $-$, ſigna habent alternantia. Quapropter in æquationibus paribus termino $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$ præfigendum eſt ſignum $+$, ſi p ſit numerus pariter par, hoc eſt ex ſerie hac 4, 8, 12, 16 &c.; contra ſcribendum eſt $-$, ſi p ſit numerus impariter par, ideſt ex ſerie 2, 6, 10, 14 &c. In coefficientibus habetur gradatim mn, m^2n^2, m^3n^3 &c. Verum numeri his præfigendi non ita faeile inveniuntur, ſi excipias illum, qui multiplicat mn, quem conſtat eſſe ſemper $= p$. Ut cæteros inveniam, ex octo illis caſibus, quos ſupra tractavi, efformo tabulam hoc modo.

29. Tabula

	mn	m^2n^2	m^3n^3	m^4n^4	m^5n^5	m^6n^6	m^7n^7
II	2						
III	3						
IV	4	2					
V	5	5					
VI	6	9	2				
VII	7	14	7				
VIII	8	20	16	2			
IX	9	27	30	9			
X	10	35	50	25	2		
XI	11	44	77	55	11		
XII	12	54	112	105	36	2	
XIII	13	65	156	182	91	13	
XIV	14	77	210	294	196	49	2

In primo ordine horizontali colloco mn, m^2n^2, m^3n^3 &c., quibus numeri, qui quæruntur, sunt præfigendi. In prima columna verticali, quæ est ad sinistram, numeris romanis exprimo gradum æquationis, cui numeri, qui sequuntur, conveniunt. Scribo numeros, qui in octo casibus consideratis inventi sunt, non omisso a in æquationibus paribus, qui ducendus est in $m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}} x^0$.

30. Si perpendo columnam subjectam mn, video, eam esse seriem arithmeticam crescentem per unitatem, ejusque terminos semper æquales esse numeris gradum æquationis indicantibus: quare produci poterit nullo negotio, addendo cuilibet numero unitatem. Quilibet numerus columnæ, quæ subest m^2n^2, est summa cum numeri, qui supra ipsum positus est in eadem columna, tum ejus, qui in columna proxima ad sinistram sita per duas sedes superior est. Ita in gradu quinto numerus quæsitus est $2+3$, in sexto $5+4$, in septimo $9+5$, atque ita deinceps. Hac autem ratione in altioribus gradibus hanc columnam sum persequutus. Similis lex valet in omnibus aliis columnis. Quilibet enim numerus est æqualis numero superiori ejusdem columnæ, & numero antecedentis columnæ, qui respondet gradui per duas unitates minori. Ex hac methodo efformavi etiam in gradibus superioribus tabulam, quam exhibui, quæ nullo negotio produci potest, quousque libuerit. Ex hac autem tabula æquationem cujuscumque gradus reperies, cujus radix una est $x=m+n$, quam æquationem deinceps canonicam appellabo.

31. Formularum canonicarum usus modo declarandus est. Æquatio qualibet cujuscumque gradus, quæ careat terminis omnibus in sedibus paribus, excepto ultimo, & quæ terminorum existentium coefficientes proportionales habeat quantitatibus mn, m^2n^2, m^3n^3 &c. multiplicatis per numeros nostræ tabulæ gradui æquationis convenientes, hæc inquam æquatio recipiet radicem similem radici æquationis cubicæ. Radix autem hæc invenitur per collationem æquationis datæ cum æquatione canonica. In æquationibus secundi, & tertii gradus methodus declarata est, ubi de hisce æquationibus egimus. Incipiamus ab æquatione gradus quarti, quam generatim ita expono $x^4 \pm 4ax^2 + 2aa - b = 0$. Facta comparatione cum canonica invenio $mn = \mp a$, $m^4 + n^4 = b$. Eliminata specie n fiet $m^4 + \frac{a^4}{m^4} = b$, sive $m^8 - bm^4 = -a^4$, quæ resoluta dabit

$$m = \sqrt[4]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}.$$ Calculus idem determinabit

$$n = \sqrt[4]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^4}}.$$ Radices quartæ unitatis sunt quatuor, nimirum $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$. Quare si signum radicale radicem illam designet, quæ respondet unitatis radici $+1$, hosce inveniemus quatuor

Va-

Valores m	Valores n
$\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$	$\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$
$-\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$	$-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$
$\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$	$\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$
$-\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$	$-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$

Ex his valoribus m, n, qui simul multiplicati exhibent $-a$, radices præbebunt æquationis propositæ, quum valet signum superius. Qui vero simul multiplicati dant $+a$, præbent radices æquationis, quum valet signum inferius.

32. Itaque æquationis $x^4-4ax^2+2aa-b=0$ radices erunt

$$x=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$$

$$x=-\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$$

$$x=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$$

$$x=-\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}$$

Æquationis vero $x^4+4ax^2+2aa-b=0$ radices erunt

$$x=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$$

$$x=-\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}$$

$$x=\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}+\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}.$$

$$x=-\sqrt[4]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}-\sqrt[4]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^4}}.\sqrt{-1}.$$

33. Ad quinti gradus æquationem progredior, quæ est hujusmodi $x^5-5ax^3+5a^2x-b=0$. Hæc comparata cum canonica præbebit æquationes duas $mn=a$, $m^5+n^5=b$, ex quibus elicies $m=\sqrt[5]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b}{4}-a^5}}$, $n=\sqrt[5]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^5}}$. Quinque sunt unitatis radices quintæ, nempe

1,

1, $\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{+\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{+\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}$. Qua de re quinque cum m, tum n valores invenientur, ex quibus illi radicem propositæ æquationis exprimens, qui simul multiplicati præbent $+a$. Ex hoc criterio radices determinabis, quas, ut brevioribus formulis complectar, pono m, n æquales radicibus illis, quæ respondent unitatis radici quintæ $+1$. Hoc supposito en tibi æquationis radices $x=m+n$

$$x=m.\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}+n.\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x=m.\frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}+n.\frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x=m.\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}+n.\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-0-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$x=m.\frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{2}+n.\frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

34. Ex hisce exemplis, quæ diligenter persequutus sum, perspicuum est, qua methodo altiores æquationes sint pertractandæ. In æquationibus gradus imparis x^p-pax^{p-2} &c. $-b=o$, invenies semper hanc radicem

$$x=\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}+\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}+\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}-\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}},$$

in qua radicalia signa eas exprimunt radices, quæ respondent unitatis radici $p^{\text{esimæ}}+1$. In æquationibus paribus, quæ secundum terminum affectum habent signo $-$, ut x^p-pax^{p-2} &c. $-b=o$, radices sunt

$$x=\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}+\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}+\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}-\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{bb}{4}-a^p}}}}$$

$$x=-\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}+\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}-\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}-\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}.$$

Quæ vero secundum terminum habent affectum signo $+$, duas hasce radices recipiunt

$$x=\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}+\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}-\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}-\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}$$

$$x=-\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}+\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}}+\underset{1}{\sqrt[p]{\frac{b}{2}-\underset{1}{\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}}},$$

in quibus omnibus eæ radices a signis radicalibus designantur, quæ respodent unitatis radici $p^{\text{esima}}+1$. Censeo, non esse prætermittendum discrimen, quod intercedit inter æquationes gradus imparis, ac gradus paris. Nam in æquatione gradus imparis si a transeat

ſeat in negativam, mutatur radix $\sqrt[p]{\frac{bb}{4}-a^p}$; quum enim includat a elatam ad poteſtatem imparem, terminus a^p eſt poſitivus, ſi a ſit poſitiva, negativus, ſi a ſit negativa. Quare non eſt neceſſe diſtinguere caſus duos, a poſitivæ, a negativæ; una enim eademque formula utriuſque radicem exhibet per ſolam mutationem ſignorum. Non ita accidit æquationi pari: nam vel a ſit poſitiva, vel negativa, elata ad poteſtatem parem eodem ſigno afficitur. Quapropter per ſolam mutationem ſignorum utriusque caſus radices obtinere non poſſumus, & neceſſarium eſt alterum ab altero diſtinguere, ac ſeparatim radices exhibere, ut præſtitum eſt.

35. Ad alias radices eruendas, neceſſe eſſet cognoſcere omnes radices $p^{eſimas}$ unitatis, deinde ſingulas multiplicare tum per $\sqrt[p]{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$, tum per $\sqrt[p]{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}$; demum illas conjungere, quæ ſimul multiplicatæ efficiunt $+a$, ſi p ſit impar; vel poſito p pari, ſi in ſecundo termino inſit $+$, quæ exhibent $-a$, contra quæ dant $+a$, ſi in ſecundo termino inſit $-$. Quibus rite perſpectis ſatis conſtat, quænam ſint æquationes, cujus radix una poteſt exprimi ad modum radicis cubicæ cardanicæ.

36. Si huc referas, quæ de ſinibus, & coſinibus docuimus libro ſecundo cap. 12, ſtatim cognoſces, formulas omnes, ad quas devenimus, conſtrui poſſe inventis ſinibus, aut coſinibus logarithmi, aut arcus ſubmultipli, quod facilius fiet, ſi dividas formulas per 2 ita, ut non quæras integram radicem x, ſed ejus dimidium. Ut ſublata omni dubitatione methodus clare exponatur, tractatio omnis in quatuor hypotheſes eſt diſtribuenda. Prima hypotheſis ponit ambas a, b, poſitivas; ſecunda a poſitivam, b negativam; tertia a negativam, b poſitivam; quarta demum utramque negativam. Hypotheſis primæ formula eſt hujuſmodi,

$$\frac{x}{2}=\frac{\overline{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}+\overline{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$ quæ duos complectitur caſus, in primo ponitur $\frac{bb}{4}>a^p$, in ſecundo $\frac{bb}{4}<a^p$. In primo caſu comparanda eſt cum expreſſione coſinus logarithmi ſubmultipli, nempe cum

$$Cb.\frac{\mu}{p}=\frac{\overline{Cb.\mu+Sb.\mu}^{\frac{1}{p}}+\overline{Cb.\mu-Sb.\mu}^{\frac{1}{p}}}{2.r^{\frac{1}{p}-1}}.$$ In ſecundo caſu comparanda erit cum formula coſinus arcus ſubmultipli, nempe cum

$$Cc.\frac{\mu}{p}=\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-}\,Sc.\mu}^{\frac{1}{p}}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-}\,.Sc.\mu}^{\frac{1}{p}}}{2.r^{\frac{1}{p}-1}}.$$

37.

37. Fiat primi casus collatio, & oriuntur æquationes duæ

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}=\frac{Cb.\mu+Sb.\mu}{r^{1-p}}$$

$$\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}=\frac{Cb.\mu-Sb.\mu}{r^{1-p}}$$

His æquationibus simul additis, deinde ex prima detracta altera, obtinemus $\frac{b}{2}=\frac{Cb.\mu}{r^{1-p}}$, & $\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}=\frac{Sb.\mu}{r^{1-p}}$: atqui $\overline{Cb.\mu}^2-\overline{Sb.\mu}^2=rr$; ergo substitutis valoribus $\frac{bb}{4}-\frac{bb}{4}+a^p=\frac{rr}{r^{2-2p}}$, sive $a^p=r^{2p}$, demum $a^{\frac{1}{2}}=r$. Quapropter $\frac{x}{2}=Cb.\frac{\mu}{p}$ existente μ eo logarithmo, cujus cosinus $=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & sinu toto $=a^{\frac{1}{2}}$. Hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera, cujus sinus totus, seu semiaxis $AC=a^{\frac{1}{2}}$, abscinde $CM=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & excita sinum MN. (*Fig.* 1.) Ex punctis A, N in asymptotum demitte normales AK, NP. Inter CK, CP inveni tot medias proportionales, quot sunt unitates in $p-1$, quarum prima sit CG. Ex G duc GE perpendicularem asymptoto, tum sinum EB, qui determinat cosinum $CB=\frac{x}{2}$. Si p sit numerus impar, prima ex mediis proportionalibus inter CK, CP unicum tantum valorem habet realem, quare una solum erit æquationis radix realis. Si vero p sit numerus par, prima ex mediis proportionalibus duos valores reales habet æquales, unum positivum, alterum negativum, nempe CG, Cg; quare etiam $Cb.\frac{\mu}{p}$ duos valores æquales habebit, nempe CB, Cb primum positivum, secundum negativum: igitur etiam $\frac{x}{2}$.

38. Institue alterius casus comparationem, & ex æquationibus

$$\frac{b}{2}+\sqrt{-1}.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}=\frac{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{1-p}}$$

$$\frac{b}{2}-\sqrt{-1}.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}=\frac{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}{r^{1-p}},$$ invenies

$\frac{b}{2}=\frac{Cc.\mu}{r^{1-p}}$, $\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}=\frac{Sc.\mu}{r^{1-p}}$; atqui $\overline{Cc.\mu}^2+\overline{Sc.\mu}^2=rr$; ergo

$\frac{bb}{4}$

$\frac{bb}{4} + a^p - \frac{bb}{4} = \frac{rr}{r^{2-2p}}$, sive $a^p = r^{2p}$, aut $a^{\frac{1}{2}} = r$. Itaque $\frac{x}{2} = Cc.\frac{\mu}{p}$, dummodo sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, $Cc.\mu = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$. Ex his pleno alveo fluit constructio. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, capiatur $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & agatur sinus MN (*Fig. 2.*), erit AN arcus $= \mu$. Hic in tot partes dividatur, quot unitates sunt in p, quarum prima sit $AE = \frac{\mu}{p}$. Demittatur sinus EB, cosinus $CB = \frac{x}{2}$. Non unus tantum est arcus AN, cujus cosinus est CM, nempe vocata circumferentia circuli $= c$, & arcu $AN = \mu$, omnes arcus μ, $c + \mu$, $2c + \mu$, $3c + \mu$ &c., imo & alii μ, $-c + \mu$, $-2c + \mu$, $-3c + \mu$ &c., qui, ut vides, sunt numero infiniti. Hos omnes si dividas in partes p, invenies novos arcus A2E, A3E &c., quorum cosinus C2B, C3B &c. exhibent novos valores radicis $\frac{x}{2}$. Ne tamen putes, valores reales $\frac{x}{2}$ esse numero infinitos; tot enim sunt, quot unitates existunt in numero p. Nam per divisionem arcuum numero p, inveniuntur puncta numero p. Reliquæ divisiones eadem puncta præbent; quare $\frac{x}{2}$ tot valores habet, quot insunt in p unitates.

39. In secunda hypothesi, ubi a positiva est, b negativa, mutato signo speciei b, hanc formam æquatio induet

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}$$

, quæ comparanda est cum cosinu logarithmi submultipli, si $\frac{bb}{4} > a^p$; cum cosinu arcus submultipli, si $\frac{bb}{4} < a^p$. Comparatio præbet eosdem valores, ac hypothesis prima, cum hoc tantum discrimine, quod cosinus μ provenit negativus, existente sinu positivo. Quare in casu $\frac{bb}{4} > a^p$ hujusmodi oritur constructio. Descripta hyperbola æquilatera, cujus sinus totus $CA = a^{\frac{1}{2}}$, abscinde $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, quæ, quando negativa inventa est sumitur ad partes cosinuum negativorum. Huic excitetur normalis MN (*Fig. 3.*), quæ sumitur ad partes sinuum positivorum, quia sinus inventus est positivus. Ex N in assymptotum CK demittatur normalis NP. Inter CK, CP inveniantur tot mediæ proportionales, quot sunt unitates in numero $p - 1$, quarum prima sit CG. Normalis assymptoto sit GE, & normalis axi EB; cosinus CB, qui negativus est, erit $= \frac{x}{2}$. Quoniam CG

prima est ex mediis proportionalibus inter CK positivam, & CP negativam, non semper realis est, sed aliquando imaginaria. Si p sit numerus impar, inter CK, CP inveniendæ erunt mediæ proportionales numero pares; atqui inter quantitatem positivam, & negativam numero pares mediæ proportionales possibiles sunt, & reales, quarum prima semper negativa est; ergo si p sit numerus impar, CG erit realis, & negativa; ergo etiam $CB = \frac{x}{2}$ est realis, & negativa. Veruntamen si p sit numerus par, numero impares mediæ proportionales erunt inveniendæ; atqui inter quantitatem positivam, & negativam, numero impares mediæ proportionales non omnes reales sunt, sed prima, tertia, quinta &c. sunt imaginariæ: ergo quum CG prima esse debeat, erit imaginaria, adeoque etiam $CB = \frac{x}{2}$. Itaque in primo casu secundæ hypothesis, si p sit impar, adest una solum radix realis negativa; si p sit par, radices omnes sunt imaginariæ.

40. In secundo casu ejusdem hypothesis, quum scilicet $\frac{bb}{4} < a^p$, hæc habetur constructio, quæ docet, omnes prorsus radices esse reales. Descripto circulo, cujus sinus totus, seu radius $= a^{\frac{p}{2}}$, abscindatur negativus cosinus $CM = \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, (*F.* 4.) & excitetur positivus sinus MN. Vocato arcu $AN = \mu$, accipiantur arcus μ, $c + \mu$, $2c + \mu$ &c. tot, quot sunt unitates in p, & facta horum arcuum divisione in partes æquales numero p, determinentur puncta E, 2E, 3E &c. Ab his definiuntur radices æquationis CB, C2B, C3B &c. Superfluum est, plures arcus accipere, quia eadem prorsus puncta in divisione redirent.

41. In tertia hypothesi, ubi b positiva est, a negativa, plures casus necesse est distinguere. Primus casus statuet numerum p imparem. In hoc, mutato signo speciei a, æquatio hanc induet formam

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p}}^{\frac{1}{p}} + \overline{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} + a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ, quum nihil imaginarii contineat, ad hyperbolam est referenda. Nonnemo primoribus oculis formulam intuens fortasse judicabit, eam comparandam esse cum expressione logarithmi submultipli. Sed si comparationem instituat, cognoscet statim, sinum totum imaginarium oriri. Quod non indicat, constructionem esse impossibilem, sed formulam non per cosinum, sed per sinum hyperbolicum esse construendam. Hoc ex eo poteras quoque colligere, quia, si secus fieret, sinus major esset cosinu, quod in hyperbola omnino impossibile est. Itaque ut formulam referamus ad sinum, eam ita disponimus

$$\frac{x}{2} = \frac{\overline{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} + \frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} - \frac{b}{2}}^{\frac{1}{p}}}{2},$$

quæ

quæ comparanda est cum sequenti

$$Sb.\frac{\mu}{p} = \frac{\overline{Cb.\mu + Sb.\mu}^{\frac{1}{p}} - (\overline{Cb.\mu - Sb.\mu}^{\frac{1}{p}}}{2r^{\frac{1}{p}-1}}$$ .Collatio sufficiet æquationes duas

$$\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p} + \frac{b}{2} = \frac{Cb.\mu + Sb.\mu}{r^{1-p}}$$

$$\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p} - \frac{b}{2} = \frac{Cb.\mu - Sb.\mu}{r^{1-p}}$$

ex quibus propter ambiguitatem signorum provenit

$\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p} = \frac{Cb.\mu}{r^{1-p}}, \frac{b}{2} = \frac{Sb.\mu}{r^{1-p}}$; atqui $\overline{Cb.\mu}^2 - \overline{Sb.\mu}^2 = rr$; ergo

$\frac{bb}{4}+a^p-\frac{bb}{4} = a^p = \frac{r^2}{r^{2-2p}} = r^{2p}$; ergo $a^{\frac{1}{2}} = r$. Describe hyperbolam, cujus sinus totus $CA = a^{\frac{1}{2}}$. Duc AK normalem assymptoto. Accomoda sinum $MN = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & demitte in assymptotum normalem NP (*Fig.* 1.). Inter CK, CP inveni CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot sunt unitates in numero $p-1$. In casu autem p imparis, hæc semper realis est, & unica. Ex G sit GE perpendicularis assymptoto, & ex E ducatur sinus EB, qui erit $= \frac{x}{2}$, nempe radici quæsitæ.

42. Quum p est numerus par, admonuimus, mutari formulam aliquantulum, & hanc valere. $\frac{x}{2} = \frac{\overline{\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}} - (\overline{\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}}^{\frac{1}{p}}}{2}$, quam constat ad sinum esse referendam. In hac vel $\frac{bb}{4} > a^p$, & formula nihil continebit imaginarij, atque hic erit tertiæ hypothesis casus alter; vel $\frac{bb}{4} < a^p$, & imaginaria radix formulam afficiet. In secundo casu comparanda est cum formula sinus logarithmi submultipli. Comparatio autem dabit $\frac{b}{2} = \frac{Cb.\mu}{r^{1-p}}$, $\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p} = \frac{Sb.\mu}{r^{1-p}}$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Quare constructio parum differt a superiore,

 Nam

Nam in eadem hyperbola abscinde $CM = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc sinum MN, & ex N perpendicularem assymptoto NP. Inter CK, CP determina CG primam ex tot mediis proportionalibus, quot unitates continet $p-1$; tum ordina assymptoto rectam GE, & axi sinum EB, hic æquabit $\frac{x}{2}$ æquationis radicem. Quoniam $p-1$ ponitur numerus impar, duæ erunt primæ mediæ proportionales inter CK, CP æquales quidem, sed altera positiva, altera negativa, nempe CG, Cg, quare duæ etiam radices $= \frac{x}{2}$, nempe EB positiva, & eb negativa.

43. Quum $\frac{bb}{4} < a^p$, & imaginariæ radices apparent, formula elegantiæ caussa ita disponatur

$$\frac{x}{2} = \frac{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{-1} . \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{b}{2} - \sqrt{-1} . \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Ut hæc possit comparari cum expressione sinus arcus submultipli, multiplicetur per $\sqrt{-1}$

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\left(\sqrt{-1} . \frac{b}{2} + \sqrt{-1} . \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\sqrt{-1} . \frac{b}{2} - \sqrt{-1} . \sqrt{a^p - \frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Si $\sqrt{-1}$ elevetur ad potestatem p parem, potest exhibere & $+1$, & -1. Dabit $+$, si p sit ex hac serie 4, 8, 12, 16, 20 &c., hoc est pariter par. Præbebit -1, si p sit ex serie 2, 6, 10, 14, 18 &c. Idest impariter par. Ponatur p pariter par, atque hic sit tertiæ hypothesis casus tertius. In hoc casu $\sqrt{-1}$ elevata ad potestatem p, opportune multiplicata nihil mutat terminos. Fiat collatio cum expressione sinus arcus submultipli, & invenietur

$\frac{b}{2} = \frac{Cc . \mu}{r^{1-p}}$, $\sqrt{\frac{bb}{4} + a^p} = \frac{Sc . \mu}{r^{1-p}}$, & $a^{\frac{1}{2}} = r$. Constructio similis est superiori. Nam in circulo, cujus sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, sume cosinum $CM = \frac{b}{2 . a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc sinum MN (*Fig.* 2.). Arcum AN divide in partes æquales numero p, quarum una sit AE, sinus $BE = \frac{x}{2}$. Radix hæc non est unica, sed tot habentur, quot unitates sunt in numero p. Inveniuntur autem per divisionem arcuum μ, $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$ &c., ut ex superioribus manifestum est, posito arcu $AN = \mu$.

44. Tertiæ hypothesis casus quartus, & ultimus ponit, numerum p esse impariter parem; quo in casu quum $\sqrt{-1}$ elata ad potestatem p præbeat -1, for-

formula in hanc mutatur

$$\frac{x}{2}\sqrt{-1}=\frac{\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{-1}.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{-1}.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2};$$

Si hæc conferatur cum expressione sinus arcus submultipli, eædem determinationes provenient, quæ in casu superiori, cum hoc solum discrimine, quod tam $Cc.\mu$, quam $Sc.\mu$ negativus exurget. Quare hæc oritur constructio. In circulo, cujus radius $=a^{\frac{1}{2}}$ ad partes cosinuum negativorum abscinde $CM=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & duc $M2N$ (*Fig.* 4.) ad partem negativorum sinuum. Arcum $Aa2N$ divide in partes æquales p, quarum prima sit AE, cujus sinus $EB=\frac{x}{2}$. Reliquos $\frac{x}{2}$ valores invenies per divisionem arcuum $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$ &c., posito arcu $Aa2N=\mu$.

45. Quartam, & ultimam hypothesim, in qua non minus a, quam b negativa est, quia similis priori, breviter expedio. In primo casu supponendo p numerum imparem, hæc habetur formula

$$\frac{x}{2}=\frac{\left(\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p}-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\sqrt{\frac{bb}{4}+a^p}+\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{p}}}{2},$$ quæ collata cum expressione sinus logarithmi submultipli easdem determinationes præbet, ac in hypothesi superiore, cum hoc tantum discrimine, quod $Sb.\mu$ evadit negativus. Quare in eadem hyperbola ad partes sinuum negativorum applicetur $MN=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & ducta in assymptotum normali NP (*Fig.* 5.), inveniatur CG prima ex mediis proportionalibus numero $p-1$, quæ, existente p impari, unica est. Agatur assymptoto normalis GE, & sinus EB, qui æquabit quæsitam $\frac{x}{2}$.

46. In secundo casu, quum p est par, & $\frac{bb}{4}>a^p$, hæc formula valet

$$\frac{x}{2}=\frac{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}-a^p}\right)^{\frac{1}{p}}}{2},$$ quæ præbet easdem determinationes, sed tam $Cb.\mu$, quam $Sb.\mu$ evadit negativus. Quare ad plagam cosinuum negativorum accipienda est $CM=\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, agendus sinus $M2N$ (*Fig.*

(*Fig.* 3.) ad partes negativorum, & ducenda normalis assymptoto 2 N 2 P. Inter C K positivam, & C 2 P negativam, invenienda esset prima ex medijs proportionalibus $p-1$. Verum quum p est numerus par, hæc est imaginaria. Quare in hoc casu radices omnes $\frac{x}{2}$ imaginariæ sunt.

47. In tertio casu, ubi $\frac{bb}{4} < a^p$, & p est numerus pariter par, formula est hujusmodi

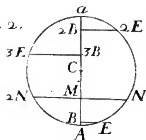
$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\,.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(-\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\,.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

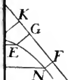
ex qua facta comparatione prodit $Cc.\mu$ negativus, & $Sc.\mu$ positivus. Quare in eodem circulo radii $= a^{\frac{1}{2}}$ sume negativum cosinum $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, & positivum sinum M N (*Fig.* 4.). Divide arcum $AN = \mu$ in partes numero p, quarum una sit A E. Hujus sinus E B æquabit radicem $\frac{x}{2}$, & similis divisio arcuum $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$, &c. reliquas radices præbebit.

48. In quarto casu, in quo iisdem suppositis p est numerus impariter par, formula hæc obtinetur

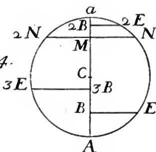
$$\frac{x}{2}\sqrt{-1} = \frac{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{-1}\,.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{b}{2}+\sqrt{-1}\,.\sqrt{a^p-\frac{bb}{4}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2}.$$

Si fiet collatio cum expressione sinus arcus submultipli, invenietur $Cc.\mu$ positivus, at $Sc.\mu$ negativus. Quare ad partes positivorum cosinuum sumpto $CM = \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, agatur sinus negativus M 2 N (*Fig.* 2.). Arcus A a 2 N $= \mu$ dividatur in partes æquales p, quarum prima sit A E. Ejus sinus E B exhibet radicem $\frac{x}{2}$. Reliquas radices (omnes enim sunt reales) invenies per divisionem arcuum $c+\mu$, $2c+\mu$, $3c+\mu$, &c. Quamquam hæc methodus resolutionis paucas æquationes complectitur, tamen nulla alia hactenus latius patet.

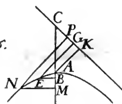

Fig. 2.
a
2B
2E
3E
3B
C
2N
M
N
B
A
E


K
G
E
F
N


N
E


a
2B
2E
2N
N
M
Fig. 4.
C
3E
3B
B
E
A


K


C
P
G
K
A
N
E
B
M

ig. 5.

CAPUT QUARTUM.

De ferierum terminis, ac fummis generalibus.

1. EX illis, quæ fæpius antea a nobis de feriebus attacta funt, quifque cognofcere poteft, feriem nihil aliud effe, quam congeriem numerorum, aut quantitatum quarumcumqua certo quodam ordine, ac proportiona fibi invicem fuccedentium. Ita numerorum congeries 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., five 1, 2, 4, 8, 16, 32 &c. dicuntur feries, quia prima componitur ex numeris naturalibus crefcentibus in continua arithmetica proportione, altera conftat numeris crefcentibus in continua proportione geometrica. Quoniam ferierum in univerfa analyfi ingens eft ufus, expedit vel maxime cognofcere, utrum feries habeat, & quam habeat fummam algebraicam, aut exponentialem. Theoriam hanc, quam femper difficilem geometræ judicarunt, penitus abfolvit Vincentius Riccatus in Commentario *De Seriebus recipientibus fummam algebraicam, aut exponentialem*. Ex hoc, quæ magis neceffaria funt & utilia, præstabit decerpere; qui plura cupit, commentarium ipfum confulat.

2. Deinceps fpecies n defignabit numerum terminorum feriei. Terminus generalis feriei eft functio ipfius n, in qua fi pro n fucceffive ponantur numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c. obtinentur finguli feriei termini. Sic feries 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37 &c. habet terminum generalem $=6n-5$, quia fi in hac formula colloces fucceffiva numeros naturales, invenies fingulos feriei terminos. Summam generalem feriei appellamus functionem ipfius n, in qua fi pro n ponatur quilibet numerus integer, tot terminorum, quot in hoc numero infunt unitates, fumma obtinetur. Ita feriei paullo ante pofitæ fumma generalis $=3n^2-2n$, quia quolibet numero integro pro n fubftituto, habebis fummam tot terminorum, quot funt in numero illo unitates. Quare feptem primorum terminorum fummam ut habeas, fac $n=7$, & invenies 133. Summa feriei in infinitum productæ eft fumma terminorum numero infinitorum, quæ fæpe obtinetur, licet non habeatur fumma generalis. Quando autem generalis cognita eft, fi ponas $n=\infty$, fummam feriei in infinitum protenfæ obtinebis. Exemplum habeas in ferie

$$\frac{1}{1.2},\ \frac{1}{2.3},\ \frac{1}{3.4},\ \frac{1}{4.5},\ \frac{1}{5.6}\ \&c\text{, cujus terminus generalis} = \frac{1}{n.\,n+1},$$

fumma autem generalis $\frac{n}{n+1}$. Ut habeas fummam feriei in infinitum productæ, fac $n=\infty$, cujus refpectu 1 eft quantitas minima; ergo fumma feriei in infinitum productæ $=\frac{n}{n}=1$.

3. In ferierum theoria illud maxime præcipuum eft, ut ex dato termino generali generalis fumma inveniatur. Sperandum minime eft, problema hoc univerfaliter folutum iri. Quapropter curandum fedulo eft, ut canones quidam, quantum fieri poteft, late patentes conftituantur, per quos ex dato termino generali plurium ferierum fumma generalis determinetur. Ad rem hanc præftan-

ſtandam ingentem utilitatem habet, quod conſequitur Theorema. In qualibet ſerie terminus generalis eſt æqualis ſummæ omnium terminorum uſque ad n incluſive, dempta ſumma omnium terminorum uſque ad $n-1$ incluſive. Res eſt per ſe evidens. Nam ſi ſummæ terminorum $n-1$ addas terminum $n^{\text{eſimum}}$ obtines ſummam terminorum n.

4. Ex hoc ſimpliciſſimo theoremate, in quo continetur principium idoneum inveniendæ ſummæ generali plurium ſerierum, data alicujus ſeriei ſumma generali facili negotio invenies ejuſdem terminum generalem. Namque ſi in formula ſummæ generalis pro n ſcribas $n-1$, obtines ſummam terminorum uſque ad terminum $\overline{n-1}^{\,\text{ſimum}}$, quam ſi demas ex ſumma omnium terminorum uſque ad terminum $n^{\text{eſimum}}$, nanciſceris terminum generalem. Si alicujus ſeriei ſumma generalis ſit $=3n^2-2n$, pro n ſcribe $n-1$, ut habeas $3.\overline{n-1}^2-2.\overline{n-1}=3n^2-8n+5$. Hanc deme ex ſuperiore, ut fiat $6n-5$; hic erit ſeriei terminus generalis. Voca ſummam omnium terminorum, uſque ad terminum $n^{\text{eſimum}}=S$, eamdem ſummam uſque ad terminum $\overline{n-1}^{\,\text{eſimum}}=s$, quæ duæ quantitates S, s ſunt eadem functio prima n, altera $n-1$. Voca terminum generalem t, erit $S-s=t$.

5. Hoc quidem adnotandum eſt ſedulo, terminum generalem t eſſe $=S-s$, ſi S ſit ſeriei vera ſumma. Verum ſi $t=S-s$, quæ duæ S, s ita ſunt affectæ, ut ſi in prima pro n ponatur $n-1$, oriatur ſecunda, non proinde ſequitur S eſſe exactam ſeriei ſummam. Fieri enim poteſt, ut S differat a vera ſumma per datam aliquam, & conſtantem quantitatem independentem ab n.

Ita tametſi $\frac{6n-3}{2}=\frac{3n^2-1}{2}-(\frac{3.\overline{n-1}^2-1}{2}$, tamen ſeries, cujus terminus generalis $=\frac{6n-3}{2}$, non habet pro ſumma $\frac{3n^2-1}{2}$, quæ minor eſt vera ſumma quantitate $\frac{1}{2}$. Ut autem cognoſcas, utrum S ſit vera ſumma nec ne, habes criterium patens, ac facile. Pone $n=1$. In hac ſuppoſitione ſi terminus generalis $t=S$, hæc exhibet veram ſummam; ſi terminus generalis major ſit S, harum differentia addenda eſt S, ut vera ſumma habeatur; contra ſi terminus generalis minor ſit S, ad exactam ſummam obtinendam ex S differentia demenda eſt. Ita in exemplo adducto terminus generalis $\frac{6n-3}{2}$, facto $n=1$, evadit $=\frac{3}{2}$; at $S=\frac{3n^2-1}{2}$ evadit $=1$; ergo terminus generalis excedit S per $\frac{1}{2}$. Hæc itaque differentia addenda eſt S, ut exacta ſumma habeatur, quæ proinde erit $\frac{3n^2-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3n^2}{2}$.

6. Quæ dicta ſunt hactenus clariſſime patefaciunt, tum ex dato termino generali inveniri poſſe ſummam generalem ſeriei, quum ejuſmodi functio n inveniri poteſt, ex qua ſi detrahatur eadem functio $n-1$, terminus generalis reſti-

restituatur. Verum solutio hujusce problematis ita ardua est, atque difficilis, ut nulla spes sit eam inveniendi, tametsi termini generalis formulæ maxime simplices proponantur. Quapropter in hac rerum difficultate illud consilii capiamus, necesse est, quod in aliis casibus permultis capi solet, ut relicto inverso problemate ad directum nos convertamus, illoque soluto plurimos, eosque late patentes canones statuamus, in quibus summam serierum ex dato termino generali cognoscamus. Nimirum nobis proponamus, oportet, plures formulas exhibentes summas generales serierum, & ex illis determinemus, quibus conditionibus affecti esse debeant termini generales. Ita cognoscemus, quam summam habeat series, cujus terminus generalis inventa conditione præditus est.

7. In hac methodo adhibenda, ea cautio negligenda non est, ut eas formulas seligamus, quæ esse possunt exactæ summæ serierum. Sed criterium paullo ante traditum est exactas summas secernendi ab illis, quæ exactæ esse non possunt. Præterea omittenda non est alia animadversio, quæ ostendit limites, quibus utilitas hujus methodi continetur. Sumpta qualibet S, si in ea scribatur $n-1$ pro n, ut fiat s, erit terminus generalis $S-s$. Donec terminus generalis hanc formam tenet, inutilis est methodus. Namque series, cujus terminus generalis est $S-s$, constat duabus seriebus, quarum prima habet pro termino generali S, altera, quæ a prima deducenda est, habet pro termino generali s. Si istæ duæ series formentur, statim apparebit, primum terminum primæ elidere secundum secundæ, secundum primæ elidere tertium secundæ, atque ita deinceps. Quare nihil remanebit, nisi ultimus primæ, a quo deducendus est primus secundæ.

8. Exemplo res videtur declaranda. Si accipiamus summam $S=\frac{n}{2+n}$, posita in hac $n-1$ pro n fiet $s=\frac{n-1}{1+n}$; ergo terminus generalis $S-s=\frac{n}{2+n}-(\frac{n-1}{1+n}$. Non mutata forma hujus termini generalis, formentur series, nempe A orta ex termino generali $\frac{n}{2+n}$, & B orta ex termino generali $\frac{n-1}{1+n}$, nimirum

$$(A)\quad \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{7}\ldots\frac{n-1}{1+n},\ \frac{n}{2+n}$$

$$(B)\ -\frac{0}{2},-\frac{1}{3},-\frac{2}{4},-\frac{3}{5},-\frac{4}{6}\ldots\ldots-(\frac{n-1}{2+n}.$$

Quis non videt, harum serierum terminos omnes sese elidere ex contrarietate signorum, præter ultimum A, & primum B. Summa itaque erit $\frac{n}{2+n}-\frac{0}{2}$, sive simplicius $\frac{n}{2+n}$. Quare donec terminus generalis superiorem formam retineat, nihil methodus habet utilitatis.

9. Quamobrem ad utilitatem methodi necesse est, ut terminus generalis $S-s$ per artificia analyseos in aliam omnino formam transmutetur, qua posita series ex termino generali orta non habeat terminos, ut antea, sese elidentes. Quum hoc præstare licet, licet autem sæpissime, utilis erit methodus; secus autem erit negligenda. Si duæ fractiones exempli superioris ad eamdem denominationem reducantur, invenies $S-s=\frac{2}{1+n\,.\,2+n}$. Forma hæc nullo

 labo-

laborat incommodo. Ex hoc autem termino generali series exoritur
$\frac{2}{2 \cdot 3}$, $\frac{2}{3 \cdot 4}$, $\frac{2}{4 \cdot 5}$, $\frac{2}{5 \cdot 6}$, $\frac{2}{6 \cdot 7}$ &c., cujus summa erit $= \frac{n}{2+n}$. Quare summa seriei in infinitum productæ $= \frac{n}{n} = 1$. Tametsi cautiones adhibendæ utilitatem principii, ac methodi coarctare videantur; tamen infinitum esse serierum numerum, quarum summa generalis hac ratione determinatur, quæ traditi sumus, clarissime patefacient.

10. Exordiamur a seriebus, quarum summa generalis exprimitur per functionem numeri terminorum $= n$, in cujus divisore eadem n locum non habet. Quoniam criterium illud, quot $N. 5$ exposui, aperte me docuit, formulas, quæ continent terminum constantem, & independentem ab n, non posse exhibere veras summas serierum, iccirco has omittens illas dumtaxat considerabo, quarum termini omnes continent n, hoc est numerum terminorum. In hac autem investigatione gradatim procedens, inquiram primum, quænam sit series, cujus summam generalem exhibet formula An, existente A qualibet quantitate. Quando $S = An$, scripta $n - 1$ pro n, erit $s = An - A$; igitur $S - s = t = A$. Ex invento termino generali A, in quem non ingreditur n, quisque videt, oriri seriem terminorum æqualium A, A, A, A &c., quorum summam $= An$, nemo unus per sese non cognoscit.

11. Contemplor deinde series, quarum summa generalis sit $S = An + Bn^2$. Pro n colloco $n - 1$, & fit

$$s = \frac{An - A}{Bn^2 - 2Bn + B} \text{: ergo } S - s = \frac{A}{-B + 2Bn}.$$ Ex hoc termino generali efformetur series
A, A, A, A; A, A &c.
B, $3B$, $5B$, $7B$, $9B$, $11B$ &c., quam divisi in duas, quarum prima est series terminorum æqualium, altera est series terminorum crescentium secundum progressionem numerorum imparium. Tota autem series est terminorum crescentium in progressione arithmetica, in qua singuli termini a subsequentibus deducti exhibent eamdem differentiam $= 2B$. Terminus autem generalis seriei $= \frac{A}{-B + 2Bn}$; summa autem $= An + Bn^2$. Quod hæc vera sit summa, constat, quia, posita $n = 1$, in utraque formula termini generalis, & summæ eadem oritur quantitas. Quapropter si terminus generalis seriei contineat solam n ad linearem potestatem elevatam, nihil est facilius, quam ejusdem summam exhibere. Nam terminum, quem non multiplicat species n, fac $= A - B$; coefficientes autem n pone $= 2B$, & per duas æquationes determinabis valores A, B, quos si introducas in formulam summæ, summam obtinebis. Sit caussa exempli terminus generalis $15 + 3n$. Fac $A - B = 15$, $2B = 3$; ergo
$A - \frac{3}{2} = 15$, sive $A = \frac{33}{2}$, & $B = \frac{3}{2}$; ergo seriei summa erit $= \frac{33n + 3nn}{2}$.

12. Verum si series dentur, cujus differentiæ primæ constantes sint, ex nostra methodo determinari poterit cum ejus terminus generalis, tum ejus summa. Namque duo primi termini seriei datæ æquentur cum duobus primis terminis seriei canonicæ, vel termino generali $\frac{A}{-B + 2Bn}$ æqualis fiat primus datæ seriei

riei terminus, facta $n=1$; deinde terminus alter, facta $n=2$. Per duas æquationes determinentur valores A, B, quibus habitis non minus summa, quam terminus generalis datæ feriei obtinetur. Ad exemplum propono feriem 3, 7, 11, 15, 19 &c., cujus differentiæ primæ $=4$.

Pono $3 = \begin{matrix} A \\ -B+2B \end{matrix}$ | Prima æquatio dematur ex fecunda, & fit
$7 = \begin{matrix} A \\ -B+4B \end{matrix}$ |

$4=2B$, & $B=2$; ergo $A=1$. Si valores iftos collocemus in formulis canonicis inveniemus feriei terminum generalem $=-1+4n$, fummam vero $=n+2n^2$.

13. Tranfeo ad feries, quarum indefinita, & generalis fumma fit

$$S = An + Bn^2 + Cn^3$$

in qua formula pofito $n-1$ pro n invenio

$$\begin{aligned} s = & -A + An \\ & +B - 2Bn + Bn^2 \\ & -C + 3Cn - 3Cn^2 + Cn^3. \end{aligned}$$

Si s auferatur ab S, exurget terminus generalis.

$$S - s = t = \begin{matrix} A \\ -B + 2Bn \\ +C - 3Cn + 3Cn^2 \end{matrix}$$

Ex hoc termino generali formetur feries, nempe

A, A, A, A, A &c.
B, $3B$, $5B$, $7B$, $9B$ &c.
C, $7C$, $19C$, $37C$, $61C$ &c.

quam divifi velut in tres. Prima eft terminorum æqualium; fecunda terminorum progredientium in ratione arithmetica fecundum numeros impares; demum tertia eft ejufmodi, cujus fecundæ differentiæ conftantes funt $=6C$, quæ proprietas & feriei univerfæ conveniat necelle eft. Ex præmiffa analyfi apertum eft, qua ratione dato feriei termino generali fumma inveniatur. Comparentur enim finguli termini formulæ datæ cum fingulis formulæ canonicæ, & tres æquationes formentur, ex quarum ultima definitur C, ex fecunda B, ex prima A. Seriei terminus generalis datus fit $=1-n+n^2$, qui collatus cum canonico fuppeditat tres æquationes $1=A-B+C$, $-1=2B-3C$, $1=3C$; ex ultima habes $C=\frac{1}{3}$, qui fubftitutus in reliquis dat duas $1=A-B+\frac{1}{3}$, $-1=2B-1$. Ex harum fecunda $B=0$; quare prima fiet $1=A+\frac{1}{3}$, five $A=\frac{2}{3}$. Valores ifti fubftituantur in formula fummæ, quæ fiet $=\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}n^3$.

14. Præterea ex eadem analyfi difcimus rationem determinandi tum terminum generalem, tum fummam feriei, cujus fecundæ differentiæ conftantes funt. Nam per collationem trium terminorum determinabuntur A, B, C, quibus cognitis terminus generalis, & fumma item cognofcitur. Exemplo unico aperiam methodum. Sit feries 9, 13, 21, 33, 49, 69 &c., cujus differentiæ fecundæ $=4$. Si conferantur hujus feriei tres primi termini cum tribus terminis feriei noftræ canonicæ, vel cum termino generali pofitis in ipfo pro n fucceffive 1, 2, 3, orientur tres æquationes, quas primi ordinis dicam. Dematur prima

ma ex secunda, secunda ex tertia, & orientur duæ, quas, dicam secundi ordinis. Ex his prima auferatur a secunda, & unica provenit æquatio tertii ordinis, per quam determinatur C, cujus valor si introducatur in aliquam secundi ordinis, invenietur B. Ex una autem primi ordinis, introductis valoribus C, B, determinatur A, quibus habitis habetur seriei terminus generalis, & summa. En tibi calculum. Comparatio præbet hujusmodi æquationes

Primi ordinis	Ordinis secundi	Ordinis terti	Quare
$9 = A + B + C$	$4 = 2B + 6C$		
$13 = A + 3B + 7C$	$8 = 2B + 12C$	$4 = 6C$	$C = \frac{2}{3}$,
$21 = A + 5B + 19C$			

qui valor positus in prima ordinis secundi dat $B = 0$. Uterque valor introductus in primam ordinis primi præbet $A = 8 + \frac{1}{3}$. Itaque seriei terminus generalis $= 9 - 2n + 2n^2$; summa vero $= \overline{8 + \frac{1}{3}}.\, n + \frac{2}{3} n^3$.

15. Simili modo si inquiratur series, cujus sit summa $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$, invenietur terminus generalis

$$\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bn \\ +C - 3Cn + 3Cn^2 \\ -D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3 \end{array}$$

ex quo gignitur series habens tertias differentias constantes. Eamdem methodum sequens inveniam seriem, cujus summa sit $An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$, habere terminum generalem.

$$\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bn \\ +C - 3Cn + 3Cn^2 \\ -D + 4Dn - 6Dn^2 + 4Dn^3 \\ +E - 5En + 10En^2 - 10En^3 + 5En^4 \end{array}$$

Series autem, quæ ex hoc nascitur, habebit quartas differentias constantes.

16. Ex hoc progressu illud colligas velim, quod ad faciliorem praxim maxime conducit, nimirum seriem, cujus differentiæ $m^{esimæ}$ constantes sunt, habere pro termino generali formulam, in qua n ascendit ad potestatem m; & seriem habentem terminum generalem, in quo n prædita est exponente m, habere pro summa formulam, quæ continet terminum n^{m+1}, & caret termino, a quo n abest. Hæc animadversio facillimam praxim tibi suppeditat. Data sit series, cujus differentiæ aliquæ constantes sint. Ad inveniendum terminum generalem assume formulam $A + Bn + Cn^2$ &c., cujus ultimus terminus habeat exponens æquale gradui costantium differentiarum. Tum facta successive $n = 1, 2, 3$ &c. æqua terminum generalem cum primis seriei terminis, ut efformentur tot æquationes, quot sunt assumptæ indeterminatæ A, B, C &c. Has determina, & quæsitum terminum generalem invenies. Si vero datus sit terminus generalis, ad inveniendam summam assume $An + Bn^2 + Cn^3$ &c., in qua exponens maximum n unitate superet exponens maximum termini generalis. In formula assumpta scribe $n - 1$ pro n, & formulam quæ nascitur ex assumpta detrahe. Formulæ residuæ termini singuli æquentur datæ singulis terminis, & tot æquationes orientur, quot sunt indeterminatæ A, B, C &c. Has determina, & quæsitæ summæ potieris.

17. Exem-

17. Exemplo praxim declarabo. Data sit series 2, 9, 24, 50, 90, 147, 224, 324 &c., cujus differentiæ tertiæ constantes sunt. Assumo formulam tertii gradus $A+Bn+Cn^2+Dn^3$. Facta n successive $=1, 2, 3, 4$, institue æquationem cum primis quatuor seriei terminis, & habebis æquationes, quas primi ordinis voco; tum facta deductione superiorum ab inferioribus nascuntur æquationes secundi, tertii ordinis &c. En calculum.

Primi ordinis	Secundi ordinis
$A+B+C+D=2$	$B+3C+7D=7$
$A+2B+4C+8D=9$	$B+5C+19D=15$
$A+3B+9C+27D=24$	$B+7C+37D=26$
$A+4B+16C+64D=50$	

Ordinis tertii	Ordinis quarti
$2C+12D=8$	$6D=3$. Ex quibus facile colliges
$2C+18D=11$	

$A=0$, $B=\frac{1}{2}$, $C=1$, $D=\frac{1}{2}$; ergo terminus generalis seriei est

$\frac{1}{2}n+n^2+\frac{1}{2}n^3$.

18. Nunc datus sit seriei terminus generalis $\frac{1}{2}n+n^2+\frac{1}{2}n^3$. Assume tamquam summam $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$. In hac pro n scribe $n-1$, ut habeas

$$\begin{array}{l} -A+An \\ +B-2Bn+Bn^2 \\ -C+3Cn-3Cn^2+Cn^3 \\ +D-4Dn+6Dn^2-4Dn^3+Dn^4 \end{array}$$

Hanc deme ex assumpta, ut habeas terminum generalem

$$\begin{array}{l} A \\ -B+2Bn \\ +C-3Cn+3Cn^2 \\ -D+4Dn-6Dn^2+4Dn^3 \end{array}$$

conferendum cum dato. Collatio autem exhibebit æquationes quatuor

$A-B+C-D=0$, $2B-3C+4D=\frac{1}{2}$, $3C-6D=1$, $4D=\frac{1}{2}$, ex quibus invenies $D=\frac{1}{8}$, $C=\frac{7}{12}$, $B=\frac{7}{8}$, $A=\frac{5}{12}$. Quare seriei summa $=\frac{5n}{12}+\frac{7n^2}{8}+\frac{7n^3}{12}+\frac{n^4}{8}$. Omnium itaque serierum habentium differentias aliquas constantes, quæ algebraicæ vocari solent, tum terminus generalis, tum ex termino generali summa determinatur.

19. Progredior ad series, quarum generalis summa exprimitur per fractionem formatam ex speciei n functionibus rationalibus. Ordior ab illis seriebus, quæ in infinitum productæ summam obtinent finitam. Quamobrem necesse est, ut in formula generalis summæ maximum exponens speciei n idem sit tum in numeratore, tum in denominatore fractionis. Hac conditione servata gradatim procedam, ac primum inquiram, quænam sit series, cujus generalis summa $=\frac{Ln}{A+Bn}$. In hac pro n scribe $n-1$, ut habeatur terminus generalis

Ln

$\frac{Ln}{A+Bn} - \frac{L.\overline{n-1}}{A+B.\overline{n-1}}$, sive redactis terminis ad eamdem denominationem $\frac{AL}{A+B.\overline{n-1}.\overline{A+Bn}}$. Si ex hoc termino generali formetur series, ejus summa $= \frac{Ln}{A+Bn}$; quare summa seriei in infinitum productæ fiet $= \frac{Ln}{Bn} = \frac{L}{B}$.

20. In numeratore termini generalis habetur quantitas constans independens ab n. In denominatore habentur factores duo primi gradus, qui non differunt nisi per hoc, quod in uno B multiplicatur per $n-1$, in altero per n. Itaque si uterque factor consideretur tamquam terminus generalis, uterque exhibebit seriem eamdem, cujus differentia $=B$, sed secunda incipit a secundo termino primæ; Nam series, cujus terminus generalis $= A+B.\overline{n-1}$, est A, $A+B$, $A+2B$, $A+3B$ &c.; series autem termini generalis $A+Bn$ est $A+B$, $A+2B$, $A+3B$, $A+4B$ &c., quæ incipit a prioris termino altero. Quapropter ex termino generali invento hæc oritur series

$\frac{AL}{A.\overline{A+B}}$, $\frac{AL}{A+B.\overline{A+2B}}$, $\frac{AL}{A+2B.\overline{A+3B}}$ &c., cujus summa $= \frac{Ln}{A+Bn}$, & posito n infinito $= \frac{L}{B}$.

21. Ad exemplum proponatur series

$\frac{6}{2.7}$, $\frac{6}{7.12}$, $\frac{6}{12.17}$, $\frac{6}{17.22}$, $\frac{6}{22.27}$ &c. Si consideres duas series, quæ constituunt divisores, nempe 2, 7, 12, 17, 22 &c.
7, 12, 17, 22, 27 &c. videbis utramque esse seriem primi ordinis, quia utriusque differentia $=5$, & alteram incipere a secundo termino primæ. Igitur series proposita pertinet ad nostrum canonem, & habet summam generalem algebraicam. Ejus terminus generalis invenitur esse

$= \frac{6}{\overline{-3+5n}.\overline{2+5n}} = \frac{6}{2+5.\overline{n-1}.\overline{2+5n}}$. Ex comparatione autem constat $B=5$, $A=2$. Ut definiatur L, adverte $AL=6$, ergo $L=3$. Quare seriei summa generalis $= \frac{3n}{2+5n}$, & posito n infinito $= \frac{3}{5}$.

22. Transeo ad series, quarum summa sit $\frac{Ln+Mn^2}{A+B.\overline{n-1}.\overline{A+Bn}}$. In hac si pro n scribatur $n-1$, prodit $\frac{L.\overline{n-1}+M.\overline{n-1}^2}{A+B.\overline{n-2}.\overline{A+B.\overline{n-1}}}$. Duæ fractiones continent ambæ divisorem $A+B.\overline{n-1}$. Quare ut redigantur ad eamdem denominationem, satis est, multiplicare numeratorem primæ per $A+B.\overline{n-2}$, & numeratorem secundæ per $A+Bn$. His operationibus effectis, detractaque secunda fractione a prima, resultabit terminus generalis.

AL

$$\frac{\begin{matrix} AL - BLn \\ -AM - BMn \\ +2AMn \end{matrix}}{A+B\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{A+B\cdot n-1}\cdot\overline{A+Bn}}$$

. In hac formula numerator est terminus generalis seriei primi ordinis, dummodo coefficiens speciei n non evanescat; hoc enim evanescente series est quantitatum æqualium. Singuli divisoris factores præbent seriem primi ordinis, imo eamdem sed ita, ut secunda incipiat a secundo termino primæ, tertia a tertio. Itaque perspicuum est, quænam conditiones requiruntur, ut series fractionum recipiant summam præsentis formæ.

23. Accipe exemplum in serie

$$\frac{4}{2\cdot3\cdot4},\ \frac{7}{3\cdot4\cdot5},\ \frac{10}{4\cdot5\cdot6},\ \frac{13}{5\cdot6\cdot7},\ \frac{16}{6\cdot7\cdot8}$$

&c. Series numeratorum habet terminum generalem $1+3n$. Primi factores in divisore constituunt seriem eamdem, quam reliqui; sed secundus, & tertius terminus primæ est primus secundæ, & tertiæ. Tertiæ autem terminus generalis $= 3+n$. Facta collatione cum formula canonica invenies $A=3$, $B=1$. Præterea $3L-3M=1$, $-L-M+6M=3$, ex quibus nascitur $M=\frac{5}{2\cdot3}$, $L=\frac{7}{2\cdot3}$. Propositæ igitur seriei summa evadit $= \frac{7n+5n^2}{2\cdot3\cdot\overline{2+n}\cdot\overline{3+n}}$, & acceptis terminis numero infinitis $= \frac{5}{6}$.

24. Si in termino generali numerator esset divisibilis per unum ex factoribus extremis, peracta divisione pertineret ad canonem superiorem. Si in denominatore deficiat factor medius, oportet multiplicare tam numeratorem, quam denominatorem termini generalis per factorem, qui deest, ut formula pertineat ad canonem præsentem.

25. Progredior ad series, quarum summa sit

$$\frac{Ln+Mn^2+Nn^3}{A+B\cdot\overline{n-2}\cdot\overline{A+B\cdot n-1}\cdot\overline{A+Bn}}$$

. Ut inveniatur terminus generalis pro n scribe in hac $n-1$, ut fiat

$$\frac{\begin{matrix} -L+Ln \\ +M-2Mn+Mn^2 \\ -N+3Nn-3Nn^2+Nn^3 \end{matrix}}{A+B\cdot\overline{n-3}\cdot\overline{A+B\cdot n-2}\cdot\overline{A+B\cdot n-1}}$$

. Ut hæ duæ formulæ redigantur ad eamdem denominationem, satis est multiplicare primam per $A+B\cdot\overline{n-3} = A-3B+Bn$, & secundum per $A+Bn$. Facta hujusmodi multiplicatione, & deductione alterius a prima, oritur terminus generalis.

$$\frac{\begin{array}{llll} AL & -2.BLn & +3ANn^2 \\ -AM & +2AMn & -3BNn^2 \\ +AN & -BMn & -BMn^2 \\ & -3ANn & \\ & +BNn & \end{array}}{\overline{A+B.\overline{n-3}}\,.\,\overline{A+B.\overline{n-2}}\,.\,\overline{A+B.\overline{n-1}}\,.\,\overline{A+Bn}}$$

. Series, quæ nascitur ex numeratore hujus termini generalis est series secundi ordinis, vel primi, si n^2 habeat coefficiens $=o$, vel quantitatum æqualium, si etiam n multiplicetur per coefficiens $=o$. Quatuor factores componunt divisorem, quorum singuli sunt termini generales ejusdem seriei primi ordinis; sed secunda ex his seriebus incipit a secundo termino primæ, tertia a tertio, quarta a quarto.

26. Exemplum præbeat series

$\frac{1}{4.7.10.13}$, $\frac{7}{7.10.13.16}$, $\frac{17}{10.13.10.19}$, $\frac{31}{13.16.19.22}$, &c. Facile invenies $A=10$, $B=3$. Terminus generalis numeratoris $=-1+2n^2$. Quare ut determines L, M, N, institue æquationes $10L-10M+10N=-1$, $-6L+17M-27N=o$, $-3M+21N=2$, ex quibus elicies $L=\frac{-19}{3.4.5.7}$, $M=\frac{7}{5.8}$, $N=\frac{101}{3.5.7.8}$. Quare seriei summa generalis erit

$$\frac{\frac{-19}{3.4.5.7}n+\frac{7}{5.8}n^2+\frac{101}{3.5.7.8}n^3}{\overline{4+3n}\,.\,\overline{7+3n}\,.\,\overline{10+3n}}$$, positaque n infinita $=\frac{101}{3^4.5.7.8}=\frac{101}{22680}$;

27. Si in termino generali numerator esset divisibilis per unum ex factoribus extremis, casus pertineret ad canonem superiorem; summæ enim divisor a duobus tantum factoribus componeretur. Si uterque factor medius desit, divisor præbebit duas series, quarum altera incipit a quarto termino alterius. Si primus tantum ex factoribus mediis desideretur, tres prodibunt series, quarum secunda incipit a tertio, tertia a quarto termino primæ. Demum si desit secundus ex factoribus mediis, secunda series incipit a secundo, tertia a quarto termino primæ. Quum hæc contingunt, sufficiet, multiplicare numeratorem, & denominatorem termini generalis per illos factores, qui desiderantur, efficiendo ut in divisore quatuor sint factores, qui constituant quatuor series ita, ut secunda a secundo, tertia a tertio, quarta a quarto termino primæ sumat initium. Ad canonem præsentem hoc modo formula reducetur.

28. Progressus, quem adhuc sequuti sumus, aperte docet, quænam conditiones sint, oportet, in termino generali, ut series summam recipiat algebraicam, & in infinitum producta summam habeat finitam. Nimirum denominator debet constare pluribus factoribus, quorum singuli præbeant series arithmeticas, quarum secunda incipiat a secundo termino primæ, tertia a secundo termino secundæ, atque ita deinceps; deinde in numeratore potestas maxima speciei n non debet excedere numerum factorum dempto 2. Si in denominatore aliqui ex factoribus mediis desint, per hos multiplicetur & numerator, & denominator, ut requisitæ conditiones impleantur. Quoties habes terminum generalem hujus formæ,

ad

ad inveniendum summam hanc sequere praxim. Confinge formulam, cujus numerator careat termino, qui non contineat n, & exponens maximum n sit æqualis numero factorum termini generalis dempto 1; omnium autem terminorum coefficientes L, M, N, &c. sint indeterminati; hujus autem formulæ denominator sit idem ac in termino generali dempto primo factore. Summa enim hanc formam habeat, necesse est. In hac formula pro n scribe $n-1$, tum reductis duabus formulis ad eamdem denominationem secundam a prima detrahe. Quæ resultat erit comparanda cum dato termino generali, & per comparationem determinandi coefficientes L, M, N &c., quorum valores si in supposita formula ponas, habes summam quæsitam. Quæ dicta sunt, satis superque praxim ostendunt.

29. Supposuimus in formula summæ exponentem maximum speciei n in numeratore æqualem esse numero factorum denominatoris, sive exponenti maximo ejusdem n. Quod si accidat, ut maximus exponens n minor sit in numeratore, quam in denominatore, sufficiet ponere coefficientes maximarum dimensionum $=0$, tum eosdem delere in formula termini generalis, ut hic habeatur. In hujus autem numeratore etiam pro hoc casu exponens maximum speciei n ad minimum duabus unitatibus minor est numero factorum, seu exponente denominatoris. Quare praxis numeri superioris hunc quoque casum felicissime absolvit.

30. Si exponens n in numeratore summæ superet numerum factorum denominatoris, tum multiplicatis inter se factoribus, manifestum est, fieri posse divisionem. Hæc peragatur, donec deveniamus ad ejusmodi exponens n, qui sit æqualis numero factorum. Quod ubi obtinuerimus, ab ulteriori divisione abstineamus. Hac operatione instituta, formula dividetur in duas; alteram integram, alteram fractam. Primum inveniatur terminus generalis seriei, cujus integra sit summa, in quo termino generali exponens n erit minor unitate, quam in formula summæ, ut constat ex hoc eodem capite. Deinde inveniatur terminus generalis seriei, cujus fracta formula sit summa. In denominatore augebitur unitate numerus factorum, & in numeratore exponens n fiet hoc numero ita aucto saltem binario minor.

31. Quapropter si datus sit terminus generalis seriei, in cujus numeratore exponens speciei n vel sit æqualis, vel major numero factorum, multiplicatis inter se factoribus fiat divisio, donec exponens numeratoris minor sit exponente denominatoris. In duas formulas, primam integram, alteram fractam distribuitur terminus generalis. Series effecta ex parte integra, semper erit summabilis algebraice. Quæ formatur ex fractione summam algebraicam accipiet, si index speciei n in numeratore sit ad minimum binario minor numero factorum, non item si sit unitate minor.

32. Proponamus exemplum. Sit terminus generalis $\frac{2+\overline{c-5}.n^2+5n^3+5n^4+n^5}{\overline{1+n}.\overline{2+n}.\overline{3+n}}$, in quo tres solum sunt factores divisoris, & maximus exponens n in numeratore $=5$. Factores multiplicentur, ut habeatur $6+11n+6n^2+n^3$. Fiat divisio, donec exponens numeratoris sit minor exponente denominatoris, & invenietur $-n+n^2+\frac{2+6n+cn^2}{\overline{1+n}.\overline{2+n}.\overline{3+n}}$. Quantum pertinet ad seriem, cujus terminus generalis $=-n+n^2$, ea algebraicam habet

 sum-

summam. Quantum ad alteram, cujus terminus generalis $= \frac{2+6n+cn^2}{\overline{1+n}\,.\,\overline{2+n}\,.\,\overline{3+n}}$, ea summam algebraicam accipiet, si $c=o$. Si autem non sit $c=o$, quo pacto in summam colligatur, non constat. Eamdem methodum applicare possumus seriebus, quarum summa generalis in denominatore habet factores secundi, tertii, & altioris gradus. Sed quæ tradita sunt, ad rem nostram videntur sufficere. Qui plura cupit cognoscere, ad Riccati commentarium se conferat. Nunc ad series accedo, quarum summa est formula exponentialis multiplicata per integram algebraicam.

33. Formulam exponentialem illam dicimus, in qua n locum tenet exponentis. Prima, quæ sese offert, est quantitas constans elevata ad potestatem n. Propono itaque inquirendum terminum generalem seriei, cujus summa sit $=AK^n - A$. Detraho quantitatem A, quia secus summa vera esse non posset. Posito $n-1$ pro n, efformetur similis formula, quæ est summa terminorum numero $n-1$, quæ si a superiore detrahatur oritur terminus generalis, nempe $A.K^n - A.K^{n-1} = \frac{A.\overline{K-1}}{K}.K^n$. Si fiat $n=1$, tam terminus generalis, quam summa evadit $=AK-A$; quod patefacit, necessarium fuisse ad obtinendam veram summam demere a termino exponentiali $A.K^n$ quantitatem A. Quisque videt, terminum generalem inventum suppeditare quam libet seriem geometricam, cujus propterea summa semper inveniri poterit. Si K sit major unitate series semper crescit, & termini continuo augentur ita, ut facta n infinita, K^n pariter infinita evadat. Si $K=1$, omnes termini seriei, ejusque summa fit $=o$. Demum si K unitate sit minor, series continuo decrescit ita, ut facta n infinita K^n evadat infinitesima. Verum in hoc casu formulæ tam termini generalis, quam summæ fierent negativæ. Ut positivæ fiant ita disponantur, summa $= A - A.K^n$ terminus generalis $= \frac{A.\overline{1-K}}{K}.K^n$. Quum autem posita $K<1$, in hypothesi n infinitæ K^n evadat infinitesima; summa seriei in infinitum productæ erit $=A$.

34. Quum proponitur terminus generalis, distingnenda est species, quæ afficitur ab exponente n, ab illa, quæ hujusmodi exponentem non habet. Prima fiat $=K^n$, altera $= \frac{A.\overline{K-1}}{K}$, vel $= \frac{A.\overline{1-K}}{K}$, prout K est major vel minor unitate; tum determinentur K, A, quibus cognitis habetur summa. Sit exempli caussa terminus generalis $\frac{1}{3}.2^n$. Fiat $K^n = 2^n$, sive $K=2$, qui valor quum unitatem superet, assumpta prima formula ponatur $\frac{A.\overline{K-1}}{K} = \frac{1}{2}A = \frac{1}{3}$; ergo $A = \frac{2}{3}$. Itaque summa erit $= \frac{2}{3}.2^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.\overline{2^n - 1}$.

35. Quod si in termino generali proposito fuerint duæ, pluresve quantitates simul multiplicatæ, aut divisæ diversis exponentibus affectæ, in quos tamen sola

po-

potestas linearis n ingreditur, opportunis analyseos presidiis ad eumdem exponentem n erunt reducendæ; quo effecto omnes, tamquam quantitas una elevata ad potestatem n, erunt considerandæ. Ut exemplo rem declarem, sit terminus generalis $\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$. Hic ita disponendus $2 \cdot 3 \cdot \frac{2^n}{3^n} = 2 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Provenit $K = \frac{2}{3}$, qui quum sit minor unitate, docet secundam formulam esse accipiendam; ergo $\frac{A \cdot \overline{1-K}}{K} = \frac{1}{2} A = 2 \cdot 3$; Ergo $A = 2^2 \cdot 3$; ergo summa $= 2^2 \cdot 3 - \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 2^n}{3^n}$ $= 2^2 \cdot 3 - \frac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$. Facta n infinita quantitas $\frac{2^{n+2}}{3^{n-1}}$, evadit infinitesima, & seriei summa $= 2^2 \cdot 3 = 12$.

36. Neque diversa est methodus, ubi exponens n multiplicetur per quantitatem constantem. Sit in exemplum terminus generalis $\frac{3^{3n+1}}{2^{2n-2}}$. Hic erit disponendus in hunc modum $3 \cdot 2^2 \cdot \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = 3 \cdot 2^2 \left(\frac{3^3}{2^2}\right)^n$. Quare $K = \frac{3^3}{2^2}$, & $\frac{A \cdot \overline{K-1}}{K} = A \cdot \frac{3^3 - 2^2}{3^3} = 3 \cdot 2^2$, sive $A = \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^3 - 2^2}$. Igitur seriei summa erit $= \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^3 - 2^2} \cdot \frac{3^{3n}}{2^{2n}} - \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^3 - 2^2} = \frac{3^{3n+4}}{3^3 - 2^2 \cdot 2^{2n-2}} - \frac{3^4 \cdot 2^2}{3^3 - 2^2}$. Hæc, quæ admodum facilia sunt, majoris explicationis non egent.

37. Quod si data sit series geometrica, inspice primum, utrum sit crescens, vel decrescens; si crescens sit, adhibenda est prima formula, si decrescens altera. Terminum generalem, facta $n = 1$, æqua primo seriei termino, tum facta $n = 2$, æqua secundo; alteram æquationem per primam divide, & invenies valorem K, qui positus in æquatione prima præbebit valorem A. Per duos hosce valores prodit non minus summa, quam terminus generalis. Ad exemplum sit series $3, 5, 8\frac{1}{3}, 13\frac{8}{9}$ &c. Quoniam hæc est series crescens, adhibeatur formula prima termini generalis $\frac{A \cdot \overline{K-1}}{K} \cdot K^n$. Posito successive $n = 1, 2$ instítue cum primis duobus terminis æquationem

$$A \cdot \overline{K-1} = 3$$
$$A \cdot \overline{K-1} \cdot K = 5$$

. Divide secundam per primam, & provenit $K = \frac{5}{3}$; qui positus in prima dat $A \cdot \frac{2}{3} = 3$, seu $A = \frac{3^2}{2}$. Itaque terminus generalis in-

 venio-

Venietur $=\frac{3^2}{2}\cdot\frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{5}{3}}\cdot\frac{5^n}{3^n}=\frac{5^{n-1}}{3^{n-2}}$. Summa vero $=\frac{3^2}{2}\cdot\overline{\frac{5^n}{3^n}-1}$

$=\frac{5^n-3^n}{2\cdot 3^{n-2}}$.

38. Progredior ad ſeries, quarum ſumma ſit $\overline{A+Bn}\,.\,K^n-A$. Si in hac pro n ſcribatur $n-1$, novaque, quæ oritur formula, a priori deducatur, proveniet terminus generalis $\frac{A\,.\,\overline{K-1}+B+Bn\,.\,\overline{K-1}\,.\,K^n}{K}$. Signa omnia mutanda ſunt tam in ſumma, quam in termino generali, ſi K minor ſit unitate, ad evitandas quantitates negativas. Similiter ſeries, cujus ſumma

$=\overline{A+Bn+Cn^2}\,.\,K^n-A$, habebit terminum generalem

$$\frac{\begin{matrix}AK+BKn+CKn^2\\ \left(\begin{matrix}-A & & \\ +B & -Bn & \\ -C & +2Cn & -Cn^2\end{matrix}\right.\end{matrix}}{K}\,.\,K^n$$

Formulæ iſtæ valent, ſi K ſuperet unitatem. Si K minor ſit unitate, in utraque ſigna mutentur. Ex hoc progreſſu liquido conſtat ſeriem, cujus ſumma exprimatur per formulam algebraicam ductam in exponentialem, a qua demitur terminus conſtans, habere pro termino generali formulam algebraicam ejuſdem gradus ductam in exponentialem eamdem.

39. Quare ad inveniendam ſummam ſeriei, cujus terminus generalis ſit formula algebraica ducta in exponentialem, efforma tibi formulam coefficientium indeterminatorum $A+Bn+Cn^2$ &c. ejuſdem gradus, quam multiplica per quantitatem exponentialem, tum deme A. Hanc ſuppone ſummam. Pone in ea $n-1$ pro n, novamque formulam deme a priori. Hujus comparatio cum dato termino generali determinabit coefficientes, & quæſitam ſummam ſufficiet. Afficienda ſunt omnia ſignis contrariis, ſi exponentialis ſit unitate minor. Praxis uno, aut altero exemplo illuſtranda eſt.

40. Sit terminus generalis $\overline{1+n+n^2}\,.\,2^n$. Pono ſummam eſſe $\overline{A+Bn+Cn^2}\,.\,2^n-A$. Si in hac $n-1$ pro n ſcribatur, deinde formula orta a ſuperiore ſubducatur, fiet

$$\frac{\begin{matrix}A+\;Bn+Cn^2\\ \left(\begin{matrix}-A & & \\ +B & -Bn & \\ -C & +2Cn & -Cn^2\end{matrix}\right.\end{matrix}}{2}\,.\,2^n$$

Facta comparatione habeo $A\frac{-A+B-C}{2}=1$, $B\frac{-B+2C}{2}=1$, $C-\frac{C}{2}=1$. Ex quibus prodeunt valores $C=2$, $B=-2$, $A=6$

$A = 6$; ergo summa erit $= 6 - 2n + 2n^2 \cdot 2^n - 6$. Aliud exemplum præbeat terminus generalis $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} n + n^2 \cdot \frac{1}{2^n}$. Quoniam exponentialis minor est unitate, ita formo summam $A - (\overline{A + Bn + Cn^2} \cdot \frac{1}{2^n}$. Ab hac si detrahatur formula, quæ nascitur posita $n - 1$ pro n, invenietur terminus generalis

$$\begin{array}{l} - A - Bn - Cn^2 \\ + 2A + 2Bn + 2Cn^2 \cdot \frac{1}{2^n} \\ - 2B - 4Cn \\ + 2C \end{array}$$

Conferatur hic cum dato, ut habeas æquationes $A - 2B + 2C = \frac{1}{3}$, $B - 4C = \frac{1}{2}$, $C = 1$, quæ dabunt $B = \frac{9}{2}$, $A = \frac{22}{3}$: Ergo seriei quæsita summa erit $= \frac{22}{3} - \frac{1}{2^n} \cdot \overline{\frac{22}{3} + \frac{9n}{2} + n^2}$, & serie in infinitum producta $= \frac{22}{3}$. Series hujusmodi solent vocari algebraico-geometricæ, quia si seriei algebraicæ termini omnes multiplicentur per singulos terminos seriei geometricæ, series hujusmodi exoriuntur.

41. Si efformetur series addendo, vel detrahendo series vel geometricas, vel algebraico-geometricas, manifestum est, ejus summam esse in potestate. Nam singularum serierum, quæ addendæ, vel subducendæ sunt, ex termino generali summa per methodum traditam invenietur. Quare sicuti genitæ seriei terminus generalis coalescit ex serierum generantium terminis generalibus simul additis, vel detractis, ita etiam summa, quæ proinde innotescet. Verum difficile admodum est cognitu, utrum series aliqua, quæ proponitur formari possit per additionem, aut subtractionem serierum geometricarum, aut algebraico-geometricarum. Quamobrem operæ erit pretium facere, quænam sint series, quæ hac ratione formari possint. Ajo itaque series omnes, quæ recurrentes dicuntur, esse hujus generis. Series recurrentes vocantur illæ, in quibus terminus quilibet determinatur per aliquot ex antecedentibus multiplicatis per datas constantes. Si dato termino uno antecedente definitur subsequens, dicitur series recurrens primi ordinis; si requiruntur duo, tres, aut quatuor termini antecedentes ad inveniendum sequentem dicitur secundi, tertii, aut quarti ordinis, atque ita deinceps. Ita series 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 239 &c. est recurrens secundi ordinis, quia sumptis duobus primis terminis ad arbitrium, quilibet æqualis est duobus antecedentibus ductis ordinatim in 1, 2. Series vero

$0, 0, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{32}, \frac{5}{64}$ &c. est recurrens tertii ordinis, quia quilibet terminus efformatur a tribus antecedentibus multiplicatis ordinatim per datas $\frac{1}{4}$, $\frac{-1}{2}$, 1. Primi autem tres termini sumuntur ad libitum.

42. Ad demonstrandum, series has omnes componi posse per additionem, & sub-

subtractionem serierum geometricarum, aut algebraico-geometricarum, gradatim procedo, & considero primum terminum generalem maxime simplicem nempe AK^n, ex quo nascitur series AK, AK^2, AK^3, AK^4 &c., quæ nihil aliud est, quam series geometrica. Nemo unus non videt seriem hanc esse recurrentem primi ordinis; nam quilibet terminus multiplicatus per K sequentem suppeditat. Quapropter si quantitas hæc, quæ in singulos terminos ducta dat terminos sequentes, vocetur $=r$, erit $K=r$, atque adeo K nihil erit aliud, quam radix hujus æquationis $x-r=0$. Itaque data r propositæ seriei invenietur terminus generalis, si Ar, sive AK æquetur primo seriei termino, & per hanc æquationem determinetur A. Exemplum præbeat series recurrens primi ordini 6, 4, $2\frac{2}{3}$, $1\frac{7}{9}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{64}{81}$ &c., quæ, posito primo termino 6 efformatur, si singuli termini multiplicentur per $\frac{2}{3}$. Igitur terminus generalis seriei habet hanc formam $A.(\frac{2}{3})^n$, & enim $r=K=\frac{2}{3}$. Ad inveniendam A, pone $n=1$ institue æquationem cum primo termino seriei, & habebis $\frac{2A}{3}=6$, seu $A=9$ ergo seriei terminus generalis $=9.(\frac{2}{3})^n=\frac{2^n}{3^{n-2}}$.

43. Transeo ad terminum generalem AK^n+BH^n, ex quo oritur series $\begin{matrix} AK, & AK^2, & AK^3 \\ BH, & BH^2, & BH^3 \end{matrix}$ &c. quæ constat ex duabus seriebus geometricis simul sumptis. Ajo, hanc esse seriem recurrentem secundi ordinis, cujus terminus quilibet ex duobus antecedentibus determinatur. Multiplicandi autem sunt secundus, idest qui propior est termino quæsito, per $K+H$, primus per $-KH$. Ut de hac veritate certus fias, satis erit multiplicare $AK^{n-1}+BH^{n-1}$ per $K+H$, & $AK^{n-2}+BH^{n-2}$ per $-KH$; accepta enim summa oritur AK^n+BH^n, qui est terminus subsequens. Quæ quantitas in formatione seriei multiplicat secundum ex duobus terminis requisitis vocetur $=r$, quæ multiplicat primum $=s$, erit $r=K+H$, $s=-KH$: ergo $rr=K^2+2KH+H^2$, additoque primæ parti æquationis $4s$, secundæ $-4KH$, fiet $rr+4s=K^2-2KH+H^2$, extractaque radice $\sqrt{rr+4s}=K-H$. Hinc ex ambiguitate signorum oritur $\frac{r+\sqrt{rr+4s}}{2}=K$, $\frac{r-\sqrt{rr+4s}}{2}=H$. Valores K, H nihil aliud sunt, quam radices hujus æquationis $xx-rx-s=0$, ut resolutio patefaciet. Sed ne opus est quidem resolutione. Nam ex natura æquationis secundi gradus constat, illas esse radices, quæ simul sumptæ æquant coefficiens secundi termini signo mutato, & simul multiplicatæ præbent tertium terminum; hæ proprietates vero insunt in quantitatibus K, H; nam debet esse $K+H=r$, $KH=-s$; ergo K, H sunt radices æquationis $xx-rx-s=0$. Determinatis K, H, ad determinandas A, B, satis est ponere $AK+BH$ æqualem primo seriei termino, & AK^2+BH^2 æqualem

lem secundo; atque æquationes duæ valores duarum A, B suppeditabunt.

44. Ad exemplum sit $s = -1$, $t = 3$, & primi seriei termini sint 3, 2, ut nascatur series recurrens secundi ordinis 3, 2, 3, 7, 18, 47, 123 &c. Ex methodo tradita invenies $K = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $H = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, quæ sunt radices æquationis $xx - 3x + 1 = 0$. Ad inveniendas A, B fiat

$A . \frac{3+\sqrt{5}}{2} + B . \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 3$, $A . \frac{9+6\sqrt{5}+5}{4} + B . \frac{9-6\sqrt{5}+5}{4} = 2$, sive $A . \frac{7+3\sqrt{5}}{2} + B . \frac{7-3\sqrt{5}}{2} = 2$. Hanc deme ex prima multiplicata per 3, ut habeas $\overline{A+B} = 7$, qui positus in prima exhibet $\frac{3}{2} . 7 + \frac{1}{2}\sqrt{5} . \overline{A-B} = 3$;

ergo $A - B = \frac{-15}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}$. Igitur ex ambiguitate signorum $A = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$, $B = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. Quare terminus generalis seriei erit

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{2} . \overline{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}^{n} + \frac{7+3\sqrt{5}}{2} . \overline{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}^{n}.$$

45. Methodus hæc semper valet unico casu excepto, quum $4s = -tt$, quo in casu æquales sunt K, H, & æquatio $xx - tx - s = 0$ prædita est duabus radicibus æqualibus. Nam numquam poteris determinare valores A, B, sed methodum sequens incides in æquationem aut identicam, aut absurdam. Causa exempli sit $t = 3$, $s = \frac{-9}{4}$, & primi termini seriei 1, 1, ut nascatur series 1, 1, $\frac{3}{4}$, 0, $\frac{-27}{16}$, $\frac{-81}{16}$ &c. In hac invenies $K = H = \frac{3}{2}$. Quare si series reciperet terminum generalem hujus formæ; hic esset

$A . (\frac{3}{2})^n + B . (\frac{3}{2})^n = \overline{A+B} . (\frac{3}{2})^n$, quem facta $n = 1$, æqualem pone primo termino seriei, & facta $n = 2$, æqualem pone secundo, ut sit $\frac{3}{2} . \overline{A+B} = 1$, $\frac{9}{4} . \overline{A+B} = 1$, ex quibus provenit $\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, seu $1 = \frac{2}{3}$, quod est absurdum. Itaque quum invenitur $K = H$, vel quum æquatio $xx - tx - s = 0$ habet duas radices æquales, seriei terminus generalis nondum inventus est. Sed casum hunc paullo infra evolvam diligenter.

46. Si terminus generalis esset $AK^n + BH^n + CI^n$, ajo enasci seriem, quæ formabitur, si tres termini antecedentes multiplicentur per $K + H + I$, $- KH - KI - HI$, KHI, facto initio ab ultimo, qui propior est termino requisito. Hoc clare apparebit, si multiplices

$AK^{n-1} + BH^{n-1} + CI^{n-1}$ per $K + H + I$

$AK^{n-2} + BH^{n-2} + CI^{n-2}$ per $- KH - KI - HI$

AK

$AK^{n-3}+BH^{n-3}+CI^{n-3}$ per KHI, proveniet enim $AK^n+BH^n+CI^n$. Similiter si termino generali addatur quartus terminus DL^n, series producetur multiplicando ordinatim quatuor terminos antecedentes, facto initio ab ultimo, per

$K+H+I+L$

$-KH-KI-KL-HI-HL-IL$

$KHI+KHL+HIL$

$-KHIL$. Hoc eodem modo demonstratur ac in casu superiori. Idem invenies, ac demonstrabis, si terminus generalis constet quinque, sex, aut pluribus terminis ejusdem formæ simul additis. Hinc canon œcumenicus efformatur. Qualibet series, cujus terminus generalis constat pluribus terminis simul sumptis hujus formæ AK^n, producitur, quum tot seriei termini antecedentes, quotus est numerus terminorum in termino generali, multiplicantur ordinatim facto initio ab ultimo per

summam omnium K

producta earumdem ex *binis* negative sumpta

producta ex ternis

producta ex quaternis accepta negative, atque ita deinceps in reliquis. Qui canon aperte docet, omnes series, quibus est terminus generalis præsentis formæ, ad recurrentes pertinere.

47. Reliquum est, ut videamus, quomodo data lege seriei recurrentis, quæ oritur multiplicando aliquot terminos antecedentes, facto initio ab ultimo, per t, s, r, q, p &c. inveniendus sit ejus terminus generalis. Manifestum est fore $K+$ &c. $=t$, $-KH-$ &c. $=s$, $KHI+$ &c. $=r$, $-KHIL-$&c. $=q$, $KHILM+$ &c. $=p$, atque ita deinceps. His positis adverto æquationem

$$x^m-Kx^{m-1}+KHx^{m-2}-KHIx^{m-3}+KHILx^{m-4} \text{ \&c.} =0$$
$$\quad -\text{\&c.} \quad +\text{\&c.} \quad -\text{\&c.} \quad +\text{\&c.}$$

habere pro radicibus K &c. Itaque substitutis valoribus fiet æquatio $x^m-tx^{m-1}-sx^{m-2}-rx^{m-3}-qx^{m-4}-px^{m-5}$ &c. $=0$, cujus radices præbebunt quantitates K, H &c., quas requiro. In supra posita æquatione exponens m æqualis sit oportet numero terminorum antecedentium, qui ad formandam seriem necessarii sunt, sive numero quantitatum t, s, r &c. Inventis æquationis radicibus terminus generalis hanc formam habebit AK^n+BH^n &c. Ad determinandos valores A, B &c., primis seriei terminis numero m fac æqualem terminum generalem, posita in ipso successive $n=1$, $n=2$ &c.: atque ex formatis æquationibus quæsitos valores definies.

48. Methodus hæc, tametsi maxime generalis, nos deserit, quotiescumque in æquatione x^m-tx^{m-1} &c. $=0$, inveniantur duæ, aut plures radices æquales, quia valores A, B &c. determinari non possunt. Verum quo pacto in hoc casu inveniendus sit terminus generalis, paullo infra declarabo.

49. Ut omnis theoria exemplo fiat clarior, quæratur terminus generalis seriei $0, 0, 1, 1, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{21}{16}, \frac{21}{61}, \frac{85}{64}, \frac{85}{64}, \frac{341}{256}$ &c., quæ sumptis tribus terminis primis $0, 0, 1$ formatur, si tres termini antecedentes, facto initio ab ultimo, multiplicentur per $1, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}$. Quare æquatio præbens radices K, H, I erit

erit $x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$. Hujus radices sunt $1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$; ergo seriei terminus generalis hanc formam habebit $A.1^n + B.\frac{1}{2^n} + C.\frac{(-1)^n}{2^n}$. Ut determinentur A, B, C, posito successive $n = 1, 2, 3$, instituantur æquationes cum primis tribus seriei terminis, $A + \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = 0$, $A + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} = 0$, $A + \frac{B}{8} - \frac{C}{8} = 1$. Dematur prima ex secunda, & tertia; & orientur duæ $-\frac{B}{4} + \frac{3C}{4} = 0$, $-\frac{3B}{8} + \frac{3C}{8} = 1$, sive $-B + 3C = 0$, $-3B + 3C = 8$. Dematur prima multiplicata per 3 a secunda, & fiet $-6C = 8$, sive $C = \frac{-4}{3}$, ex quo provenit $B = -4$, & $A = \frac{4}{3}$: igitur terminus generalis quæsitus invenietur

$$\frac{4}{3} - \frac{4}{2^n} - \frac{4}{3} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

50. Consideravi hactenus series geometricas, & definivi, quænam series recurrentes formentur ex earum collectione. Transeo modo ad series algebraico-geometricas, & primum contemplor terminum generalem $\overline{A + Bn}.K^n$, ex quo hujusmodi formatur series $\overline{A+B}.K$, $\overline{A+2B}.K^2$, $\overline{A+3B}.K^3$, $\overline{A+4B}.K^4$ &c. Ajo seriem hanc produci, si multiplicentur duo termini antecedentes, ultimus per $2K$, præcedens per $-K^2$. Hoc demonstrabis multiplicando $\overline{A+B.\overline{n-1}}.K^{n-1}$ per $2K$, tum $\overline{A+B.\overline{n-2}}.K^{n-2}$ per $-K^2$; productum enim fiet $\overline{A+Bn}.K^n$. Si vocemus $2K = r$, $-KK = s$, manifestum est, fore $4s = -rr$, & æquationem $xx - rx - s = 0$ habere duas radices æquales. Hic est casus ille, qui, ut paullo ante diximus, non recipit terminum generalem hujus formæ $AK^n + BH^n$. Verum in præsentia constat, quam formam habere debeat. Erit autem $K = \frac{r}{2}$, sive radix æquationis $xx - rx - s = 0$ præditæ duabus radicibus æqualibus. Cætera peragantur ut supra.

51. Ad exemplum profero in medium seriem 0, 1, 4, 12, 32, 120, 432 &c., quæ sumptis primis terminis 0, 1, formatur, si duo termini antecedentes multiplicentur, ultimus per 4, primus per -4. Quoniam $r = 4$, $s = -4$, invenietur $4s = -rr$, seu æquatio $xx - rx - s = 0$ prædita erit duabus radicibus æqualibus. Invenietur autem $K = 2$. Quare terminus generalis hanc formam habet $\overline{A+Bn}.2^n$. Facta successive $n = 1, 2$, instituantur æquationes cum primis seriei terminis, & fiet $2A + 2B = 0$, $4A + 8B = 1$. Ex his prima multiplicata primum per 2, deinde per 4, dematur ex secunda, & fiunt $4B = 1$, $-4A = 1$, ergo $B = \frac{1}{4}$, $A = -\frac{1}{4}$; igitur terminus generalis fit $\overline{-\frac{1}{4} + \frac{n}{4}}.2^n = \overline{n-1}.2^{n-2}$.

52. Si terminus generalis fuerit $\overline{A+Bn+Cn^2}.K^n$, series, quæ ex ipso nascitur, erit recurrens ordinis tertij, quæ producetur, si tres termini antecedentes multiplicentur, incipiendo ab ultimo, per $3K, -3K^2, K^3$. Similiter series, cui convenit terminus generalis $\overline{A+Bn+Cn^2+Dn^3}.K^n$, est recurrens quarti ordinis, & formatur, si quatuor termini antecedentes, facto initio ab ultimo, multiplicentur per $4K, -6K^2, 4K^3, -K^4$. Hinc canon œcumenicus sancitur. Si terminus generalis exprimatur a formula

$\overline{A+Bn+Cn^2+En^3 \text{ \&c.}}.K^n$, in qua termini, ex quibus coalescit quantitas algebraica multiplicans K^n, sint numero m, & maximum exponens $n=m-1$. ajo, seriem recurrentem, quæ ex eo nascitur, obtineri, si multiplicentur termini antecedentes, ultimus per mK, qui hunc præcedit per $-\frac{m.\overline{m-1}}{2}K^2$, qui præit per $\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}.K^3$, alius per $-\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{2.3.4}.K^4$, atque ita deinceps.

53. Si æquationem constituam

$$x^m - mKx^{m-1} - \frac{m.\overline{m-1}}{2}K^2x^{m-2} - \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}K^3x^{m-3} \text{ \&c.} = 0,$$

perspicuum est, in ea tot esse radices æquales K, quot unitates insunt in exponente m. Jam vero quantitates, quæ debent multiplicare terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, sint t, s, r, p &c. Fiet $mK=t$, $-\frac{m.\overline{m-1}}{2}K^2=s$, $\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}K^3=r$, $-\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{2.3.4}.K^4=q$ &c. Qui valores in statuta æquatione præbent $x^m - tx^{m-1} - sx^{m-2} - rx^{m-3} - qx^{m-4}$ &c. $=0$, quæ eadem est cum illa, quam supra etiam invenimus. Itaque quotiescumque æquatio hæc prædita erit radicibus æqualibus, terminus generalis præsentem formam habebit, & quantitates A, B &c. eadem methodo detegentur.

54. Exemplum desumamus a serie $0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{16}, 1\frac{3}{4}$ &c., quæ sumptis ad arbitrium quatuor primis terminis, nascitur, si quatuor termini antecedentes multiplicentur, incipiendo ab ultimo, per $2, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{16}$. Efformetur æquatio $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=0$. Hæc habet quatuor radices omnes $=\frac{1}{2}$: ergo seriei terminus generalis hanc formam accipit

$\overline{A+Bn+Cn^2+Dn^3}.\frac{1}{2}^n$. Ut determinentur valores A, B &c., ponatur in termino generali successive $n=1, 2, 3, 4$, & constituantur æquationes cum quatuor primis seriei terminis, quæ erunt hujusmodi

$A+B$

$\overline{A+B+C+D}.\frac{1}{2}=0$ $\qquad A+B+C+D=0$

$\overline{A+2B+4C+8D}.\frac{1}{4}=0$ $\qquad$ five $\qquad A+2B+4C+8D=0$

$\overline{A+3B+9C+27D}.\frac{1}{8}=0$ $\qquad A+3B+9C+27D=0$

$\overline{A+4B+16C+64D}.\frac{1}{16}=1$ $\qquad A+4B+16C+64D=16$

Dematur prima ex fecunda, fecunda ex tertia, tertia ex quarta, & tres æquationes hæ orientur

$B+3C+7D=0$ factaque fimili $2C+12D=0$
$B+5C+19D=0$ fubtractione $2C+18D=16$
$B+7C+37D=16$

& deducta prima ex altera $6D=16$. Quare hujufmodi inveniuntur valores $D=\frac{8}{3}$, $C=-16$, $B=\frac{88}{3}$, $A=-16$; igitur terminus generalis eft hujufmodi $(\overline{-16+\frac{88}{3}n-16n^2+\frac{8}{3}n^3}.\frac{1}{2^n}$.

55. Quod fi fpectetur terminus generalis tamquam coalefcens ex pluribus terminis, quorum alij fpectent ad præfentem formam, alij ad fuperiorem, invenietur eadem prorfus æquatio, quæ prædita erit radicibus partim æqualibus, partim inæqualibus. Quare terminus generalis coalefcet ex aggregato formularum, quarum aliæ exhibent feries geometricas, aliæ algebraico-geometricas. Methodus ex fuperioribus fatis aperta eft. Attamen exemplum ad eam illuftrandam proponamus. Sit feries $0, 3, -2, 23, -14, 87, -90, 303$ &c., quæ componitur multiplicando quinque terminos antecedentes, incipiendo ab ultimo, per $0, 4, -2, -3, 2$. Ut inveniatur terminus generalis, necelle eft radices habeantur hujus æquationis $x^5 * -4x^3+2x^2+3x-2=0$. Radices autem funt hæ $x=1$, $x=1$, $x=1$, $x=-1$, $x=-2$, quarum tres æquales funt, inæquales duæ. Itaque terminus generalis hanc habebit formam $\overline{A+Bn+Cn^2}.1^n+D.(-1)^n+E.(-2)^n$. Ad coefficientium A, B, C, D, E valores definiendos, pofito fucceffive $n=1, 2, 3, 4, 5$ inftituantur quinque æquationes cum primis quinque feriei terminis, per quas nancifcemur $A=1$, $B=-2$, $C=1$, $D=-2$, $E=1$; igitur terminus generalis erit $1-2n+n^2-2(-1)^n+1.(-2)^n$. Quæ dicta funt, fatis oftendunt, omnes, quotquot funt, feries recurrentes habere terminum generalem, qui componitur a formulis exponentialibus multiplicatis aut per folas conftantes, aut per functiones n integras, & rationales; igitur, quum omnium ferierum, quæ hujufmodi habent terminos generales, ex fupra tradita methodo fumma inveniatur, confequitur feries omnes recurrentes fummam exponentialem recipere. Multo plura de feriebus recipient bus fummam algebraicam, aut exponentialem tradit Vincentius Riccatus in fuo commentario, ex quo pauca hæc decerpere vifum eft. Quocirca ad plenam ferierum theoriam confequendam auctor tibi fum, ut commentarium illum attente perlegas.

CAPUT QUINTUM.

In quo exhibetur formula generalis earum æquationum, quæ radicem habent cardanicæ ſimilem, ejuſque ope formulæ aliquot in trinomia realia reſolvuntur, & cotteſianum theorema demonſtratur.

1. POſtquam egimus de ſeriebus, earumque terminis, ac ſummis generalibus, nihil facilius eſt, quam oculis ſubjcere formulam generalem earum æquationum, quæ præditæ ſunt radice ſimili cardanicæ, de quibus cap. tertio loquuti ſumus, & earum auxilio aliquot binomia, ac trinomia in factores reales ſecundi gradus reſolvere, & theorema Ruggerii Cotteſii viri doctiſſimi demonſtrare. Theoriam hanc univerſam mutuabimur ex Vincentii Riccati opuſculo quarto tomi ſecundi. Capite tertio tabulam invenies, cujus ope æquationes habentes radicem ſimilem cardanicæ uſque ad gradum decimum quartum efformantur, & methodus patefacta eſt, qua tabula ad quoſcumque gradus extenditur. Hujus tabulæ ſeries prima verticalis, quæ ſubeſt termino mn, eſt ſeries arithmetica, cujus ſcilicet differentiæ primæ conſtantes ſunt. Ejus terminus generalis ſtatim cognoſcitur $=p$, denotante p gradum æquationis.

2. Altera ſeries, quæ ſubeſt termino $m^2 n^2$, eſt algebraica ſecundi ordinis, quæ habet conſtantes differentias ſecundas. Ejus terminus generalis, ut conſtat ex capite ſuperiore, hac formula continetur $A+Bp+Cp^2$, quæ debet $=2$, poſita $p=4$, debet $=5$, poſita $p=5$, debet $=9$, poſita $p=6$; igitur habebimus æquationes tres

$A+4B+16C=2$ $A+5B+25C=5$ $A+6B+36C=9$	Deme primam ex ſecunda, ſecundam ex tertia, & duas æquationes invenies

$B+9C=3$ $B+11C=4$	Dematur item ex altera prima, & fiet

$2C=1$, ſive $C=\frac{1}{2}$. Quo valore in aliis æquationibus opportune ſubſtituto, naſcitur $B=\frac{-3}{2}$, $A=0$. Igitur terminus generalis ſecundæ ſeriei ſubſtantis termino $m^2 n^2$ fiet $\frac{-3p+pp}{2}=\frac{p\cdot\overline{p-3}}{2}$.

3. Similiter ſeries tertia, cui ſuperſtat terminus $m^3 n^3$, eſt algebraica tertii ordinis, & habet tertias differentias conſtantes. Ejus terminus generalis hac formula includitur $A+Bp+Cp^2+Dp^3$, quæ debet æquare 2, 7, 16, 30, facta ſucceſſive $p=6, 7, 8, 9$. Quatuor ergo naſcuntur æquationes

$A+6B+36C+216D=2$ $A+7B+49C+343D=7$ $A+8B+64C+512D=16$ $A+9B+81C+729D=30$	Singulæ æquationes iſtæ a ſequentibus detrahantur, & tres orientur æquationes

$B+$

$B + 13C + 127D = 5$
$B + 15C + 169D = 9$
$B + 17C + 217D = 14$
| Facta, ut antea, singularum deductione, duæ sequentes orientur

$2C + 42D = 4$
$2C + 45D = 5$
| & prima ab altera deducta fiet $6D = 1$, sive $D = \frac{1}{6}$. Demum opportune peractis substitutionibus $C = \frac{-9}{6}$, $B = \frac{20}{6}$, $A = 0$. Quapropter seriei terminus generalis erit $\frac{20p - 9pp + p^3}{6} = \frac{p \cdot \overline{p-4} \cdot \overline{p-5}}{2 \cdot 3}$.

4. Simili utens methodo in reliquis seriebus, quæ sunt omnes algebraicæ, quarum gradus unitate crescit, invenies, terminos generales ordinatim esse

$$\frac{p \cdot \overline{p-5} \cdot \overline{p-6} \cdot \overline{p-7}}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\frac{p \cdot \overline{p-6} \cdot \overline{p-7} \cdot \overline{p-8} \cdot \overline{p-9}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$\frac{p \cdot \overline{p-7} \cdot \overline{p-8} \cdot \overline{p-9} \cdot \overline{p-10} \cdot \overline{p-11}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$\frac{p \cdot \overline{p-8} \cdot \overline{p-9} \cdot \overline{p-10} \cdot \overline{p-11} \cdot \overline{p-12} \cdot \overline{p-13}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

; atque ita deinceps. Quæ quum ita sint, æquatio generalis, cui est radix similis cardanicæ, invenitur esse

$$x^p - pax^{p-2} + \frac{p \cdot \overline{p-3}}{2} a^2 x^{p-4} - \frac{p \cdot \overline{p-4} \cdot \overline{p-5}}{2 \cdot 3} a^3 x^{p-6}$$
$$+ \frac{p \cdot \overline{p-5} \cdot \overline{p-6} \cdot \overline{p-7}}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 x^{p-8} - \frac{p \cdot \overline{p-6} \cdot \overline{p-7} \cdot \overline{p-8} \cdot \overline{p-9}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^3 x^{p-10}$$
$$+ \frac{p \cdot \overline{p-7} \cdot \overline{p-8} \cdot \overline{p-9} \cdot \overline{p-10} \cdot \overline{p-11}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^6 x^{p-12} \ldots\ldots\ldots - b = 0.$$

In hac omittendus est terminus ille, in quo p incipit esse minor eo numero, qui deducendus est, & termini omnes consequentes.

5. Ut per hanc æquationem binomia, ac trinomia aliquot resolvam in factores reales secundi gradus, memento, demonstratum esse cap. tertio, radicem æquationis, posita a positiva, semper ita exprimi $x = 2 \cdot C \cdot \frac{\mu}{p}$, existente μ arcu, vel logarithmo, cujus sinus totus $= a^{\frac{1}{2}}$, & cosinus $= \frac{b}{2 \cdot a^{\frac{p-1}{2}}}$, & sinus positivus est. Si $\frac{bb}{4} > a^p$, accipiendi sunt cosinus hyperbolici; quo in casu, existente p impari, $C b \cdot \frac{\mu}{p}$ habet unicum valorem realem, existente p pari habet duos positivum unum, alium negativum. Contra si $\frac{bb}{4} < a^p$, capiendi erunt cosinus circulares, in quo casu $C c \cdot \frac{\mu}{p}$ tot habet valores, quot p continet unitates. Qui valores,

posito

pofito μ arcu circumferentia minore, & circumferentia $= c$ erunt $Cc.\frac{\mu}{p}$, $Cc.\frac{c+\mu}{p}$, $Cc.\frac{2.c+\mu}{p}$.....$Cc.\frac{\overline{p-1}.c+\mu}{p}$. Relicto cafu primo, qui nos deducit ad cofinus hyperbolicos, fpecto dumtaxat alterum, in quo quum ad cofinus circulares ducamur, æquatio radices omnes reales continet. Affumo trinomium $zz - xz + a = o$. Si in inventa generali æquatione fubftituam pro x ejus valorem a trinomio exhibitum nempe $z + \frac{a}{z}$, manifeftum eft, novam oriri formulam, quæ liberata a divisoribus erit refolubilis in tot trinomia fimilis formæ, quot funt valores x. Facta fubftitutione nafcitur formula $z^p + \frac{a^p}{z^p} - b = o$, five trinomium $z^{2p} - bz^p + a^p = o$. Quoniam exiftente $\frac{bb}{4} < a^p$, x habet omnes valores reales, quos antea invenimus, conftat, trinomium, cujus gradus eft $2p$, refolvi in factores fecundi gradus reales numero p hoc modo

$$z^{2p} - bz^p + a^p = o = \overline{zz - 2Cc.\frac{\mu}{p}.z + a}\,.\,\overline{zz - 2Cc.\frac{c+\mu}{p}z + a}\,.$$
$$\overline{zz - 2Cc.\frac{2c+\mu}{p}.z + a}.....\overline{zz - 2Cc.\frac{\overline{p-1}.c+\mu}{p}.z + a}.$$

6. Sed hypothefes aliquot accuratius evolvamus. Fiat primo $b = o$, ut habeatur binomium $z^{2p} + a^p = o$. In hac hypothefi, quando cofinus arcus $\mu = o$, & finus fit oportet pofitivus, arcus μ erit quadrans circuli. Quare vocata ut antea circumferentia $= c$, adeoque ejus quadrante $= \frac{c}{4}$, trinomia realia, in quæ binomium refolvitur, erunt hujufmodi $zz - 2Cc.\frac{c}{4p}.z + a$, $zz - 2Cc.\frac{5c}{4p}.z + a$, $zz - 2Cc.\frac{9c}{4p}$, $zz - 2Cc.\frac{13c}{4p}.z + a$ ....; $zz - 2Cc.\frac{4p-3}{4p}.c.z + a$. Sed de hoc cafu infra redibit fermo.

7. Ponamus modo $Cc.\mu$, hoc eft $\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}}$, fcilicet finui toti. Provenit $b = 2a^{\frac{p}{2}}$, & trinomium hanc formam induit $z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^p + a^p = o$. Manifeftum eft $\mu = o$; ergo ultimum trinomium refolvitur in fequentia trinomia fecundi gradus $zz - Cc.\frac{o}{p}z + a$, $zz - 2Cc.\frac{c}{p}.z + a$, $zz - 2Cc.\frac{2c}{p}.z + a$, ...$zz - 2Cc.\frac{\overline{p-1}.c}{p}.z + a$, Defcribe circulum, cujus radius $= a^{\frac{1}{2}}$, & facto initio a puncto 1, (*Fig.* 1, 2) divide totam circumferentiam in partes $2p$, ut femicircumferentia in partes p divifa reperiatur. In fingulis divifionis punctis ordinatim appone numeros, ut figura manifeftat. Liquet punctis, quæ figna-

ta

ta sunt numeris imparibus, respondere cosinus quæsitos; arcus enim $13 = \frac{c}{p}$, $15 = \frac{2c}{p}$; atque ita deinceps.

8. Si recte animum advertas, cognosces, bis semper eumdem cosinum reperiri; nam cuilibet arcui minori, quam semicircumferentia, respondet arcus eadem major, qui præditus est eodem cosinu. Excipiendus est tamen arcus $= o$, cujus cosinus $= a^{\frac{1}{2}}$; & ubi p sit numerus par, excipiendus est arcus $= \frac{c}{2}$, hoc est semicircumferentia, cujus cosinus $= - a^{\frac{1}{2}}$, horum enim arcuum cosinus reperiuntur semel. Verum arcus hujusmodi præbent trinomia $zz - 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, $zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, quæ quadrata sunt, & quorum radices extrhai possunt. Quapropter satis erit dividere semicircumferentiam in partes p, facto initio a puncto 1, & accipere cosinus omnium arcuum desinentium in puncta signata numeris imparibus, & ex his efformari trinomia, quæ erunt hujusmodi

$zz - 2Cc.\frac{c}{p}.z + a$, $zz - 2Cc.\frac{2c}{p}.z + a$ &c. Nostrum itaque trinomium resolubile est in hæc trinomia elata ad potestatem quadraticam, addito semper trinomio $zz - 2a^{\frac{1}{2}}z + a$; & si p sit par, etiam trinomio $zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$. Habemus ergo æquationem

$$z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^p + a^p = \overline{zz - 2Cc.\frac{c}{p}.z + a}^2 . \overline{zz - 2Cc.\frac{2c}{p}.z + a}^2 .$$
$$\overline{zz - 2Cc.\frac{3c}{p}.z + a}^2 \ \&c. . \overline{zz - 2a^{\frac{1}{2}}z + a} . {}^{*}\overline{zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a}.$$

Trinomium ultimum, cui signavi *, apponendum non est, nisi p fuerit par. Igitur extracta radice habebimus

$$z^p - a^{\frac{p}{2}} = \overline{zz - 2Cc.\frac{c}{p}.z + a} . \overline{zz - 2Cc.\frac{2c}{p}.z + a} . \overline{zz - 2Cc.\frac{3c}{p}.z + a}$$
$$\&c. . \overline{z - a^{\frac{1}{2}}} . {}^{*}\overline{z + a^{\frac{1}{2}}}.$$

9. Demum ponamus $Cc.\mu$, hoc est $\frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}} = -a^{\frac{1}{2}}$, scilicet sinui toti negative sumpto, & trinomium hoc nascetur $z^{2p} + 2a^{\frac{p}{2}}z^p + a^p = o$. Evidens est, arcum μ æquare circumferentiæ dimidium, hoc est $\frac{c}{2}$. Quare habes trinomia, in quæ fit resolutio, nempe $zz - 2Cc.\frac{c}{2p}.z + a$, $zz - 2Cc.\frac{3c}{2p}.z + a$, $zz - 2Cc.\frac{5c}{2p}.z + a$ .... $zz - 2Cc.\frac{2p-1}{2p}.z + a$. Initio facto a puncto 1 integram circumferentiam divide in partes $2p$, & numeris naturalibus ordinatim signa puncta divisionis, ut factum est antea. Cosinus accipiendi sunt eorum

eorum arcuum, quorum termini a numeris paribus definiuntur. Nam arcus $12 = \frac{c}{2p}$, $14 = \frac{3c}{2p}$, atque ita de reliquis.

10. Hic quoque evenit, ut bis cosinus singuli sint capiendi, existunt enim semper duo arcus, alter minor, alter major semicircumferentia, qui eumdem cosinum habeant. Excipe tamen dimidium circumferentiæ, cujus cosinus non ingreditur in trinomia, nisi p fuerit impar; quo in casu quum cosinus $= -a^{\frac{1}{2}}$ resultabit trinomium $zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, quod quadratum est præditum radice $z + a^{\frac{1}{2}}$. Quare satis est dividere semicircumferentiam in partes p, facto initio ab 1, accipere cosinus arcuum desinentium in numeros pares, & ex his formata trinomia elevare ad quadratum, quibus addendum est trinomium $zz + 2a^{\frac{1}{2}}z + a$, si p sit impar. Hoc modo obtinemus æquationem

$$z^{2p} + 2a^{\frac{p}{2}}z^{p} + a^{p} = \overline{zz - 2Cc.\tfrac{c}{2p}.z + a}^{2} . \overline{zz - 2Cc.\tfrac{3c}{2p} + a}^{2} .$$

$$\overline{zz - 2Cc.\tfrac{5c}{2p}.z + a}^{2} \text{ \&c. } {}^{*}\overline{zz + 2a^{\frac{1}{2}}.z + a}.$$

Signum * denotat trinomium non esse scribendum, nisi existente p impari. Extrahatur radix quadrata

$$z^{p} + a^{\frac{p}{2}} = \overline{zz - 2Cc.\tfrac{c}{2p}.z + a} . \overline{zz - 2Cc.\tfrac{3c}{2p}.z + a} . \overline{zz - 2Cc.\tfrac{5c}{2p}.z + a}$$

&c. $^{*}z + a^{\frac{1}{2}}$.

11. Ex his facillima, atque expeditissima fluit demonstratio celeberrimi theorematis cotesiani, quod statim cognosces, ubi probatum fuerit sequens lemma. In circulo, cujus centrum C, (*Fig.* 3, 4) radius $CA = a^{\frac{1}{2}}$, assumpto quolibet puncto B, vocetur $CB = z$. Ducta diametro transeunte per punctum D, agatur quælibet BD, & demittatur DE, quæ sit sinus arcus AD; fiat autem cosinus $CE = x$; ajo $BD = \sqrt{zz - 2xz + a}$. Liquet $ED^{2} = a - xx$, $BE = \pm z \mp x$. Signa superiora valent in tertia, inferiora in quarta figura; ergo $BE^{2} = zz - 2xz + xx$; ergo $BD^{2} = zz - 2xz + xx + a - xx = zz - 2xz + a$, & $BD = \sqrt{zz - 2xz + a}$. Q. E. D.

12. Deinceps arcus indicabo per numeros, a quibus in figuris terminantur. Paullo ante probatum est $z^{2p} - 2x^{\frac{p}{2}}z^{p} + a^{p} = \overline{zz - 2Cc.0.z + a} . \overline{zz - 2Cc.13.z + a} . \overline{zz - 2Cc.15.z + a}$ &c., donec exhausta fuerit omnis circumferentia. Seca $CB = z$, & fiet $z^{2p} - 2a^{\frac{p}{2}}z^{p} + a^{p} = B1^{2}.B3^{2}.B5^{2}$ &c.; & extracta radice $\pm z^{p} \mp a^{\frac{p}{2}} = B1.B3.B5$ &c.

13. Pro-

13. Probatum item eſt antea

$z^{2p} + 2a^{\frac{p}{2}} z^p + a^p = \overline{zz - 2Cc.12.z + a}.\overline{zz - 2Cc.14.z + a}.$ $\overline{zz - 2Cc.16.z + a}$ &c., donec exhauſta fuerit integra circumferentia; igitur $z^{2p} + 2a^{\frac{p}{2}} z^p + a^p = B2^2.B4^2.B6^2$ &c., extractaque radice $z + a^{\frac{p}{2}} = B2.B4.B6$ &c. Formula hæc ſimul cum formula numeri ſuperioris exhibet theorema Ruggerii Cotteſii.

14. Similis conſtructio accomodari poteſt etiam trinomio $z^{2p} - bz^p + a^p$, quoties $\frac{bb}{4} < a^p$. Etenim ſeca arcum AD(*F.5*) cujus coſinus $= \frac{b}{2.a^{\frac{p-1}{2}}}$, qui arcus erit minor quadrante, ſi b ſit poſitiva, major, ſi b ſit negativa. Hunc arcum divide in partes p, quarum prima ſit A1. Ex puncto 1 incipe dividere circumferentiam in punctis 2, 3 &c.. Coſinus arcuum A1, A2, A3 &c. poſiti in trinomio $zz - 2xz + a$ exhibent trinomia realia, in quæ fit reſolutio. Igitur facta $CB = z$, actiſque B1, B2, B3 &c., nanciſcemur $z^{2p} - bz^p + a^p = B1^2.B2^2.B3^2$ &c.. Q. E. Inv.

15. Si in eodem trinomio $\frac{bb}{4} > a^p$, qui caſus complectitur etiam trinomium, in quo ultimus terminus a^p affectus eſt ſigno —, reſolvitur in duo binomia realia $z^p - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}$, $z^p - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}$, quæ per ea, quæ paullo ante dicta ſunt, facile reſolvuntur in trinomia realia ſecundi gradus.

15. Suſpicantur jure bono Analyſtæ, quamlibet formulam rationalem reſolvi poſſe in trinomia realia ſecundi gradus. Tametſi hac de re ingenioſe ſcripſerint P. le Seur, & Leonardus Eulerus Viri doctiſſimi; tamen plenam completamque hujuſce veritatis demonſtrationem deſideramus. Si formula omnis rationalis in trinomia realia reſolvi poteſt, perſpicuum eſt, omnia imaginaria, quæ ab operationibus algebraicis prodeunt, ad hanc ſolam formam reduci poſſe $A + B\sqrt{-1}$, in qua A, B ſunt quantitates reales. Etenim quodlibet imaginarium fiat $= x$, tum opportune eliminatis radicalibus ad æquationem devenies, in qua x altiorem obtinet poteſtatem. Hæc reſolvatur in trinomia hujus formæ $xx + mx + n = o$, quæ dant $x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{mm}{4} - n}$. Si autem radix ſit imaginaria, ita diſponatur $\sqrt{n - \frac{mm}{4}}.\sqrt{-1}$; atqui x æqualis eſt imaginario propoſito; ergo imaginarium ad prædictam formam ſemper reducitur. Sed hæc paucis attigiſſe ſufficiat.

CAPUT SEXTUM.

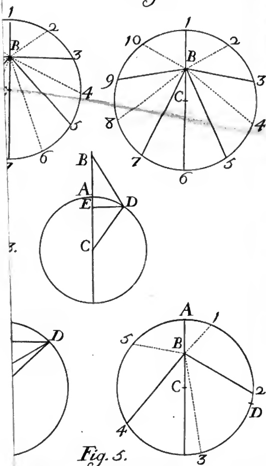
De Parabolarum, & Hyperbolarum familia, & de illis, quæ Paraboloides vocantur.

1. De curvis altioribus acturus illud præmoneo, me, si quando aut antea nominavi, aut in posterum nominabo quantitates infinitas, vel minimas, & infinitesimas, nihil intelligere aliud quam quantitates majores, vel minores quacumque data. Omnis familia parabolarum hac æquatione continetur $a^m x^n = y^{m+n}$. Similitudo autem, quam hæc æquatio habet cum æquatione parabolæ appollonianæ, quæ tanta est, ut si $m = n = 1$, curva fit parabola appolloniana, effecit, ut curvæ omnes parabolæ appellarentur, quarum gradus determinatur ab exponente $m + n$. Hoc omnibus commune est, ut si sumatur $x = 0$, fit quoque $y = 0$. Contra si x vel positiva, vel negativa sit infinita, y certe vel positiva, vel negativa fit quoque infinita, dummodo imaginaria non fit. Curva vero ab $y = 0$ ad $y = \pm \infty$, ita continuata est, ut cuilibet abscissæ x sua ordinata y respondeat. His generatim prænotatis, quæ obvia sunt, ad ramos curvæ reales determinandos, oportet inspicere, quandonam ordinatæ y proveniant imaginariæ, quando reales, & si reales quando positivæ sint, quando negativæ.

2. Diversitas exponentium m, n facit, ut parabolæ rami reales modo in has, modo in illas plagas excurrant. Quod ut facilius cognoscamus, extrahamus radicem $m+n$, ut formula oriatur $\sqrt[m+n]{a^m x^n} = y$. Si ambo exponentes m, n sint numeri impares, fiet $m+n$ par. Jam vero si accipiatur x positiva, erit x^n positiva; ergo y æquabit radicem parem quantitatis positivæ; sed radix par quantitatis positivæ est & positiva, & negativa; ergo duplex est valor y negativus, & positivus, & ad plagam abscissarum CB (*Fig.* 1) positivarum duplex ramus parabolæ CP, CQ excurrit, primus in regione ordinatarum positivarum, secundus negativarum. Si vero x negativa sumatur, x^n erit negativa; ergo y æquat radicem parem quantitatis negativæ, quæ semper est imaginaria; ergo ad plagam abscissæ negativæ, nullus est ramus parabolæ. Si æquatio fuisset $-a^m x^n = y^{m+n}$, eodem ratiocinio probabis, utrumque ramum protendi ad partem abscissæ negativæ.

3. Sit deinde n impar, & m par, ut impar sit $m+n$. Si x accipiatur positiva, erit x^n positiva; ergo y æquabit radicem imparem positivæ quantitatis, quæ unum dumtaxat valorem habet realem, atque hunc positivum; ergo unus exurgit ramus curvæ CP, (*Fig.* 2) cujus ordinatæ, & abscissæ sunt positivæ. Si vero x negativa sit, negativa item erit x^n; igitur y æqualis est radici impari negativæ quantitatis, quæ uno solum prædita est valore reali, atque hoc negativo. Habet itaque curva alium ramum CQ, cujus tam abscissæ, quam ordinatæ sunt negativæ. In æquatione $-a^m x^n = y^{m+n}$, abscissis positivis respondent ordinatæ negativæ, & positivæ abscissis negativis.

4. Po-


Fig. 2.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
B
C
A
E
D
Fig. 5.

4. Poſtea pone n parem, m imparem, ut ſit impar $m+n$. Exiſtente x poſitiva, erit quoque poſitiva x^n, & y erit radix impar quantitatis poſitivæ, quæ poſitiva eſt. Naſcitur itaque, ut antea, ramus CP (*Fig.* 3). Exiſtente x negativa, x^n poſitiva eſt, quia poteſtas par quantitatis negativæ eſt poſitiva; igitur valor realis y æquantis radicem imparem quantitatis poſitivæ eſt poſitivus. Quare exoritur in curva ramus CQ, qui ſitus eſt in plaga abſciſſæ negativæ, & ordinatæ poſitivæ. In æquatione $-a^m x^n = y^{m+n}$ uterque ramus progreditur ad plagas ordinatarum negativarum.

5. Demum omnes $m, n, m+n$ ſint numeri pares. Accepta x vel poſitiva, vel negativa, x^n ſemper poſitiva eſt; ergo ubique y eſt radix par poſitivæ quantitatis, atque adeo duos valores reales habet unum affirmativum, alterum negativum (*Fig.* 4). Parabola igitur quatuor ramis prædita erit, qui ad quatuor plagas procedunt. Æquationis vero $-a^m x^n = y^{m+n}$ curva omnis imaginaria eſt. Verum advertendum eſt caſum hunc ultimum non præbere curvas novas, ſed ſolum duas parabolas ſimul junctas ad caſus ſuperiores pertinentes. Nam extrahatur radix quadrata æquationis $a^m x^n = y^{m+n}$, ut fiat $\pm a^{\frac{m}{2}} x^{\frac{n}{2}} = y^{\frac{m+n}{2}}$, quæ extractio, ſi opus eſt, iteretur, donec exponentes deſinant eſſe omnes pares. Extractione peracta ob ambiguum ſignum ſeſe offerunt duæ parabolæ, quæ ſpectant ad aliquem ex ſuperioribus caſibus.

6 Priuſquam parabolarum familiam deſero, oportet advertere, licet, poſita x infinita, infinita ſit & y, tamen x, y non in eodem eſſe ordine infinitorum. Ut ordines diſtinguam gradatim procedo, & ſpecto primum parabolam conicam, cujus æquatio $ax = yy$. Quoniam eſt $a:y::y:x$, quemadmodum y eſt infinita reſpectu datæ a; ita x eſt infinita reſpectu y; ergo ſi conſidero y eſſe ſitam in primo ordine infinitorum, x poſita erit in ſecundo. Similiter æquationem parabolæ cubicæ $a^2 x = y^3$, præbet analogiam $a:y::y:\frac{y^2}{a}::\frac{y^2}{a}:x$; ergo ſicuti y eſt infinita reſpectu a, $\frac{y^2}{a}$ erit infinita reſpectu y, & x infinita reſpectu $\frac{y^2}{a}$; igitur ſi ſtatuatur y in primo ordine infinitorum, x erit in tertio. Generatim oſtendam hoc progreſſu in parabola, cujus æquatio ſit $a^m x = y^{m+1}$, ſi y ſit in primo ordine infinitorum, x erit in ordine $\overline{m+1}^{eſimo}$. Quod ſi habeam $a^m x^n = y^{m+n}$, extracta radice n fiet $a^{\frac{m}{n}} x = y^{\frac{m+n}{n}}$. Itaque ſi y pertinere ſpectetur ad primum ordinem infinitorum, x ſpectabit ad ordinem $\frac{m+n}{n}^{eſimum}$; qui ordo, ſi $\frac{m+n}{n}$ ſit numerus fractus, medius eſt inter ſuperiores ordines. Contra ſi x ſpectetur eſſe in primo infinitorum ordine, y erit in ordine $\frac{n}{m+n}^{eſimo}$, qui medius eſt inter finitum, & primum ordinem infinitorum.

7. Quod dictum est de quantitatibus infinite magnis, idem dicas velim de infinite exiguis. Nam si y minima accipiatur, & constituatur in primo ordine infinitesimorum, valente æquatione $ax=yy$, x erit in secundo, quum sit tertia proportionalis post a, y, & debeat esse minima respectu y, sicuti y est minima respectu a. In æquatione vero $a^2x=y^3$, erit x in tertio infinitesimorum ordine, & generatim in æquatione $a^mx=y^{m+1}$ posita y in primo infinitesimorum ordine, erit x in ordine $\overline{m+1}^{\,esimo}$; immo in æquatione $a^mx^n=y^{m+n}$ erit x in infinitesimorum ordine $\frac{m+n}{n}$. Contra si concipiatur x in primo ordine, y erit in ordine $\frac{n}{m+n}^{\,esimo}$. Adverte breviter, parabolam æquationis $a^my^n=x^{m+n}$, eamdem esse, ac superiorem cum hoc tantum discrimine, quod hujus ordinatæ abscissis illius sunt parallelæ, & vice versa.

8. Ad familiam hyperbolarum gradum facio, quæ continentur hac æquatione $x^my^n=a^{m+n}$, seu $y^n=\frac{a^{m+n}}{x^m}$. Generatim, existente y reali, si accipiatur x minima, y est infinita; & si sumatur x infinita, y evadit minima. Quare hyperbolæ rami omnes reales præditi sunt duobus assimptotis, quorum unum est ipsa abscissarum linea, alterum parallelum est ordinatis, & discedit ab ipso abscissarum initio. Conditio autem numerorum m, n, qui & pares, & impares esse possunt, determinat, utrum rami reales sint, an imaginarii, & ad quam plagam progrediantur; quam ob rem ita dispone æquationem $y=\sqrt[n]{\frac{a^{m+n}}{x^m}}$.

9. Si ambo exponentes m, n sint impares, ut contingit in hyperbola appolloniana, posita x positiva erit x^m positiva; ergo y est radix impar positivæ quantitatis, quæ unicum tantum habet valorem realem positivum. Itaque nascitur ramus BPN (*Fig.* 5), cujus ordinatæ, & abscissæ positivæ sunt. Si x sit negativa, x^m erit negativa, & y radix impar quantitatis negativæ, quæ unum valorem realem negativum habet; ergo alter ramus prodit MQA, cujus ordinatæ, & abscissæ sunt negativæ.

10. Si n sit impar, & m par, sumpta x vel positiva, vel negativa, erit x^m semper positiva; ergo y radix impar quantitatis positivæ, quæ unicum habet valorem realem positivum. Duobus itaque ramis constat curva BPN, AQN, (*Fig.* 6) quorum primus habet ordinatas & abscissas positivas, alter abscissas negativas, & ordinatas positivas.

11. Sit n par, m impar. Existente x positiva, x^m erit positiva; igitur y radix par quantitatis positivæ, quæ duobus valoribus gaudet positivo, & negativo. Itaque duo rami progredientur ad partem abscissæ positivæ nempe BPN, BQN (*Fig.* 7.) quorum uni conveniunt ordinatæ positivæ, alteri negativæ. Si x accipiatur negativa, x^m erit negativa; ergo y radix par quantitatis negativæ, quæ semper est imaginaria; nullus igitur ramus realis ad partem

tem

tem abſciſſarum negativarum. In omnibus hiſce caſibus, ſi æquatio fuiſſet $x^m y^n = -a^{m+n}$, eædem prodirent hyperbolæ, dummodo coordinatæ poſitivæ convertantur in negativas, & vice verſa.

12. Poſtremo par ſit uterque numerus m, n; ergo vel x poſitiva ſit, vel negativa, x^m ſemper eſt poſitiva, & y radix par quantitatis poſitivæ, quæ præbet duplicem valorem realem poſitivum, & negativum. Quatuor itaque ramis conſtat curva, qui in quatuor plagis ſunt conſtituti (*Fig.* 8.) Rami autem omnes æquationis $x^m y^n = -a^{m+n}$ ſunt imaginarii. Hic quoque adverte, hyperbolam hujus caſus, nihil aliud eſſe, quam duas aliorum caſuum hyperbolas ſimul junctas. Nam extrahe radicem quadratam, donec aliquis numerus impar prodeat, & ob ſignum $\pm$, duæ hyperbolæ ſeſe offerent.

13. Tametſi poſita x infinita, minima ubique evadat y; tamen non ſemper eſt in eodem infiniteſimorum ordine. In hyperbola appolloniana, cujus æquatio $xy = aa$, y erit in illo ordine infiniteſimorum, in quo ordine infinitorum eſt x, quem vocabimus primum; nam $x:a::a:y$. In hyperbola æquationis $x^2 y = a^3$, y erit in ſecundo ordine infiniteſimorum; nam $x^2 : a^2 :: a : y$; atqui x^2 eſt in ſecundo ordine infinitorum; ergo y in ſecundo infiniteſimorum. Generatim vero in æquatione $x^m y = a^{m+1}$, facta x infinita primi ordinis, y erit in infiniteſimorum ordine $m^{eſimo}$. Imo in generaliori æquatione $x^m y^n = a^{m+n}$, ſeu $x^{\frac{m}{n}} y = a^{\frac{m+n}{m}}$, y erit in ordine $\frac{m}{n}^{eſimo}$. Si $\frac{m}{n}$ ſit numerus fractus, ordo iſte mediat inter ordines duos, qui a numeris integris exprimuntur. Quod dictum eſt de ordine infiniteſimorum ordinatæ y, transferas velim ad ordinem infinitorum, quum x accipitur infinita exigua. Hæc autem diverſitas ordinum in quantitatibus infinite tum magnis, tum parvis, paullo poſt maximam afferre utilitatem cognoſces.

14. Addamus nonulla de curvis, quæ paraboloides vocari ſolent. In his ordinata y æquat functionem rationalem, & integram abſciſſæ x. Hujuſmodi eſt curva æquationis $a^2 y = x^3 + bx^2 - c^3$. Paraboloidum æquatio generalis ita ſe habet $a^{m-1} y = x^m + bx^{m-1} + acx^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-1}k$. Quoniam y ſemper habet valorem realem unicum, quicumque ſit valor abſciſſæ x ſive poſitivæ, ſive negativæ, conſtat, curvam nuſquam interruptam eſſe, ſed continuo progreſſu ad utramque partem in infinitum protendi. Si ponas x infinitam, vel poſitive accipias, vel negative, neglectis reliquis terminis, qui reſpectu x^m minimi ſunt, æquatio conſiſtit in terminis $y = \frac{x^m}{a^{m-1}}$.

15. Jam vero in eadem ſuppoſitione x infinitæ, ſi m ſit numerus impar, y erit poſitiva, ſi x ſit poſitiva; y erit negativa, ſi x ſit negativa. Curva autem continua, in qua ordinata y debet a poſitiva in negativam tranſire, neceſſario lineam abſciſſarum ſecabit. Secabit vero aut in uno, aut in tribus, aut

in

in quinque punctis ita, ut impar sit numerus intersectionum. Etenim curva continua non potest incipere ad plagam y positivæ, & desinere in plaga y negativæ, nisi lineam abscissarum secet tot vicibus, quarum numerus sit impar.

16. Si m par sit, x infinita vel positiva, vel negativa quum præbeat x^m semper positivam, præbebit item positivam y. Quare curva continua, in qua y respondens x vel positivæ vel negativæ infinitæ est positiva, aut nusquam secabit lineam abscissarum, aut secabit in duobus, aut in quatuor, aut in sex punctis ita, ut par sit numerus intersectionum. Veruntamen si in ultimo termino k negativa foret, ut mutato signo ultimus terminus sit $-a^{m-1}k$, facile probatur, bis saltem a curva lineam abscissarum secari. Etenim posita in æquatione $x=o$, fit $y=-k$, scilicet negativa; ergo y primum est positiva, tum negativa, demum iterum positiva; quod in curva continua accidere non potest, nisi saltem bis in lineam abscissarum incurrat.

17. Ex his maximi momenti consectaria deducuntur. Omnis æquatio gradus imparis prædita est, saltem una radice reali, & si plures habet, earum numerus est impar. Namque ponatur æquatio $=y$, tum intelligatur descripta curva huic æquationi respondens, cujus abscissæ sint A B (*Fig.* 9). Perspicuum est radices reales æquationis determinatæ esse abscissas respondentes ordinatis $y=o$; atqui ibi $y=o$, ubi curva intersecat lineam abscissarum; ergo abscissæ desinentes in puncta intersectionum sunt æquationis radices; atqui, ut probatum est, unum semper existit punctum intersectionis, & si plura existant, sunt numero imparia; igitur æquatio determinata gradus imparis una semper ornata est radice reali, & si pluribus ornata sit, earum numerus impar sit necesse est. Si intersectio caderet in abscissarum initio, una radix realis $=o$. Hinc colligas velim, radices imaginarias esse numero pares. Nam si ex numero impari omnium radicum deducas numerum imparem radicum realium, reliquus est radicum imaginariarum numerus par.

18. Æquationes gradus paris aut nullam habent radicem realem, aut habent plures numero pares; quia posita æquatione $=y$, (*Fig.* 10) curva aut nusquam secat lineam abscissarum, aut secat in punctis numero paribus. Verum si ultimus æquationis terminus sit negativus, quum curva secet abscissarum lineam saltem in duobus punctis, æquatio determinata prædita erit saltem duabus radicibus realibus. Numerus radicum imaginariarum etiam in his debet esse par. In nulla æquatione itaque imaginariis carente contingere potest, ut imaginariæ radices sint numero impares.

CAPUT SEPTIMUM.

De curvis excedentibus gradum secundum, quæ per instrumenta delineantur.

Si de instrumentis, curvisque per ea descriptis pro dignitate agere vellem, non breve caput, sed longissimum volumen ut scriberem, oporteret. Quapropter specimen aliquod dumtaxar præbebo solutis nonnullis problematibus, quæ majori utilitate, atque elegantia prædita esse mihi videntur.

1. Pro-

Fig. 2.

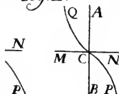


Fig. 3.

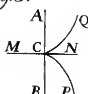


Fig. 5.

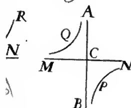


Fig. 6.

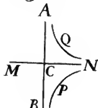


Fig. 8.

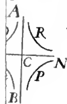


Fig. 9.

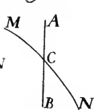
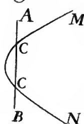


Fig. 10.



1. Problema primum. Anguli ABC (*Fig.* 1.) crura inaequalia libere moveri possint circa verticem B. Punctum A extremum cruris AB ita firmetur in A, ut circa ipsum libere converti possit; punctum C extremum cruris alterius moveri possit in data linea AO transeunte per punctum A. Producatur BC in M, donec CM = BC; quæritur curva, quam descripturum est punctum M incedente C per rectam AO. Ex punctis B, M demittantur in AO normales BF, NO. Quoniam triangula BCF, MCO similia sunt, & BC = CM, erit CF = CO, FB = OM. Quare vocatis $AB = a$, $BC = CM = b$, $AO = x$, $MO = BF = y$, erit $CO = CF = \sqrt{bb - yy}$, & $FO = 2\sqrt{bb - yy}$; demum $AF = \sqrt{aa - yy}$; ergo resultat æquatio $x = \sqrt{aa - yy} + 2\sqrt{bb - yy}$. Quæ ablatis, ut par est, radicibus, & opportune ordinata in æquationem hanc quarti gradus convertitur.

$$
\left.
\begin{array}{ll}
yy^4 + 10x^2y^2 & + x^4 \\
+ 6a^2y^2 & - 2a^2x^2 \\
- 24b^2y^2 & - 8b^2x^2 \\
 & + a^4 \\
 & - 8a^2b^2 \\
 & + 16b^4
\end{array}
\right| = 0
$$

2. Curva hujus æquationis quem habeat progressum, & figuram ex instrumento, per quod delineatur, determinemus. Tres casus distinguendi sunt, vel enim $BC = b$ est major $AB = a$, vel æquaiis, vel minor. In primo casu, in quo BC est major AB (*Fig.* 2), distendatur ABCM in lineam rectam, ut punctum M cadat in S, C in H, B in D. Elevetur angulus B remanente C in recta ES. In hoc motu punctum B per arcum circularem semper elevatur, donec AB fiat perpendicularis AS, & veniat in locum AG; deinde punctum B deprimitur, donec AB cadat super AE, & punctum M veniat in T existente $ET = BM = 2b$; ergo $TS = 2a$, $AT = 2b - a$. Ramus similis ramo SMT habetur ad alteram partem lineæ TS. Demum converso instrumento curva similis ad aliam partem puncti A delineatur. Hic generatim distingue tres casus $b > 2a$, $b = 2a$, $b < 2a$. In primo casu curva TMS (*Fig.* 3.) ubique concava provenit axi TS (*Fig.* 4). Hoc idem accidit in casu secundo, in quo tamen ob nescio quam moram, quæ observatur in instrumento, ubi punctum describens accedit ad T, jure bono suspicar aliquid singulare in eo puncto inesse. In ultimo casu curva procedit a T versus A (*Fig.* 2), & concavitatem obvertit A, convexitatem S; tum post flexum contrarium ordinatim procedit, ut in casibus aliis.

3. Si fuerit $b = a$, demonstratum est in libro superiore a puncto M (*F.* 5) describi ellypsim conicam, cujus centrum A, semiaxis primus $AS = 3a$, secundus $AI = a$. Sed dum punctum D ascendens per arcuum circularem DG pervenit ad S, punctum C remanens in linea AS invenitur in A, & S in I: ergo ubi hanc positionem nactum fuerit instrumentum, ita moveri potest, ut punctum C non discedat ab A, quo in motu punctum I describet circulum radii A, quare curva descripta quarti gradus coalescet ex duabus secundi nimirum circulo, & ellypsi. Reapse si æquationem

x^2
y

$$\begin{array}{lll} y^4 + 10 x^2 y^2 & + & x^4 \\ - 18 a^2 y^2 & - 10 a^2 x^2 & = 0, \\ + 9 a^4 & & \end{array}$$ in quam mutatur æquatio superior, si fiat $b = a$, dividas per $yy + xx - aa = 0$, quæ est æquatio circuli, provenit $y^2 + x^2 - 9aa = 0$, quæ est ad ellypsim.

4. Reliquum est, ut inspiciamus, quam figuram habeat curva, si sit $b < a$. (*Fig.* 6) Si lineæ omnes distendantur in rectam, ut sit $AD = a$, $DH = HS = b$. elevetur punctum D per arcum circularem DG, remanente puncto H in linea A, punctum S describet arcum SL, donec DH fiat perpendicularis AS, & veniat in locum GK, puncto S translato in L. Tum si K feratur versus A radius AG descendet, & punctum G per eundem arcum GD p rcurret, donec G veniat in D, & L in T, existente $TD = 2b$ & $TA = 2b - a$. Hoc modo describetur curva SLT, quæ conjuncta cum simili TGS exhibet ovalem. Converso instrumento secunda ovalis similis producitur. Si $2b > a$, duæ ovales se intersecant, ut in figura. Si $2b = a$, ovales duæ sese contingunt in A; si $2b < a$, ovales separat : sunt, & inter sese distant per lineam $= 2a - 4b$.

5. Usum instrumenti per solutionem superioris problematis delibavi potius, quam expolui. Nam accipi potest CM (*Fig.* 1.) cujuscumque magnitudinis, vel positiva, vel negativa, quo in casu describitur curva quarti gradus, excepto casu, in quo M coincidit cum B, & in quo describitur circulus. Potest punctum describens constitui extra lineam BC. Præterea linea FO, in qua itineratur punctum C, potest non transire per punctum A, circa quod convertitur in girum AB. Demum hæc eadem linea FO potest esse quæcunque curva. Quapropter infinitæ curvæ hoc instrumento delineabuntur, quæ tamen intra finitum spatium claudentur, neque ullum habebunt ramum infinitum. Harum naturam ex principiis traditis, & tradendis poterit investigare industrius geometra.

6. Problema secundum. Dato extra datam VT (*Fig.* 7) puncto A, ex quo ducatur AB datæ normalis, & producatur in D. Moveatur ita linea ABD ita ut transeat semper per punctum A, & punctum B remaneat in VT, quæritur, quam curvam descripturum sit punctum D. Ponamus AD pervenisse in locum ARN existente $RN = BD$, ex puncto N, quod est in curva, demittatur MN normalis in BD. Vocetur $AB = a$, $BD = b = RN$, $AM = x$, $MN = y$, erit $AN = \sqrt{xx + yy}$, & $MB = x - a$; atqui $AN : AM :: RN : MB$; ergo $\sqrt{xx + yy} : x :: b : x - a$, & quadrando $xx + yy : xx :: bb : xx - 2ax + aa$, & dividendo $yy : xx :: bb - xx + 2ax - aa : xx - 2ax + aa$; ergo

$$\begin{array}{ll} x^2 y^2 & + x^4 \\ - 2axy^2 & - 2ax^3 = 0. \\ + aayy & + aaxx \\ & - bbxx \end{array}$$

Hæc autem æquatio non solum includit curvam DN descriptam a puncto D, sed etiam secta $BE = BD$ curvam descriptam a puncto E. Curva hæc a Nicomede instrumenti inventore nomen accepit, & conchois nicomedea apellatur. Partem DN descriptam a puncto D, conchoidem ulteriorem vocabo, quæ autem describitur a puncto E posito ad partes puncti A, citeriorem vocabo.

7. Ul-

7. Ulterior in omni hypothesi eamdem figuram habet; nempe ad utramque partem lineæ A D, discedens a puncto D accedit ad V T, cui primum obvolvit concavum, tum facto contrario flexu eidem obvertit convexum, eique ultra quemcumque limitem appropinquat, quin ad contactum veniat. Quare V T ad utramque partem est assymptotum curvæ. Citerior habet pro assymptoto eamdem V T. Sed si $b < a$, & E jaceat inter A, B, eodem ferme pacto, quo ulterior obvertit concavum in convexum. Si vero $b = a$, & puncta A, E (*Fig.* 8) coincidunt, rami tangunt A B in A, & semper obvertentes convexum accedunt ad assymptotum. Demum si $b > a$, & punctum E cadat post puncta B, A, (*Fig.* 9) ramus unus est E Q A T, alter E 2 Q A V; ita efformatur folium A Q E 2 Q, quæ in hac hypothesi prædita est conchois citerior.

8. Si in usum traducamus figuras rectilineas ordinatas, folium hoc conchoidis citerioris efformat flores non inelegantes pluribus foliis instructos. Sit primo triangulum æquilaterum A B C (*Fig.* 10), cujus punctum medium sit I. Jungatur I A, quæ ita moveatur, ut A semper sit in A B, & transeat per punctum I. Dum sit motus ab A in B, unum folium describetur; describetur alterum æquale, si punctum A moveatur in B C; tertium, si in C A. Orietur itaque flos trium foliorum æqualium. Sit A B C D (*Fig.* 11) quadratum; Si linea I B eodem modo moveatur per quatuor latera, exurget flos quatuor foliorum; in pentagono inveniemus florem quinque, in exagono sex foliorum, et ita deinceps. Sed hæc breviter attigisse sufficiat.

9. Quisque videt, instrumentum ad usum traduci posse, tametsi linea V T, (*Fig.* 7) in qua itineratur punctum B non fuerit recta, sed curva. Casum maxime simplicem evolvamus, quum V T est circumferentia circuli, in qua situm est punctum A, quod polum vocabimus. Linea A B D (*Fig.* 12) ita moveatur, ut semper transeat per punctum A, & punctum B non recedat a circuli periferia B R A. Quæritur descripta a puncto D. Linea describens, quæ in prima positione transeat per centrum circuli, veniat in situm A R N. Normales A D sint N M, B L, prima ducta a puncto N, altera a puncto B. Vocetur $AM = x$, $MN = y$, $AB = 2a$, $BD = RN = b$. Erit $x : y :: 2a : BL = \frac{2ay}{x}$. Item $x : \sqrt{xx+yy} :: 2a : AL = \frac{2a.\sqrt{xx+yy}}{x}$; ergo $LN = \sqrt{xx+yy} - \frac{2a}{x}$. $\sqrt{xx+yy} = \frac{\overline{x-2a}.\sqrt{xx+yy}}{x}$, & $LR = b + \frac{2a-x}{x}\sqrt{xx+yy}$; atqui ex natura circuli $AL . LR = BL^2$; ergo

$$\frac{2a\sqrt{xx+yy}}{x} . \frac{bx + \overline{2a-x}.\sqrt{xx+yy}}{x} = \frac{4a^2y^2}{xx}, \&$$

$2abx.\sqrt{xx+yy} + \overline{2a-x}.2a.\overline{xx+yy} = 4a^2y^2$, demum $xx + yy - 2ax = b\sqrt{xx+yy}$, quæ æquatio elevata ad quadratum, & opportune ordinata fiet

$$\left.\begin{array}{l} y^4+2x^2y^2+x^4 \\ \quad -4axy^2-4ax^3 \\ \quad -b^2y^2\quad -b^2x^2 \\ \qquad\qquad +4a^2x^2 \end{array}\right\} = o.$$

10. Curva hujus æquationis, quæ per instrumentum describitur, variam sortitur figuram pro diversa datarum $2a$, b proportione. Si sit $b < 2a$, curvam exprimit figura 12. Nimirum curva DN secat circulum in A, in quem ingreditur, & facto folio egreditur a circulo, & redit per aliam partem in D. Si $b = 2a$, folium evanescit, & incipit cuspis, quæ semper existit, donec sit $b < 4a$, ut apparet in fig. 13. Si $b = 4a$, cuspis desinit, neque habetur amplius posito $b > 4a$, & nascitur curva continuata, quæ habetur in fig. 14.

11. Problema tertium. Si circa datam AC (*Fig.* 15) volvatur norma ABC, ita ut latera normæ transeant per data puncta A, C, quæritur curva, quam descripturum est punctum M acceptum in normæ latere AB vel producto, vel secus. Ex puncto M in AC ducatur normalis MN, divisaque bifariam AC in S, vocetur $SN = x$, $MN = y$, $BM = c$, $AS = SC = a$, erit $AN = a+x$, $AM = \sqrt{\overline{a+x}^2+y^2}$. Triangula similia ANM, CAB præbent MA : AN :: CA : AB, scilicet

$\sqrt{\overline{a+x}^2+yy} : a+x :: 2a : AB = \dfrac{2a^2+2ax}{\sqrt{\overline{a+x}^2+yy}}$. Quare æquatio fiet

$\sqrt{\overline{a+x}^2+yy} - c = \dfrac{2a^2+2ax}{\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2}}$ sive

$\overline{a+x}^2+y^2-c\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2} = 2a^2+2ax$, sive elevando ad quadratum post factam terminorum translationem $c^2 \cdot \overline{a^2+2ax+xx+yy} = \overline{a^2-x^2-y^2}^{\,2}$, sive

$$\left.\begin{array}{l} y^4+2x^2y^2+x^4 \\ \quad -2a^2y^2\quad -2a^2x^2 \\ \quad -c^2y^2\quad -c^2x^2 \\ \qquad -2ac^2x \\ \qquad +a^4 \\ \qquad -a^2c^2 \end{array}\right\} = o.$$

Si fieret $c = o$, formula esset quadratum completum, cujus radix proveniret $yy+xx-aa = o$, quæ est æquatio ad circulum. Si M situm esset inter puncta A, B, c accipienda esset negativa, quæ hypothesis nihil æquationem mutat.

12. Ut curva omnis delineetur, debent successive rotari quatuor anguli ABC, ABF, FBT, TBC. Curvæ figura diversa est pro varietate proportio-

tionis datarum $AC = 2a$, $BM = c$. Si $c < 2a$, curva instruitur folio, ut exprimit figura 16; Si $c = 2a$, folium evanescit, & incipit cuspis, quæ conservatur donec $c = 4a$ ut in fig. 17. Si $c = 4a$, cuspis evanescit, neque amplius apparet, ut in fig. 18, quum $c > 4a$. Hoc omittendum non judico, quod si in æquatione ponatur $x = -a$, invenitur $y = o$. Quare videtur punctum A ad curvam pertinere, tametsi in duabus ultimis figuris per illud curvam transire non appareat. Quare in his casibus punctum A est punctum solitarium, & conjugatum, quod licet ab instrumento non exhibeatur, tamen æquationi satisfacit.

13. Hæc omnia locum habent, si angulus ABC rectus fuerit. Curva, quæ describitur angulo non recto, æquationem aliquanto habet complicatiorem. Hanc inveniamus. Ex puncto C (*Fig.* 19) demittatur CF normalis in AB; ratio BF:FC, quæ constans est, vocetur $g:2a$, reliquæ denominationes serventur ut antea. Habebimus

$$AF = \frac{2aa + 2ax}{\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy}},\quad BF = \sqrt{\overline{a+x}^2 + yy} - \frac{2aa - 2ax}{\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy}} - c, \ \&$$

$$CF = \sqrt{4aa - \frac{\overline{(2aa + 2ax}^2}{\overline{a+x}^2 + yy}} \text{; igitur erit}$$

$$\sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2} - c - \frac{2aa - 2ax}{\sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2}} : \sqrt{4aa - \frac{\overline{(2aa + 2ax}^2}{\overline{a+x}^2 + y^2}} :: g : 2a$$

factaque multiplicatione per $\sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2}$ fiet

$$x^2 + y^2 - a^2 - c\sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2} : 2ay :: g : 2a, \text{ sive}$$

$$x^2 + y^2 - a^2 - gy = c\sqrt{\overline{a+x}^2 + yy},$$ quæ elevata ad quadratum, & ordinata præbet

$$\begin{array}{llll} y^4 - 2gy^3 & + 2x^2y^2 & - 2gx^2y & + x^4 \\ & - 2a^2y^2 & + 2a^2gy & - 2a^2x^2 \\ & + g^2y^2 & & - c^2x^2 \\ & - c^2y^2 & & - 2ac^2x \\ & & & + a^4 \\ & & & - c^2a^2 \end{array} = o,$$ quæ pariter est æquatio quarti gradus.

14. Problema quartum. Invenire æquatiouem curvæ descriptæ a puncto M (*Fig.* 20) posito in circumferentia circuli BM rotantis supra æqnalem circulum BA immobilem. Punctum describens M initio motus sit in A, ducatur radius CA, qui producatur prout opus fuerit. Rotetur circulus, & veniat in positionem BM. Patet arcum $BA = BM$. Junge centra circulorum recta CK, quæ tran-

tranſibit per contactum B. Duc radium KM, qui productus concurrat cum CA in D. Quoniam BA, BM ſunt arcus æquales circulorum æqualium, æquales erunt anguli BCA, BKM; ergo triangulum CDK iſoſceles, & CD = DK, & proinde AD = MD; ergo linea AM parallela CK. Præterea juncta DB dividet bifariam omnes parallelas CK, adeoque etiam AM in E, eidemque erit perpendicularis. Duc MN perpendicularem in CD. Voca radios circulorum $= r$, $CN = x$, $AN = x - r$, $MN = y$, $AM = \sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$, &

$AE = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$. Propter triangula ſimilia erit $CB : AE :: CD : AD$, ſive $CB : CB - AE :: CD : CA$ ſive $r : r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy} :: CD : r$: ergo

$$CD = \frac{rr}{r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}}.$$

Denique quum ſimilia ſint triangula AMN, ADE, vel CDB fiet $CD : CB :: AM : AN$; vel analytice

$$\frac{rr}{r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}} : r :: \sqrt{\overline{x-r}^2 + y^2} : x - r, \text{ ſeu}$$

$$r : r - \frac{1}{2}\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy} :: \sqrt{\overline{x-r}^2 + yy} : x - r; \text{ ergo}$$

$$rx - rr = r\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}\ \frac{-xx + 2rx - rr - yy}{2}, \text{ vel}$$

$$\frac{xx + yy - rr}{2} = r\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}, \text{ \& quadrando}$$

$$\frac{\overline{xx + yy - rr}^2}{4} = rr.\overline{x-r}^2 + rry^2,$$

quæ opportune ordinata in hanc mutatur

$$\left.\begin{aligned} y^4 + 2x^2y^2 &+ x^4 \\ -6r^2y^2 &- 6r^2x^2 \\ &+ 8r^3x \\ &- 3r^4 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Curvæ, quæ oriuntur ex rotatione circuli ſupra circulum dicuntur epicycloides. Ea autem, cujus æquationem invenimus, eſt epicycloidum ſimpliciſſima quæ coincidit cum curva num. 9, dummodo $b = 2a = 2r$, quod cognoſces, ſi in hac pro x ſcribas $a - x$.

15. Methodus hæc elegans aptari nequit, ſi circuli duo diverſa diametro præditi ſint. Etenim fundatur in eo, quod arcus BA, BM ſint æquales & ſimiles. At ſi circulus rotans habeat diverſam diametrum, arcus BA, BM (Fig. 21) ſunt quidem æquales ſed non ſimiles. Oſtendendum eſt, qua methodo aliarum quoque epicycloidum inveniri poſſit æquatio. Junctis centris C, K, agatur KM. Quoniam æquales ſunt arcus BA, BM, anguli ACB, BKM erunt in ratione inverſa radiorum. Itaque ſi radius $CB = R$, $KB = r$, angulus $ACB : BKM :: r : R$: ſi hæc proportio radiorum ſit effabilis, curva erit ſem-

ſemper algebraica; ſed ſi ſit irrationalis, erit tranſcendens. Fiat $R : r :: m : n$ exiſtentibus numeris m, n integris. Sit angulus $ACB = n\mu$, $BKM = m\mu$. Agantur in CK normales AD, ME, ſumptoque pro ſinu toto $AC = R$, erit $AD = Sc.n\mu$, $CD = Cc.n\mu$; item $ME = \frac{r}{R}.Sc.m\mu$, $KE = \frac{r}{R}.Cc.m\mu$. In quadrilatero CNME anguli in E, N recti ſunt; ergo reliqui duo NCE, NME complent duos rectos; ergo producta NM, donec concurrat cum CK in F, angulus ACD erit æqualis EMF, & triangulum ACD erit ſimile FME; ergo $CD : AC :: ME : MF$; ſive analytice

$Cc.n\mu : R :: \frac{r}{R}.Sc.m\mu : MF = \frac{r.Sc.m\mu}{Cc.n\mu}$. Præterea $CD : DA :: ME : EF$; ſive in ſpeciebus $Cc.n\mu : Sc.n\mu :: \frac{r}{R}.Sc.m\mu : EF = \frac{r.Sc.n\mu.Sc.m\mu}{R.Cc.n\mu}$; igitur $KF = \frac{r.Sc.n\mu.Sc.m\mu}{R.Cc.n\mu} - \frac{r}{R}.Cc.m\mu = \frac{r}{R}.\frac{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}{Cc.n\mu}$; igitur $CF = R + r + \frac{r}{R}.\frac{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}{Cc.n\mu}$. His determinatis eſt $CN : NF :: CD : DA$, ſeu $x : y + \frac{r.Sc.m\mu}{Cc.n\mu} :: Cc.n\mu : Sc.n\mu$, ex qua provenit prima æquatio I $x.Sc.n\mu - y.Cc.n\mu = r.Sc.m\mu$. Præterea $CD : CA :: CN : CF$, vel $Cc.n\mu . R :: x : R + r + \frac{r}{R}.\frac{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}{Cc.n\mu}$, ex qua ſecunda æquatio II $Rx = \overline{R+r}.Cc.n\mu + \frac{r}{R}.\overline{Sc.n\mu.Sc.m\mu - Cc.n\mu.Cc.m\mu}$. Si opeunius ejicias functiones angulorum $n\mu$, $m\mu$ ab altera, invenies epicycloidis æquationem datam per coordinatas x, y.

16. Supponamus primum $R = r$ & $m = n = 1$, ut inveniamus æquationem ſimpliciſſimæ epicycloidis, de qua antea mentionem fecimus. Ex prima æquatione fiet $\overline{x-r}.Sc.\mu = y.Cc.\mu$, ex qua deſcendit $Cc.\mu = \frac{r.\overline{x-r}}{\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}}$,

$Sc.\mu = \frac{ry}{\sqrt{\overline{x-r}^2 + y^2}}$. Hi valores ſubſtituantur in ſecunda æquatione, ut naſcatur $rx = \frac{2rr.\overline{x-r}}{\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}} + \frac{r^2y^2 - r^2.\overline{x-r}^2}{\overline{x-r}^2 + y^2}$, ſive

$\overline{rx+rr}.\overline{x-r}^2 + \overline{rx-rr}.y^2 = 2rr.\overline{x-r}.\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$, factaque diviſione per $r.\overline{x-r}$, proveniet $xx - rr + yy = 2r\sqrt{\overline{x-r}^2 + yy}$, ad quam æquationem paullo ante diverſa methodo devenimus.

17. Si

17. Si pro cosinu, & sinu $m\mu$ valores substituas datos per μ, nimirum

$$\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\,m}+\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\,m}}{2R^{m-1}}$$ pro $Cc.m\mu$, &

$$\frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\,m}-(\overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\,m}}{2R^{m-1}\sqrt{-1}}$$ pro $Sc.m\mu$, & binomia actu eleves ad potestatem integram m, ut abeant imaginaria, idemque facias quoad arcum $n\mu$, duas æquationes invenies, per quas poterit æquatio localis determinari. Sed hæc non vacat fusius persequi.

18. Problema quintum. Lineæ LAS (*Fig.* 22) insistenti super data BC ad angulos rectos, & transeunti per punctum A. alligatum sit filum SBF æquale datæ BC, quod plicatum in B distendatur juxta BC a stilo F; tum servatis his conditionibus moveatur BC intra angulum rectum GAH, quæritur curva a stilo F descripta. Ex puncto F agantur FN, FM normales lateribus anguli recti. Vocetur $AN=x$, $FN=y$, $BC=a$. Ob æqualitatem SBF, & rectæ BC fiet $BS=FC$; ergo quum sit $CB:BA::BA:BS$; erit $CB:BA::BA:FC$; atqui $CB:BA::FC:FN$: ergo CB, BA, FC, FN sunt in continua proportione geometrica; ergo $CB:FN::CB^3:BA^3$; ergo $a:y::a^3:BA^3=a^2y$; ergo $BA=a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$. Simili modo ostendam $CA=a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$. Hinc habetur æquatio $a^2=a^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, sive $a^{\frac{2}{3}}=y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$, & elevando ad potestatem tertiam $a^2=y^2+3y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}.y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}+x^2$, sive substituto $a^{\frac{2}{3}}$ pro $y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$, translatisque terminis $a^2-x^2-y^2=3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. Quæ æquatio, si elevetur ad potestatem cubicam, & opportune ordinetur, fiet

$$\begin{array}{l} y^6+3x^2y^4+3x^4y^2+x^6 \\ \quad -3a^2y^4+21a^2x^2y^2-3a^2x^4 \\ \quad\quad +3a^4y^2+3a^4x^2 \\ \quad\quad\quad -a^6 \end{array} =0,$$ quæ est curva sexti gradus.

$\overline{\qquad}^{\,3}$

Si fiat $x=0$ provenit $y^2-a^2=0$; ergo $y=\pm a$. Itaque secta $AG=a$, curva transibit per G. Similiter ostendam facta $AH=a$, curvam transire per H. Suo loco ostendetur, curvam in puncto F tangi a linea BC, et in punctis G, H a lineis AG, AH. Ut curva integra generetur, motus faciendus est non solum in angulo GAH, sed etiam in tribus aliis angulis, KAH, KAI, IAG.

19. Problema sextum. Linea LAN transiens per punctum A (*Fig.* 23) insistat ad angulos rectos supra BC, quæ moveatur intra angulum rectum BAC, quæ-

quæritur curva a puncto N descripta. Agatur NM normalis in AM, & vocetur $AM = x$, $MN = y$, $AN = \sqrt{xx+yy}$, & $BC = 2a$. Similitudo triangulorum dat

$AM : MN :: AN : NB$

$x : y :: \sqrt{x^2+y^2} : NB = \frac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2};$

$NM : AM :: AN : NC$

$y : x :: \sqrt{x^2+y^2} : NC = \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2};$

ergo æquatio provenit $\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\sqrt{x^2+y^2} = 2a$, sive $\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}} = 2axy$, quæ elevata ad secundam potestatem, & opportune ordinata fit

$$y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6 - 4a^2x^2y^2 = 0,$$ quæ est æquatio sexti gradus. Ut curva integra obtineatur, oportet, quemadmodum in superiore, motum fieri in quatuor angulis rectis. Constat autem quatuor foliis æqualibus, quæ quatuor anguli continent.

20. Problema septimum. In datæ lineæ rectæ AB (*Fig.* 24) puncto A applicetur norma NAM, quæ libere circa punctum A rotari possit, eidem rectæ AB normalis linea MN moveri possit motu parallelo. Describente concursu linearum AM, MN datam lineam LM, quæritur quamnam curvam descripturum sit punctum N, in quo concurrunt lineæ AN, NM. Vocetur $AP = x$, $PM = z$, $PN = y$. Quoniam angulus est rectus; erit $z : x :: x : y$; ergo $z = \frac{x^2}{y}$, in qua æquatione si ponas pro z ejus valorem datum per x ex natura datæ curvæ LM, invenies æquationem quæsitam. Si LM sit linea recta non transiens per punctum A, vidimus libro superiore sectionem conicam generari; immo si fuerit parallela AB, curva genita erit parabola, quam hac ratione delineavimus. Sit LM curva hujus æquationis $a^{m-n}x^n = z^m$; ergo æquatio curvæ genitæ erit $a^{m-n}x^n = \frac{x^{2m}}{y^m}$, seu $y^m = \frac{x^{2m-n}}{a^{m-n}}$, ex qua æquatione, quæ curva gignatur, apparet. Verum diligentius inspiciamus curvam AN, quæ oritur, si LM sit circumferentia circuli transiens per punctum A, cujus centrum C positum sit in recta AB. Vocata circuli diametro $= 2a$, erit $z = \sqrt{2ax - xx} = \frac{x^2}{y}$; ergo $2ay^2 - xy^2 = x^3$. Hæc eadem æquatio provenit, si proponatur hoc problema. Descripto super AB semicirculo, excitataque BEO normali diametro, quæritur curva, in qua ducta qualibet AE, quæ curvam secet in N, circulum in D, sit semper $NE = AD$. Hæc autem curva Cissois Dioclis nuncupatur. Sed ex nostra constructione proprietatem, per quam Diocles curvam determinavit, demonstremus. Perficiatur circulus ABM, qui secet AN in D. Ex B erigatur normalis diametro AB, cum qua concurrat AM producta in E. Ajo $EN = AD$.

Jun-

Jungo DM. Quum angulus DAM sit rectus, DAM erit semicircumferentia; Ergo DM transibit per centrum, & erit diameter; igitur BM jungens puncta M, B erit æqualis, & parallela AD; ergo ENMB est parallelogrammum, & EN æqualis BM; igitur AD = EN. Q. E. D.

21. Problema octavum. Data chorda MN (F. 25) moveatur in circulo, ut ejus puncta extrema semper maneant in circumferentia, in eam ex puncto posito in circumferentia cadat normalis AS; quæritur, quam curvam descriturus sit concursus perpendicularis, & chordæ. Ex A ducatur diameter, cum qua concurrat MN producta in L. Ex centro C duc normalem in MN, quam dividet bifariam, & ducatur SX normalis diametro. Vocetur radius CA $= a$, chorda data MN $= 2b$, AX $= x$, XS $= y$, erit CO $= \sqrt{aa-bb}$; & AS $= \sqrt{xx+yy}$. Ob angulum rectum ASL erit AX : XS :: XS : XL, seu $x : y :: y :$ XL $= \frac{y^2}{x}$, & AL $= x + \frac{y^2}{x} = \frac{x^2+y^2}{x}$, & CL $= \frac{x^2+y^2}{x} - a$; atqui est AL : CL :: AS : CO; ergo

$$\frac{x^2+y^2}{x} : \frac{x^2+y^2}{x} - a :: \sqrt{x^2+y^2} : \sqrt{a^2-b^2}$$ sive

$\sqrt{x^2+y^2} . \sqrt{a^2-b^2} = xx + yy - ax$, quæ elevata ad quadratum, atque ordinata est hujusmodi

$$\begin{array}{l} y^4 + 2x^2y^2 + x^4 \\ \quad - 2axy^2 - 2ax^3 \\ \quad - a^2y^2 + b^2x^2 \\ \quad + b^2y^2 \end{array} = o.$$ Hæc curva quarti gradus apparet instructa folio, quod intra reliquam curvam continetur, ut figura repræsentat. Si $b = o$, ut corda mutetur in tangentem, evanescit folium, & curva habet cuspidem in A. Si $b = a$, . corda fit æqualis diametro, generatur circulus, cujus diameter est AC. Quod indicat æquatio, quæ fit quadratum completum, cujus radix $y^2 + x^2 - ax = o$, quæ est æquatio circuli.

22. Problema nonum. Normæ ABE (*Fig. 26*) applicetur regula AE mobilis circa punctum A; tum alia regula MX ita constituatur, ut dum movetur, semper normalis remaneat rectæ AE. Fili, cujus longitudo æquat datam AB, extermitas una alligetur normæ in A, alia regulæ MX in puncto extremo X. Fiat motus ita, ut filum distendatur juxta rectas AB, MX, quæritur curva a puncto M descripta. Quoniam filum AXM = AB, ablato communi AX fiet MX = XB; ergo ob angulos rectos XME, XBE erit ME = BE. Rectæ AB normalis ducatur MP. Sit AP $= x$, PM $= y$, AB $= a$, erit BP $= a - x$, & AM $= \sqrt{xx+yy}$. Jam vero est AP : PM :: AB : BE, seu $x : y :: a :$ BE $= \frac{ay}{x} =$ EM; sed AP : PB :: AM : ME; ergo $x : a - x :: \sqrt{xx+yy} : \frac{ay}{x}$; igitur $ay = \overline{a-x} . \sqrt{xx+yy}$, qua quadrata, & opportune reducta invenimus

e 2

$\frac{a^2 x - 2ax^2 + x^3}{2a - x} = y^2$, quæ est æquatio tertii gradus.

23 Ab instrumento non describitur nisi curvæ pars AMB simul cum æquali posita ad alteram partem lineæ AB. Sed secta BD = AB, æquatio satis demonstrat, ordinatam esse realem, donec abscissa x sit minor AD = $2a$; ergo ad utramque partem curva protendetur ultra punctum B, immo erit asymptotica lineæ DQ, quæ ducitur normalis AD. Ut descripta parte AMB partis B2M constructionem suppleamus, sumatur filum, cujus longitudo = AD = 2AB, extremitas una alligetur in P regulæ PM, altera in 2P regulæ 2P2M; filum autem transeat per punctum A. Distento filo moveatur regula 2P2M versus D, & per filum trahat regulam PM versus A; hæ autem regulæ semper insistant normaliter rectæ AD. Dum hic motus peragitur convertatur regula AM2M circa A, ut transeat per M, in quo ordinata MP secat curvam AMB. Hoc motu punctum intersectionis rectarum AE2M, 2P2M describet partem curvæ B2M. Nam quum filum sit duplum AB, & filum circumvolutum AP sit duplum AP, erit P2P dupla PB, ergo PB = B2P. Ergo EM = E2M, sed EM = BE; ergo E2M = BE, quæ est proprietas curvæ quæsitæ.

CAPUT OCTAVUM.

De curvarum ramis in infinitum excurrentibus & de asymptotis.

1. IN superiore libro plura verba feci de proprietatibus linearum secundi ordinis, nunc methodos aperiam, quibus linearum superiorum ordinum proprietates deteguntur. Primum de ramis in infinitum excurrentibus, & de eorum asymptotis agam, quia ex eorum numero, & proprietate diversa genera curvarum potissimum distinguuntur. Si linea curva quæcumque ramum habeat in infinitum excurrentem, ducta ex puncto infinite dissito ordinata normali, notissimum est, aut abscissam, aut ordinatam, aut ambas infinitas esse. Quapropter si curva habeat ramum infinitum, vel abscissæ finitæ respondebit ordinata infinita realis, vel abscissæ infinite magnæ ordinata realis vel finita, vel infinita. Ex hac animadversione ramorum in infinitum excurrentium plenissima descendit investigatio. Æquationem propositam in plura membra distribuo nempe P, Q, R, S &c. Primum membrum P terminos omnes continet, in quibus summa exponentium coordinatarum x, y est omnium maxima, quam voco = n. Secundum Q continet terminos, in quibus eadem summa = $n - 1$. Qui vero habent exponentium summam = $n - 2$, $n - 3$ &c. componunt membra R, S &c.

2. Spectandum est præcipue primum membrum P. Si hoc nullum habeat factorem simplicem realem, sed omnes imaginarios, quod solum evenire potest existente n numero pari, curva caret ramis infinitis, atque omnis intra spatium finitum continetur. Etenim advertendum est, in supremo membro P terminos x^n, y^n deesse non posse, quia secus P esset divisibile per y, aut per x, atque adeo factores omnes non essent imaginarii, quod est contra hypothesim. Ve-

rum si curva haberet ramum infinitum, aut utraque, aut alterutra ex coordinatis x, y infinita esset; ergo P æquaret infinitum elatum ad potestatem n, hoc est ∞^n; atqui sequentia membra Q, R &c. ad summum æquant ∞^{n-1}, ∞^{n-2} &c., atque adeo respectu primi evanescunt; ergo æquatio fit $P = o$; atqui quum in P nullus sit factor realis, nulla est hujus æquationis radix realis; igitur nulla est ordinata infinita realis, neque ulli abscissæ reali infinitæ respondet ordinata realis aut infinita, aut finita; ergo curva nequit excurrere in infinitum. Hinc vidimus in libro secundo curvam æquationis

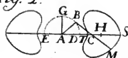
$y^2 + axy + bx^2 + cx + dy + e = o$ nullo præditam esse ramo infinito, si $\frac{aa}{4} < b$, in quo casu supremum membrum $yy + axy + bx^2$ in factores reales non resolvitur.

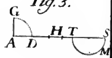
3. Si in supremo membro P sit factor realis $au - bx$, mutatis coordinatis æquatio ejusmodi comparari potest, in qua supremi membri factor realis sit ipsa ordinata. Curva æquationi satisfaciens sit HCK, (*Fig.* 1) existentibus abscissis $AB = x$, ordinatis $BC = y$. Ex initio abscissarum A agatur linea AD faciens cum AB angulum A, cujus tangens $= \frac{rb}{a}$; species r indicat sinum totum; ergo $Sc.\ A = \frac{rb}{\sqrt{aa + bb}}$, & $Cc.\ A = \frac{ra}{\sqrt{aa + bb}}$. Ex curvæ puncto C in AD demittatur normalis CD, & novæ abscissæ $AD = t$, novæ ordinatæ $CD = u$. Ducantur BF, BE novis coordinatis parallelæ. Habebimus $BE = \frac{bx}{\sqrt{aa + bb}}$, $AE = \frac{ax}{\sqrt{aa + bb}}$. Item $BF = \frac{by}{\sqrt{aa + bb}}$, & $CF = \frac{ay}{\sqrt{aa + bb}}$; atqui $t = AE + BF$, & $u = CF - BE$; Ergo

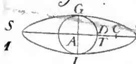
$t = \frac{ax + by}{\sqrt{aa + bb}}$, & $u = \frac{ay - bx}{\sqrt{aa + bb}}$. Quapropter quum loco $ay - bx$ substitui debeat $u\sqrt{aa + bb}$, apparet instituta æquatione inter novas coordinatas t, u, fore u supremi membri P factorem realem. Ex superioribus æquationibus determinantur valores x, y hoc modo $y = \frac{au + bt}{\sqrt{aa + bb}}$, $x = \frac{at - bu}{\sqrt{aa + bb}}$. Hi substituantur, & orietur æquatio, cujus supremum membrum habebit factorem u. Idem dicas velim si supremi membri P factor esset $\overline{ay - bx}^2$, $\overline{ay - bx}^3$ &c. Namque eadem adhibita methodo æquationem nanciscemur, in qua supremi membri factor erit ordinatæ quadratum, cubus &c. Quare satis erit spectare æquationes, in quibus ordinata, vel ejus quælibet potestas multiplicet supremum membrum; ad has enim aliæ omnes reducuntur. Neque obstat casus, in quo non y, sed x esset factor primi membri; quia in hoc y spectandæ sunt tamquam abscissæ, x tamquam ordinatæ.

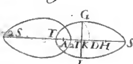
4. His præmissis pono primum y esse supremi membri P factorem, cui nullus alius æqualis sit. Itaque sit $P = yM$ existente M gradus $n - 1$. Exurget itaque formula $yM + Q + R + S$ &c. $= o$; ergo $y = -\frac{Q}{M} - \frac{R}{M}$ &c. sed

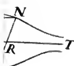
quum

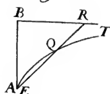

Fig. 2.
G
B
H
S
E
A
D
T
C
M


Fig. 3.
G
H
T
S
A
D
M


Fig. 5.
G
S
D
C
S
A
T
I


Fig. 6.
G
S
T
S
L


N
R
T


Fig. 8.
B
R
T
Q
A
E


R
T

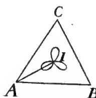

C
I
A
B

Fig. 10.

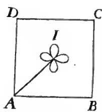

D
C
I
A
B

Fig. 11.

Fig. 13.

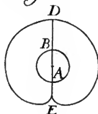


Fig. 14.

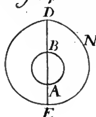


Fig. 16.



Fig. 17.

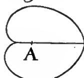
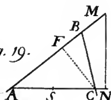
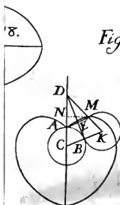
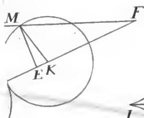


Fig. 19.







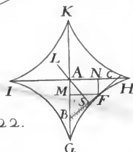


Fig. 22.

Fig. 24.

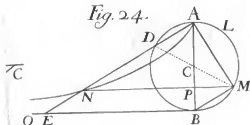
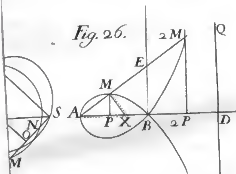
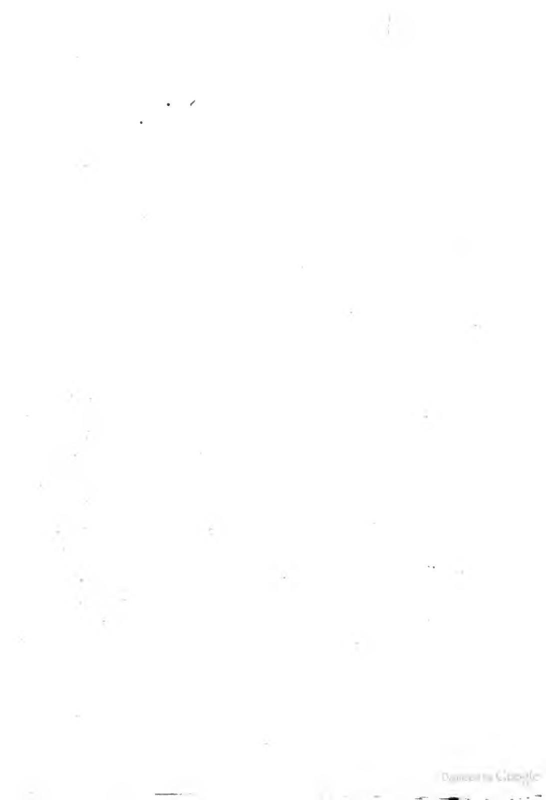


Fig. 26.





quum Q sit gradus ∞^{n-1}, R gradus ∞^{n-2} &c. R, S evanescunt respectu Q; Ergo $y = \frac{-Q}{M}$; atqui tam Q, quam M est gradus ∞^{n-1}; ergo y finita est. Deletis itaque in Q, M terminis, in quos ingreditur yy utpote evanescentibus, fiat $\frac{-Q}{M} = p$, erit $y = p$. Quamobrem hæc æquatio $y - p = o$ continetur in æquatione P + Q + R &c., si curva abeat in infinitum; atqui $y - p = o$ est æquatio ad lineam rectam parallelam lineæ abscissarum x, existente parallelarum distantia $= p$; ergo curva in infinitum producta confunditur cum hac linea recta, quæ erit ejus asymptotum, atque hoc vel x infinita positiva sit, vel negativa. Apparet itaque curvam præditam esse ramis duobus infinitis ad oppositas plagas progredientibus, quorum linea recta parallela abscissis ad utramque partem producta asymptotum est.

5. Hoc quidem evenit, si secundum membrum Q neque ab æquatione absit, neque sit divisibile per y. Hæc duo simul conjungo, quia ad rem nostram perinde est, quod contineat factorem y, & quod in æquatione non sit. Nam si est Q divisibilis per y, fiat $Q = y N$, erit N gradus ∞^{n-2}; ergo evanescet respectu $y M$; ergo æquatio subsistet inter terminos $y M + R + S$ &c. $= o$, quæ æquatio haberetur, si Q omnino abesset. In his casibus fiet $y = \frac{-R}{M} - \frac{S}{M}$ &c. existente M gradus ∞^{n-1}, R gradus ∞^{n-2}, S gradus ∞^{n-3} atque ita deinceps. Æquatio autem valere non potest, nisi y fiat minima, atque evanescens.

6. Si R adsit in æquatione, neque dividi possit per y, deletis in fractione $\frac{-R}{M}$ omnibus terminis, in quos y ingreditur, fiet $y = \frac{p}{x}$, existente p quantitate finita. Si R non existat in æquatione, aut habeat factorem y, fiet $y = \frac{-S}{M} = \frac{p}{x^2}$.

Si præter R etiam S ab æquatione removeatur, aut sit divisibilis per y, invenietur $y = \frac{p}{x^3}$; atque ita deinceps; ita ut generatim fiat $y = \frac{p}{x^g}$. Si g sit impar, & p sit positiva, existente x positiva erit y positiva, existente x negativa y erit negativa; vice versa si p sit negativa. Si g sit par; y semper erit aut positiva, aut negativa, prout p fuerit aut positiva, aut negativa. Ubique autem linea abscissarum est asymptotum curvæ.

7. Hæc progressio quantitatum æquantium y, hoc est interceptam inter curvam, & asymptotum genera diversa asymptotorum clare discriminat. Quare ad distinguenda genera asymptotorum, dicemus asymptotum rectilineum esse ejus indolis, ut intercepta inter ipsum & curvam in puncto infinite remoto sit gradus $\frac{1}{\infty}$, aut $\frac{1}{\infty^2}$ aut generatim $\frac{1}{\infty^g}$. Quum autem hæc sit proprietas hyperbolarum diversi gradus, constat, per hanc methodum determinari hyperbolam, cum qua curva nostra in infinitum producta arctissime conveniat. Quare non solum cognoscis curvam habere pro asymptoto lineam rectam, sed etiam determinas in quanam plaga respectu asymptoti posita sit. Quod si omnes omnino termini R, S &c. ab æquatione abessent, æquatio fieret $y M = o$, quæ quum sit divisibilis

per y constat, curvam haberi compositam, quæ coalescit ex linea recta, ex linea scilicet abscissarum, & ex curva gradus $n-1$.

8. Quotiescumque Q aut fit divisibilis per y, aut in æquatione non adsit, nihil est facilius quam genus asymptoti determinare. Quum autem Q adest, y invenitur æqualis quantitati finitæ $=p$; quod determinat lineam rectam asymptoticam curvæ, non autem genus asymptoti. Tradenda nunc est methodus determinandi genus asymptoti, quotiescumque y invenitur æqualis p quantitati scilicet constanti, quod sæpius evenire deinceps apparebit. In hoc casu asymptotum non est linea abscissarum, sed linea huic parallela. Quare mutare oportet coordinatas curvæ ita, ut abscissæ in asymptoto jaceant. Hoc obtinebis si ponas $y-p=u$, & arceas y ab æquatione. Hoc peracto facta x infinita u resultabit minima, & ex ejus valore genus asymptoti cognoscetur. Methodum docui, quæ casibus omnibus applicari potest. Ceterum sæpe adhibitis opportunis artificiis multo expeditius hæc determinatio perficietur.

9. Itaque proposita æquatione quacunque fac determines, quot in supremo membro P adsint factores simplices reales non habentes æquales. Quot sunt factores isti in æquatione, tot erunt in curva paria ramorum in infinitum excurrentium, quibus est asymptotum rectilineum. Cujus autem generis sit asymptotum rectilineum, & quænam sit hyperbola, cum qua curva in infinitum producta maxime congruat, ex præmissa methodo patefacies.

10. Transeo nunc ad æquationem, quæ in supremo membro P habeat duos factores æquales, hoc est y^2, ut sit $P = y^2M$, existente M functione gradus $n-2$. Æquatio igitur fiet $y^2M + Q + R + S$ &c. $= o$. Si Q neque absit ab æquatione, neque sit divisibilis per y, evanescentibus præ Q terminis R, S &c., æquatio subsistet in terminis $y^2M = -Q$. Hæc æquatio vera esse potest, si y^2 sit gradus ∞, quemadmodum est x, & y gradus $\infty^{\frac{1}{2}}$, hoc est infinita quidem respectu finiti, sed respectu x infinite exigua; ergo disposita æquatione hoc modo $y^2 = \frac{-Q}{M}$, evanescent in fractione $\frac{-Q}{M}$ termini omnes, qui continent y minimam respectu x. Igitur quum Q sit gradus $n-1$, M gradus $n-2$ facta divisione fiet $\frac{-Q}{M} = px$, existente p quantitate constante; Ergo $y^2 = px$. Hæc æquatio, ut notum est, pertinet ad parabolam appollonianam. Nostra itaque curva in infinitum producta congruit non cum linea recta, sed cum parabola vulgari, quam habet tamquam asymptotum. Si p sit positiva, rami excurrunt ad plagam abscissarum positivarum, si p vero sit negativa, ad plagam abscissarum negativarum. Quare curva habet duos ramos in infinitum progredientes ad eamdem plagam, inter quos media est linea abscissarum.

11. Quod si velis parabolam, cum qua curva nostra in infinitum producta congruat arctius, ne omittas terminum sequentem scilicet R, atque æquationem institue $y^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} = o$. Quoniam R, M sunt functiones ejusdem gradus $n-2$, eliminatis terminis nullescentibus, peractaque divisione fiet $-\frac{R}{M} = q$ quantitati scilicet constanti; ergo æquatio proveniet $y^2 = px + q$, quæ pariter est parabola prædita eadem parametro, sed ejus vertex distat ab initio abscissarum x per quan-

quantitatem constantem $= \frac{q}{p}$.

12. Nunc supponamus secundum membrum Q esse divisibile per y^2, ut sit $y^2 N = Q$, existente N functione gradus $n - 3$. Quum M functio sit gradus $n - 2$, manifestum est $y^2 N$ evanescere præ $y^2 M$. Idem itaque est, quod membrum Q absit ab æquatione, & quod sit per y^2 divisibile. Quod dicendum est pariter de membris R, S &c. In hac hypothesi si R adsit, neque sit divisibile per y, æquatio subsistet in terminis $y^2 + \frac{R}{M} = o$. Quoniam R, M sunt ejusdem gradus $n - 2$, fractio $-\frac{R}{M}$, deletis terminis nullescentibus, evadet æqualis quantitati constanti scilicet p; Ergo $y^2 = p$. Si p sit negativa, y est imaginaria, adeoque nullum ramum habet curva in infinitum extensum. Si p sit positiva, fiet $y = \pm \sqrt{p}$; quæ æquatio indicat, curvam duo habere asymptota rectilinea, quæ æque distant a linea abscissarum, eamque medium tenent. Ad genus asymptoti cognoscendum, ut antea docuimus, inveni æquationem, cujus abscissæ capiendæ sunt in asymptoto ponendo $y - \sqrt{p} = u$, atque hoc peracto ex regulis traditis, vel tradendis cognosces unius asymptoti genus. Similiter facta $y + \sqrt{p} = u$, alterius genus determinabis.

13. In æquatione $y^2 M + Q + R + S$ &c. $= o$ si præter Q desit etiam R, aut sit per y^2 divisibilis, æquatio fiet $y^2 = -\frac{S}{M} = \frac{p}{x}$. Si S quoque desit, aut habeat factorem y^2, æquatio erit $y^2 = -\frac{T}{M} = \frac{p}{x^2}$, atque ita deinceps, ut generatim fiat $y^2 = \frac{p}{x^g}$, per quas æquationes & numerus ramorum in infinitum percurrentium, & asymptotorum cognoscitur.

14. Verum hoc fusius explicandum videtur. In æquatione $y^2 = \frac{p}{x^g}$, g par esse potest, & impar. Sit g impar. Si p positiva est, ad partes x positivæ y duos valores habet positivum, & negativum. Quare asymptotum hyperbolicum, adeoque curva duos ramos habet, qui medium tenent asymptotum rectilineum ad partes x positivæ. Ad partes vero x negativæ, y imaginaria est, adeoque nullus ramus infinitus. Contra accidit, si p sit negativa: nam ad partes x positivæ y imaginaria est, ad partes x negativæ y reales valores habet duos positivum, & negativum. Sit g par. Si p sit positiva, y habet duos valores reales ad plagam x tam positivæ, quam negativæ; ergo hyperbolicum asymptotum, & curva prædita est quatuor ramis infinitis. Si p sit negativa, y semper est imaginaria; ergo curva expers est ramorum infinitorum.

15. Difficilior est casus, quum Q, aut membra subsequentia sunt divisibilia tantum per y. Existat Q in æquatione, & sit divisibilis per y. Si R & sit in æquatione, neque per y dividi possit, fiat $Q = y N$ existente N functione gradus $n - 2$, quemadmodum M, R; Ergo æquatio subsistit in tribus terminis $y^2 M + y N + R = o$, quæ facta x infinita locum habere potest, si y finita sit.

Erit

Erit itaque $y^2 - py - q = o$, quoniam fractiones $\frac{-N}{M}$, $\frac{-R}{M}$ fiunt quantitates constantes, quas de more voeo p, q. Si æquatio $y^2 - py - q = o$, nullam habeat radicem realem, & y sit imaginaria, nullus convenit curvæ ramus in infinitum excurrens. Si y duos valores reales habeat duplex est asymptotum rectilineum parallelum lineæ abscissarum; duo autem asymptota in unum conveniunt, si duo valores y sint æquales. Ad cognoscendum autem genus asymptoti utere methodo, quam antea exposui.

16. Si R absit, aut sit divisibilis per y, æquatio subsistit in terminis $y^2M + yN + S = o$, quæ reducitur ad formam

$y^2 - py - \frac{q}{x} = o$. Si absit etiam S, invenies

$y^2 - py - \frac{q}{xx} = o$; atque ita deinceps. Si Q in æquatione non sit, aut contineat yy, R autem per y dividi possit, ut sit $R = yN$, existente N gradus $n-3$, si S adsit, neque dividi possit per y, æquatio fiet

$yy - \frac{py}{x} - \frac{q}{x} = o$. Remoto S non autem T erit

$yy - \frac{py}{x} - \frac{q}{xx} = o$, atque ita deinceps. Si etiam R sit divisibilis per yy, aut non existat, S autem habeat factorem y, invenies successive æquationes

$$y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^2} = o$$

$y^2 - \frac{py}{x^2} - \frac{q}{x^3} = o$, atque ita deinceps. Itaque in his casibus omnibus res reducitur ad æquationem trinomiam $yy - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^g} = o$, in qua g nunquam est minor f, sed vel æqualis, vel major.

17. Ut determines, quænam eliciantur, facta $x = \infty$, ex trinomio æquationes, hac utere methodo. Compara duos terminos, & determina gradum y, ut duo termini sint homogenei. Si tertius terminus infinite exiguus reperiatur, æquatio inter duos terminos assumptos locum habet. Si tertius terminus in eodem sit gradu ac assumpti, omitti non potest, sed ipse quoque in æquationem ingredi debet. Si tertius terminus infinitus sit respectu assumptorum, æquatio inter assumptos intercedere nullo modo potest. Idem presta in singulis terminorum paribus. Methodus etiam æquationibus multinomiis applicatur.

18. In trinomio invento, ut primi duo termini sint homogenei oportet, ut y sit gradus $\frac{1}{\infty^f}$; ergo isti primi duo termini sunt gradus $\frac{1}{\infty^{2f}}$, tertius vero terminus est gradus $\frac{1}{\infty^g}$. Si $g = 2f$, tertius terminus est ejusdem gradus, ac primi duo; æquatio igitur in paucioribus quam tribus terminis consistere non potest; erit itaque $y^2 - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^{2f}} = o$. Si hujus æquationis radices sunt imaginariæ, nullus in

cur-

curva ramus infinitus; si ambæ reales, existunt duo asymptota hyperbolica gradus $\frac{1}{\infty^f}$, ad idem asymptotum rectilineum, quæ duo in unum coalescunt, si radices æquales sint. Si $g < 2f$, ultimus terminus infinitus est respectu primorum; ergo inter primos æquatio valere non potest. Videamus utrum valere possit inter primum, & ultimum. Ut isti termini sint homogenei, debet y esse gradus $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{2}}}$, & uterque terminus est gradus $\frac{1}{\infty^g}$; secundus autem invenitur $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{2}+f}}$; atqui $\frac{g}{2}+f > g$, si $2f > g$; ergo secundus terminus respectu reliquorum evanescit. Æquatio igitur valet $y^2 - \frac{q}{x^g}$, quæ genus asymptoti determinat. Comparatio secundi, & tertii termini nihil dat in hac hypothesi, quia primus respectu reliquorum est infinitus. Si $g > 2f$, æquatio inter primos valet, quia ultimus evanescit; ergo erit $y = \frac{p}{x^f}$, ex qua cognoscitur genus asymptoti. Sed præter hanc aliæ valere possunt æquationes. Si primus, & ultimns terminus fiant homogenei, secundus ipsis infinities est major, nulla igitur inter hos æquatio. Secundus & ultimus erunt homogenei, si y sit gradus $\frac{1}{\infty^{g-f}}$, quo in casu primus est gradus $\frac{1}{\infty^{2g-2f}}$, ac propterea respectu reliquorum evanescens, est enim $2g-2f > g$; ergo æquatio valebit $y = \frac{-q}{px^{g-f}}$, quæ genus asymptoti satis designat.

19. Contineat supremum membrum P factorem y^3, ut sit $P = y^3 M$, existente M gradus $n-3$. Si Q neque absit ab æquatione, neque sit divisibilis per y, æquatio subsistet in primis terminis duobus, & fiet $y^3 = \frac{-Q}{M}$. Q est gradus $n-1$, M est $n-3$; ergo y^3 debet esse gradus ∞^2, posita $x = \infty$; ergo y erit quidem respectu finiti major quæcumque data, at respectu x infinitæ est quacumque data minor. Ejectis porro terminis evanescentibus, peractaque divisione fiet $y^3 = px^2$. Curva itaque in infinitum producta convenit cum parabola secunda cubica, cujus parameter $= p$, ac proinde habet duos ramos infinitos, unum ad plagam x positivæ, alterum ad plagam x negativæ. Si p sit positiva, rami jacent ad partes ordinatarum positivarum; ad partes vero negativarum, si p sit negativa.

20. Si Q divisibilis sit per y^3, manifestum est membrum hoc evanescere præ primo P, quod de subsequentibus membris dicendum est. Perinde est itaque, quod membra absint omnino ab æquatione, & quod sint divisibilia per y^3. Si Q dividi possit per y^3, aut in æquatione non sit, æquatio fiet $y^3 = \frac{-R}{M}$, quæ fractio in hypothesi $x = \infty$ fit $= px$; Ergo $y^3 = px$, quæ est æquatio ad parabolam primam cubicam. Asymptotum itaque non est linea recta, sed cur-

va

va o dinis parabolici, quæ prædita eſt duabus ramis, quorum unus eſt in regione ordinatarum poſitivarum, alter in regione negativarum. In hoc caſu y eſt infinita, ſi compararetur cum finito, ſed evaneſcens, ſi comparetur cum x. Si R quoque habeat factorem y^3, aut non ſit in æquatione, & ſequentia membra dividi nequeant per y, æquatio proveniet $y^3 = \frac{-S}{M}$. Quum M, S ſint ejuſdem gradus, facta x infinita, fractio evadit quantitas finita; Ergo $y^3 = p$. Hæc æquatio habens unam radicem realem, & duas imaginarias docet, unum tantummodo haberi aſymptotum rectilineum, cujus gradum per methodum traditam determinabis. Si pariter S diviſibilis ſit per y^3, aut in æquatione locum non habeat, erit $y^3 = \frac{-T}{M} = \frac{p}{x}$; Deficiente etiam T exurget $y^3 = \frac{p}{xx}$, atque ita in reliquis; ut generatim valeat æquatio $y^3 = \frac{p}{x^k}$, quæ aſymptoti hyperbolici genus clare determinat.

20. Alterum membrum æquationis Q ſit diviſibile per y^2, ut ſit $Q = y^2 N$, exiſtente N gradus $n-3$. Æquatio ſiſtet in terminis $y^3 M + y^2 N + R = o$, ſive $y^3 + y^2 \frac{N}{M} + \frac{R}{M} = o$. Quum æquatio nullo modo ſubſiſtere poſſit, niſi y nulleſcat præ x infinita, quia R eſt gradus $n-2$, ſit $y^3 - py^2 - qx = o$. Si y^3 ejuſdem ordinis ſtatuatur ac x, terminus medius py^2 evaneſcet præ reliquis; ergo erit $y^3 = qx$. Hæc æquatio dat aſymptotum parabolicum gradus $\infty^{\frac{1}{3}}$, cum quo coeunt duo rami curvæ infiniti ad oppoſitas plagas progredientes, unum in regione ordinatarum poſitivarum, alius in regione negativarum. Præter hanc nulla alia æquatio valere poteſt. Si R non ſit in æquatione, aut dividi poſſit per y^2, æquatio invenietur $y^3 - py^2 - q = o$, quæ ſubſiſtit poſita y finita. Ordinata y aut unum valorem realem habet, aut tres; in primo caſu unus erit aſymptotum rectilineum parallelum abſciſſis, in ſecundo tria, niſi tamen propter duorum valorum æqualitatem duo coaleſcant in unum. Quomodo genus aſymptoti cognoſcatur, ex ſuperioribus conſtat. Si præter R etiam S abſit, aut ſit diviſibilis per yy, fiet $y^3 - py^2 - \frac{q}{x} = o$; abſcente T orietur

$$y^3 - py^2 - \frac{q}{x^2} = o;$$ atque ita deinceps. Quare naſcitur æcumenicum trinomium $y^3 - py^2 - \frac{q}{x^k} = o$; Ex hac duæ reſultant æquationes nempe $y = p$, quæ dat aſymptotum rectilineum, cujus genus inquirendum; $y^2 = \frac{-q}{px^k}$, quæ exhibet genus aſymptoti rectilinei. Si abſente Q ſit R diviſibilis per yy, fiet $y^3 - \frac{py^2}{x} - \frac{q}{x^k} = o$. Si R abſit, & S contineat yy, habebis

$y^3 -$

$y^3 - \frac{py^2}{x^2} - \frac{q}{x^g} = o$; atque ita de reliquis. Quapropter nafcitur trinomium

$y^3 - \frac{py^2}{x^f} - \frac{q}{x^g} = o$, in quo f non poteft effe major g, fed vel æqualis, vel minor.

22. Evolvamus hoc trinomium, in quo tres cafus diftinguere oportet; vel enim $g > 3f$, vel $g = 3f$, vel $g < 3f$. In primo cafu duæ valent æquationes, nempe $y = \frac{p}{x^f}$, $y^2 = \frac{-q}{p \cdot x^{g-f}}$, quæ genera afymptotorum determinant. Ad idem itaque afymptotum rectilineum duo exurgunt affymptota hyperbolica, nifi unum imaginarium evadat. Si $g = 3f$, facta y ordinis $\frac{1}{\infty^f}$, tertius terminus eft in eodem ordine, ac primi duo; nullus ergo terminus omitti poteft. Æquatio aut unam, aut tres radices reales habet, omnes gradus $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{3}}}$. Ad idem igitur afymptotum rectilineum aut unum, aut tria afymptota rectilinea exurgunt ejusdem generis. Duo autem coibunt in unum, fi duo valores y fint æquales. Si $g < 3f$, unica æquatio valet, nempe $y^3 = \frac{q}{x^g}$, quæ genus afymptoti defignat.

23. Si Q fit divifibilis tantum per y, non autem R, proveniet trinomium $y^3 - pyx - qx = o$, quod præbet æquationes duas, nempe $y^2 = px$, $y = \frac{-q}{p}$. Ex prima nafcitur afymptotum parabolicum; ex fecunda, in qua y eft coftans, rectilineum, de cujus genere ex methodo tradita inquire. Si R defit, non autem S, erit trinomium $y^3 - pyx - q = o$, ex qua pariter $y^2 = px$, & $y = \frac{-q}{px}$. Non exiftentibus in æquatione primum S, tum T &c., provenient trinomia

$y^3 - pyx - \frac{q}{x^2} = o$

$y^3 - pyx - \frac{q}{x^3} = o$: quare generatim

$y^3 - pyx - \frac{q}{x^g} = o$. Ex hoc femper duæ æquationes, fcilicet $y^2 = px$, $y = \frac{-q}{p \cdot x^{g+1}}$. Prima dat afymptotum parabolicum gradus $\infty^{\frac{1}{2}}$, altera hyperbolicum gradus $\frac{1}{\infty^{g+1}}$.

24. Non exiftente Q in æquatione, fit R divifibilis per y, non autem S, orie-

orietur trinomium $y^3 - py - q = o$, quæ valet y valorem habente finitum. Quum y vel unum habeat, vel tres valores reales, unum, aut tria exurgent asymptota rectilinea; duo autem in unum coire possunt, si y duos valores habeat æquales. Si deficiat S non autem T, aut unum ex membris subsequentibus, nascetur æquatio $y^3 - py - \frac{q}{x^g} = o$, in qua duæ æquationes continentur $y^2 = p$, $y = \frac{-q}{px^g}$. Hæc secunda dat asymptotum rectilineum, & ejus genus. Prima si p sit negativa est imaginaria, nullumque dat ramum in infinitum excurrentem; si p positiva sit, dat quatuor; duo enim proveniunt asymptota rectilinea.

25. Si non Q, sed aliquod ex membris subsequentibus contineat factorem y, æquatio proveniens erit hujusmodi $y^3 - \frac{py}{x^f} - \frac{q}{x^g} = o$, in qua nequit esse $f < g$. Tres casus distinguere oportet; vel enim $3f < 2g$, vel $3f = 2g$, vel $3f > 2g$. In primo casu valent æquationes duæ $y^2 = \frac{p}{x^f}$, $y = \frac{-q}{p \cdot x^{g-f}}$, quæ ad idem asymptotum rectum præbent duo asymptota hyperbolica, quorum nota sunt genera. In secundo casu $3f = 2g$, termini omnes sunt homogenei; quare y aut unum, aut tres valores habet, omnes ejusdem gradus $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{3}}}$, cui tria asymptota hyperbolica respondent; duo autem coire possunt in unum, si duo valores y æquales sint. Demum si $3f > 2g$, sola æquatio valebit $y^3 = \frac{q}{x^g}$, quæ præbet asymptotum rectilineum gradus $\frac{1}{\infty^{\frac{g}{3}}}$.

26. Ad ultimam hypothesim accedo, in qua adsunt cum termini continentes y^2, tum continentes y. Si Q habeat factorem y^2, R factorem y, & S sit in æquatione, occurrit quadrinomium $y^3 - py^2 - qy - r = o$, in qua y, quæ finita esse potest, unum aut tres valores habet reales; ergo unum, vel tria asymptota rect linea; duo, aut tria coibunt in unum, si duo, aut tres valores y æquales sint. Si æquatio membro S privata sit, assumatur primum ex membris sequentibus, quod habetur, ut fiat

$y^3 - py^2 - qy - \frac{r}{x^g} = o$. In hac duæ æquationes continentur, nempe $yy - py - q = o$, $y = \frac{-r}{qx^g}$. Prima præbet asymptotum rectilineum nullum, si y sit imaginaria, aut duo, si y realis sit, nisi tamen duæ coeant in unum ob æquales valores y. Altera exhibet asymptotum hyperbolicum gradus $\frac{1}{\infty^g}$.

27.

27. Remoto R, S aut aliquis ex terminis sequentibus contineat factorem y, ut oriatur æquatio $y^3 - py^2 - \frac{qy}{x^f} - \frac{r}{x^g} = o$, in qua f non potest esse major g. Hæc semper continet $y = p$, quæ sufficit asymptotum rectilineum. Præterea si y ponatur minima, manifestum est y^3 evanescere præ py^2; ergo æquatio sistet in terminis $y^2 + \frac{qy}{px^f} + \frac{r}{px^g} = o$, quæ quid in singulis casibus exhibeat, paullo ante docuimus.

28. Reliquum est, ut videamus, quid accidat, si Q deficiat, & solum aliquod ex membris subsequentibus ducatur in yy. Proveniet quadrinomium $y^3 - \frac{py^2}{x^e} - \frac{qy}{x^f} - \frac{r}{x^g} = o$, in qua neque e potest esse major f, neque f major g. Magna, ac prope incredibilis varietas oritur ex diversa exponentium proportione. Ponamus $f = 2e$, $g = 3e$, ex quibus descendit $2g = 3f$. Si y sit gradus $\frac{1}{\infty^e}$, omnes termini quadrinomii sunt homogenei, neque ullus omitti potest. Quare y aut unum, aut tres valores reales habebit, omnes ejusdem gradus; ergo aut unum aut tria asymptota hyperbolica ad idem asymptotum rectilineum.

29. Si inter coefficientes æqualitates superiores locum non habeant, videndum est, inter quos terminos consistere æqualitas possit aliis evanescentibus. Methodum antea traditam usurpabo. Videamus, utrum inter duos primos terminos æqualitas intercedere possit. Ad hanc rem necesse est, ut y sit gradus $\frac{1}{\infty^e}$, & y^3 gradus $\frac{1}{\infty^{3e}}$. Si $f > 2e$, & $g > 3e$, æqualitas inter duos primos terminos consistet nullescentibus duobus ultimis. Si $g > 3e$, sed $f = 2e$, tres primi termini constituent æqualitatem, contra si $g = 3e$, $f > 2e$, duo primi, & ultimus terminus necessarii sunt in æqualitate. Si aut $f < 2e$, aut $g < 3e$, æqualitas non subsistit, quia alteruter ex ultimis terminis evadit infinitus præ duobus primis. Inspiciamus utrum æqualitas haberi possit factis duobus ultimis terminis homogeneis. Ad hoc requiritur, ut y sit gradus $\frac{1}{\infty^{g-f}}$; Ergo y^3 gradus $\frac{1}{\infty^{3g-3f}}$, & $\frac{y^2}{x^e}$ gradus $\frac{1}{\infty^{2g-2f+e}}$. Si $3g - 3f > g$, seu $2g > 3f$, & $2g - 2f + e > g$, seu $g + e > 2f$, ultimi duo termini formabunt æqualitatem. Addendus est secundus, si $g + e = 2f$; omisso secundo addendus primus si $2g = 3f$. Verum si aut $2g < 3f$, aut $g + e < 2f$, quum alteruter ex primis terminis respectu ultimorum evadat infinitus, æqualitas inter duos ultimos locum habere nequit. Eamdem operationem instituens in singulis terminorum paribus, quæ æquationes valeant non difficulter determinabis. Hæ autem quum aut binomiæ sint, aut trinomiæ, quæ asymptota præbeant, & quot ramos infinitos ex superioribus constat.

30. Methodus fatis indicat, quo pacto progredi oporteat, quum fupremum membrum P contineat factorem y^4, y^5 &c.. Verum quum numerus cafuum multiplicetur, advertendum eft, ne aliquis omittatur. Nullo autem omiffo, proclive eft, determinare afymptota tum parabolica, tum hyperbolica, quæ curvæ conveniunt. Quæ dicta funt hactenus, opportunum judico, uno faltem exemplo illuftrare.

31. Sit propofita æquatio $y^3 x.\overline{y-x}^2 - a^3.\overline{y+x}^3 + a^6 = o$, atque determinandum, quot ramos infinitos habeat curva æquationi refpondens, & quæ fint ejus afymptota. Infpiciamus primum, quid exhibeat factor triplus y^3. Facta divifione erit $y^3 - \frac{a^3.\overline{y+x}^3}{x.\overline{y-x}^2} + \frac{a^6}{x.\overline{y-x}^2} = o$. Ultimus terminus evanefcit præ fecundo; æquatio igitur fubfiftit in primis duobus terminis, quæ valere non poteft, nifi y finita fit, atque propterea nullefcat præ x infinita. Fiet itaque $y^3 = a^3$. Unus eft tantum valor realis y, nempe $y = a$; quæ æquatio docet, curvam habere affymptotum rectilineum abfciffis parallelum. Pofito A B D C, (*Fig.* 2) quadrato, cujus latus $= a$, fumantur abfciffæ in A B producta, ordinatæ parallelæ A C. Linea C D producta erit afymptotum curvæ. Sed cujus generis fit afymptotum nondum conftat. Ut hoc per methodum traditam inveniamus, ponamus $y - a = u$, feu $y = u + a$; ergo conftat facta x infinita u fore minimam. Peracta itaque fubftitutione invenio

$$u^3 + 3au^2 + 3a^2u + a^3 - \frac{a^3.\overline{u+a+x}^3}{x.\overline{u+a-x}^2} + \frac{a^6}{x.\overline{u+a-x}^2} = o.$$

Quoniam u eft minima, & a nullefcit refpectu x, fiet $u^3 + 3au^2 + 3a^2u + a^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = o$; ergo evanefcentibus duobus primis terminis refpectu tertii, proveniet $u = -\frac{a^4}{3x^3}$. Afymptotum itaque eft generis $\frac{1}{\infty^3}$, cui conveniunt rami duo E, F; primus jacet ad partes u negativarum, alter pofitivarum. Idem facilius hac methodo eruere potuiffes. Non neglecto ultimo termino, æquatio effet $y^3 - a^3 + \frac{a^6}{x^3} = o$, feu $\overline{y-a}.\overline{yy+ay+aa} = -\frac{a^6}{x^3}$, $y - a = \frac{-a^6}{\overline{yy+ay+aa}.x^3}$; atqui quum $y = a$, eft $yy + ay + aa = 3aa$; Ergo $y - a = \frac{-a^4}{3x^3}$ prorfus ut fupra.

32. Deinde ftatuamus, quid ex factore x colligatur. Spectanda eft x tamquam ordinata, y tamquam abfciffa. Facta divifione erit

$x-$

$x - \frac{a^3 . \overline{y+x}^3}{y^3 . \overline{y-x}^2} + \frac{a^6}{y^3 . \overline{y-x}^2} = o$. Posita y infinita ultimus terminus nullescit præ secundo, & x minima sit necesse est; Ergo $x = \frac{a^3}{y^2}$, quæ dat asymptotum generis $\frac{1}{\infty^2}$. Duo rami nascentur G, H uterque ad partes x positivæ.

33. Ut postremo cognoscamus, quos ramos præbeat factor duplex $\overline{y-x}^2$, ducenda est linea A D, atque æquatio invenienda sumptis in hac abscissis. Abscissæ sumptæ in A D sint $= t$, ordinatæ eidem normales $= u$. His positis applicatis formalis angulo semirecto B A D, erit $t = \frac{y+x}{\sqrt{2}}$, $u = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$; Ergo $\frac{t+u}{\sqrt{2}} = y$, $\frac{t-u}{\sqrt{2}} = x$. Igitur factis substitutionibus erit

$$\frac{\overline{u+t}^3}{2\sqrt{2}} . \frac{\overline{t-u}}{\sqrt{2}} . 2u^2 - a^3 t^3 . 2\sqrt{2} + a^6 = o, \text{ sive}$$

$$\overline{u+t}^3 . \overline{t-u} . u^2 - 4\sqrt{2} . a^3 t^3 + 2a^6 = o: \text{ ergo}$$

$u^2 - \frac{4\sqrt{2} . a^3 t^3}{\overline{u+t}^3 . \overline{t-u}} = o$, relicto ultimo termino evanescente respectu secundi; ergo, quum u minima sit oporteat respectu t, fiet $uu = \frac{4\sqrt{2} . a^3}{t}$. Asymptotum itaque hyperbolicum est generis $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. Quapropter rami duo infiniti habebuntur ad partes t positivæ, qui medium tenebunt asymptotum rectilineum: Curva habet sex ramos in infinitum protensos & tria asymptota generis $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^{\frac{1}{2}}}$. Quomodo rami in spatio finito conjungantur, non spectat ad præsentem theoriam.

CAPUT NONUM.

De contactibus, atque osculis.

1. Quemadmodum indolem, atque naturam ramorum in infinitum extensorum deteximus, lineam rectam, vel curvam simpliciorem assignantes, que cum curva in infinitum producta confundatur; ita in præsentia curvam in spatio finito spectantes ad illius naturam cognoscendam, rectam, vel curvam simpliciorem inquiremus, quæ cum illius portione per minimum saltem spatium congruat. Ac primo quidem lineam rectam investigabimus, quæ cum curvæ tractu minimo congruat, sive quæ habeat cum curva communia saltem puncta

duo

duo infinite proxima; quæ linea appellari solet tangens. Deinde de lineis curvis verba faciemus, quæ cum datæ curvæ portione accuratius, atque arctius, congruant, quæque osculatrices solent nominari. Ac primum de rectis tangentibus.

2. Sit curva quælibet MCE (*Fig.* 1), cujus æquatio relate ad coordinatas AB, BC data sit. Assumpto quolibet alio puncto D agatur ordinata DE, & ex puncto C ducatur CF parallela AB. Vocetur $AB = p$, $BC = q$, quæ duæ, ad inveniendam tangentem puncti C, tamquam constantes accipiendæ sunt. Vocetur $CF = x$, $FE = y$, erit $AD = p + x$, $DE = q + y$. Ex æquatione versante inter $p + x$, & $q + y$ dematur æquatio inter p, q, remanebit æquatio simplicissima inter x, y, in qua nullus terminus ex solis constantibus constabit. Quare hanc formam induet

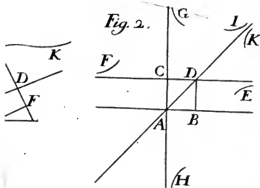
$Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Bx^2y + Hxy^2 + Iy^3$ &c. Coefficientes A, B, C, &c. sunt quantitates [illegible]entes ex p, q, & ex constantibus, quas includit æquatio curvæ. Hæc nova æquatio, quæ refertur ad lineam abscissæ CF, & in qua initium abscissarum est ipsum punctum C, nullo negotio tangentem puncti C determinat.

3. Illud est profecto certissimum, facta $x = 0$, esse quoque $y = 0$. Quum autem minimæ, seu evanescentis portionis curvæ indoles sit investiganda, sumenda est minima, & evanescens abscissa $CF = x$; quo in casu evanescit quoque ordinata $FE = y$. Sed si x, y sint minimæ, & evanescentes, ipsis infinities minores erunt x^2, xy, y^2; multo adhuc minores x^3, x^2y, xy^2, y^3, atque multo magis omnes, quæ sequuntur; ergo quum istæ omnes præ primis, quæ infinities ipsis majores sunt, omitti possint, æquatio subsistet in duobus terminis $Ax + By = 0$. Hæc autem æquatio, cum sit ad lineam rectam CE transeuntem per punctum C, aperte demonstrat hanc rectam, si punctum E proxime accedat ad C, cum curva congruere. Itaque erit linea recta CE tangens curvæ in puncto C, quæ proinde facili negotio determinatur. Producatur CE, donec cum AB concurrat in G. Erit ex similitudine triangulorum FE : CF seu $y : x :: CB : BG$; sed ex æquatione inventa $y : x :: A : -B$; ergo $A : -B :: CB : BG = \frac{-B}{A} CB$. Hæc autem linea vocari solet subtangens. Quæ quum ita sint, ad inveniendam subtangentem hac regula utere. In data æquatione curvæ pro x, y scribe p, q; tum in eadem pro x, y substitue $p + x$, $q + y$; primam æquationem deme ex hac secunda. Quæ resultat æquatio, ita ordinetur, ut potestates lineares constituant veluti primum terminum, tum quadraticæ, postea cubicæ, atque ita deinceps. Omissis omnibus superioribus æquatio statuatur in linearibus, atque ex hoc inveniatur proportio inter y, x, quæ sit $A : -B$; erit subtangens $BG = \frac{-B \cdot q}{A}$.

4. Pauca aliquot exempla propono. Sit parabola æquationis $ax = yy$. In hac æquatione scribo primum p pro x, & q pro y, ut fit $ap = qq$; tum $p + x$ pro x, & $q + y$ pro y, ut fit $ap + ax = qq + 2qy + yy$. Demo ex hac primam, & provenit $ax = 2qy + yy$, sive $ax - 2qy - yy = 0$; omisso yy, quæ quantitas nullescit evanescentibus ordinatis, fit $ax - 2qy = 0$; ergo $y : x :: a : 2q$; Ergo $-B = 2q$, $A = a$; Erit itaque subtangens $BG = \frac{2qq}{a}$;

at-

Cap. VIII. Lib. III. Tab. pag. 342.



atqui $\frac{qq}{a}=p$; Ergo BG $=2p$. Est itaque subtangens BG dupla abscissæ AB, sicuti alias probavimus.

5. In æquatione hyperbolæ inter asymptota $aa=xy$, pro x,y (*Fig.* 2) substitue p,q, ut sit $aa=pq$; deinde substitue $p+x$, $q+y$, ut fiat $aa=pq+py+qx+xy$. Deme unam ex alia, & proveniet $o=py+qx+xy$. Omisso xy, quæ nullescit respectu aliorum terminorum, invenies $y:x::-q:p$; Ergo subtangens $=-p$. Quum proveniat negativa, sumenda est non ad partem, ubi initium abscissarum positum est, sed ad partes oppositas. Subtangens igitur BG $=$ AB, ut alias demonstratum est.

6. Æquatio Ellypsis est hujusmodi $aa-xx:y^2::aa:bb$. Pro x,y scribe p,q, ut sit $aa-pp:qq::aa:bb$; tum scribe $p+x$, $q+y$, ut sit $aa-pp-2px-xx:qq+2qy+yy::a^2:b^2$; Deme ab altera primam, & fiet $-2px-xx=\frac{aa}{bb}.2qy+yy$; ergo omissis omittendis $-2px=\frac{aa}{bb}.2qy$, sive $y:x::-p:\frac{aa.q}{bb}::q$ ad subtangentem $=\frac{-a^2q^2}{b^2p}=\frac{a^2-p^2}{p}$ prout alias invenimus.

7. Ad ultimum exemplum sit linea tertii ordinis, cujus æquatio $xy^2=a^2x+a^2y$. Pro x,y primum scribe p, q erit $pq^2=a^2p+a^2q$; tum scribe $p+x$, $q+y$, ut fiat $pq^2+2pqy+py^2+q^2x+2qxy+xy^2=a^2p+a^2x+a^2q+a^2y$. Ex hac superiorem deme, ut nascatur $2pqy+py^2+q^2x+2qxy+xy^2=a^2x+a^2y$. Relictis superioribus dimensionibus æquatio orietur $q^2-a^2.x=a^2-2pq.y$, Ergo $y:x::q^2-a^2:a^2-2pq::q$ ad subtangentem $=\frac{a^2q-2pq^2}{q^2-a^2}$. Hæc autem exempla sufficiant ad methodum illustrandam.

8. Redeamus ad formulam æcumenicam $Ax+By=o$, (*Fig.* 1) per quam curvæ tangens determinatur. Si in ea sit $A=o$, fiet $y=o$; ergo tangens coincidet cum linea CF parallela AB. Contra si $B=o$, fiet $x=o$; ergo tangens coincidet cum linea BC, eritque parallela ordinatis. Quotiescumque ordinata BC sit omnium, quæ ad utramque partem ducantur, vel maxima, vel minima, necesse est, ut tangens puncti C sit aut parallela abscissis, aut saltem parallela ordinatis; ergo erit aut $A=o$, aut $B=o$. Licet propositio hæc sit verissima, tamen cave, ne eamdem convertas, & pronunties, quotiescumque $A=o$, & tangens est parallela abscissis, aut $B=o$, & tangens est parallela ordinatis, ordinata est omnium maxima vel minima; fieri enim potest, ut in illis punctis curva aliquid singulare habeat, quod maximam, minimamque ordinatam, ut deinceps patebit, rejciat. Veruntamen si aliunde constet, maximam minimamve ordinatam existere, eam deteges supponendo aut $A=o$, aut $B=o$. Unico exemplo rem aperiam. Notum est, curvam cujus æquatio

tio $2a^2y = 2x^3 + ax^2 - a^2x$, habere duas maximas ordinatas, alteram positivam, alteram negativam. Detegendi sint valores abscissarum, quibus maximæ ordinatæ respondent, scribe p pro x, q pro y, ut fiat $2a^2q = 2p^3 + ap^2 - a^2p$. Scribe item $p + x$ pro x, $q + y$ pro y, ut habeas

$$\begin{aligned} 2a^2q + 2a^2y &= 2p^3 + 6p^2x + 6px^2 + 2x^3 \\ &\quad ap^2 + 2apx + ax^2 \\ &\quad -a^2p - a^2x \end{aligned}$$

Detracta prima ex æquatione altera, nascetur

$2a^2y = \overline{6p^2 + 2ap - a^2}.x + \overline{6p + a}.x^2 + 2x^3$. Quare $A = 6p^2 + 2ap - a^2$, & $B = 2a^2$, quæ quum sit constans, non potest $= o$. Pone ergo $A = o$, seu $6p^2 + 2ap = a^2$, quæ resoluta dabit valores duos p, nempe $p = \frac{-a \pm a\sqrt{37}}{6}$. Harum abscissarum ordinatæ erunt duæ maximæ, quæ quæruntur.

9. Quod si utraque ex constantibus A, B sit $= o$, tum in æquatione coordinatarum CF, FE negligi non possunt termini, in quibus variabiles ad secundam dimensionem ascendunt, quia hi non nullescunt respectu $Ax + By$. Quapropter consideranda erit æquatio $Cx^2 + Dxy + Ey^2 = o$. Si in hac $DD < 4CE$, radices omnes erunt imaginariæ, excepto casu x, & $y = o$. Itaque punctum C pertinet quidem ad curvam, sed est sejunctum a reliqua curva, & punctum conjugatum exurget; in quod desinit ovalis conjugata in punctum evanescens. Relate ad hoc punctum ne idea quidem tangentis locum habere potest, quia tangens est linea recta transiens per duo puncta proxima curvæ. Ex hoc autem habes criterium cognoscendi, utrum curva prædita sit puncto conjugato.

10. Si $DD > 4CE$, æquatio est divisibilis in duas hujus formæ $ax + by = o$, quarum utraque æque competit curvæ. Igitur, quum ab utraque positio tangentis determinatur, necesse est, ut in eo puncto duplex conveniat tangens; quod evenire non potest, nisi duplex ejusdem curvæ ramus in eo puncto se intersecet. Quare sumpta CF $= x$, pone FE, F2E (*Fig.* 3) æquales duplici valori y, quem duplex æquatio suppeditat; tum jungantur CE, C2E, hæ lineæ rectæ duos ramos curvæ contingent in puncto C.

11. Si vero fuerit $DD = 4CE$, tum ambæ istæ tangentes CE, C2E coincident, & angulus EC2E nullus fiet. Quod indicat, ramos curvæ duos non tantum concurrere, sed etiam eamdem directionem habere, adeoque sese invicem tangere. In his omnibus casibus punctum C censendum est duplex, quia recta per hoc punctum ducta, in duobus punctis curvam secare judicandum est. Igitur quum in æquatione coordinatarum CF, FE, æquales nihilo sunt ambo coefficientes A, B, statuendum est, curvam in C habere punctum duplex. Punctorum porro duplicium tres sunt species. Vel enim punctum duplex est punctum conjugatum, sive ovalis in punctum desinens; vel duorum ramorum intersectio mutue, seu nodus; vel duorum ramorum contactus. Hasce diversas puncti duplicis species triplex æquationis $Cxx + Dxy + Ey^2 = o$ constitutio definit.

12. Si præter coefficientes A, B, tres etiam sequentes C, D, E omnes nullesce-

lescerent, æquatio instituenda esset inter terminos, in quibus x, y tres obtinent dimensiones ita, ut sit $Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 = o$. Si hæc æquatio unicum habeat factorem realem, duos imaginarios, ostendet unum curvæ ramum per punctum C transire, ejusque tangentem determinabit; tum patefaciet, ovalem evanescere in puncto C, ibique latere punctum conjugatum. Si radices omnes æquationis fuerint reales, cognoscemus, tres curvæ ramos in puncto illo se intersecare vel tangere, prout radices fuerint inæquales, vel æquales. Quidquid horum acciderit, curva in C donata erit puncto triplo, & rectam per hoc punctum transeuntem in tribus punctis curvam secare, censendum erit.

13. Quod si præter coefficientes omnes præcedentes, etiam quatuor F, G, H, I nulli fiant, tum ad naturam punctorum, & tangentium positionem cognoscendam, illi termini assumendi sunt, in quibus x, y quatuor obtinent dimensiones. Obtinebitur proinde punctum quadruplum, in quo vel duæ ovales evanescentes simul conjunguntur, & duplex existit punctum conjugatum; vel una tantum ovalis nullescit, & punctum inest conjugatum, atque simul duo curvæ rami se secant, aut tangunt, prout duæ reales radices inæquales fuerint, vel æquales; vel tandem quatuor rami curvæ se intersecant, aut tangunt, prout quatuor reales radices vel inæquales fuerint, vel æquales. Hoc progressu aperte cognosces, quid curvæ accidat, si assumendi sint termini quinque, sex, aut plurium dimensionum.

14. Quemadmodum ad cognoscendam naturam ramorum in infinitum extensorum satis nobis non fuit, determinare lineam rectam, seu asymptotum rectilineum, cum quo curva in infinitum producta confundatur, sed etiam simpliciorem curvam definivimus, cum qua nostra in infinitum extensa arctissime congruat; ita in præsentia ad curvaturam penitus conoscendam post inventam directionem rectæ tangentis, oportet determinare curvam simpliciorem, cum qua curva in dato puncto maxime cohæreat; qui arctissimus contactus a geometris vocari solet osculatio. Ut rectum ordinem sequamur, hanc definitionem præmittimus. Duarum curvarum minimi arcus duo AM, AN (*Fig.* 4) habentes communem tangentem sese osculari dicentur, quum ordinatarum LM, LN cuicumque abscissæ respondentium differentia MN ad ipsas minorem habeat rationem quacumque data. Fac advertas ad rationem osculi non sufficere, ut MN differentia ordinatarum LM, LN, quæ extremæ sunt, sit ad ipsas in ratione minore quacumque data, sed requiri, ut hoc verificetur in ordinatis omnibus, quæ mediæ sunt inter puncta A, L ita, ut sit ubique QR : PQ, aut PR in minore ratione quacumque data. His præmissis.

15. Ajo, circulum cujus radius $= a$ osculari parabolam apollonianam in vertice, cujus parameter $= 2a$. Sit circulus AMB, cujus radius $CA = CB = a$, & parabola AND, cujus parameter $= 2a$. Accepta minima AL agatur LMN. Ex natura circuli erit $2a \cdot AL - AL^2 = LM^2$, sive $2a \cdot AL = LM^2 + AL^2$; Ex natura parabolæ erit $2a \cdot AL = LN^2$; Ergo $LN^2 = LM^2 + AL^2$, & extracta radice $LN = LM + \frac{AL^2}{2LM}$, sequentes termini negliguntur, utpote evanescentes. Igitur $LN - LM = MN = \frac{AL^2}{2LM}$. Si LM, adeoque arcus ponatur

gr. $\frac{1}{\infty}$, erit AL gr. $\frac{1}{\infty^2}$; ergo MN gr. $\frac{1}{\infty^3}$. Ergo MN respectu LM, & LN minor est quacumque data. Quæ demonstratio valet, quodcumque sumatur punctum P inter puncta A, L; igitur sese arcus AM, AN osculantur. Q.E.D. Quoniam circulus eamdem ubique obtinet curvaturam, utile semper visum est geometris cognoscere circulum, qui curvam osculetur in dato puncto. Ex hac vero propositione si determinata sit parabola, cujus vertex in dato puncto curvam osculetur, cognoscetur etiam radius circuli osculatoris, & institui poterit comparatio inter curvaturam curvæ in dato puncto, & curvaturam circuli. Inventa per curvaturam circuli curvatura parabolæ vulgaris in vertice, cum hac comparo curvaturas aliarum paraboiarum in vertice. Hanc ob rem sequentes propositiones enuncio, quæ maxime attendendæ sunt.

16. Parabolam ARM (*F.* 5), cujus æquatio sit $a^{n-m}x^m = y^n$ existente $\frac{n}{m} > 2$, nequit in vertice osculari parabola apolloniana, tametsi parametro prædita sit infinita. Sumpta minima AL agatur ordinata LM. Ex natura parabolæ erit

$$a^{n-m} . AL^m = LM^n;$$ ergo $$a^{\frac{n-m}{n}} . AL^{\frac{m}{n}} = LM;$$ ergo quadrando

$$a^{\frac{2n-2m}{n}} . AL^{\frac{2m}{n}} = LM^2,$$ sive $$\frac{a^{\frac{2n-2m}{n}}}{AL^{\frac{n-2m}{n}}} . AL = LM^2.$$ Quare ut parabolæ apollonianæ ordinata, respondens abscissæ AL adæquet LM, necesse est, ut

ejus parameter $= \frac{a^{\frac{2n-2}{n}}}{AL^{\frac{n-2m}{n}}}$, quæ est infinita. Parabola itaque vulgaris hac

parametro descripta transibit per punctum M. Sit ea AQM. Ne tamen judices arcus ARM, AQM sese invicem osculari. Nam sumpto quolibet puncto P,

ordinataque PQR, erit ex proprietate parabolæ ARM, $a^{\frac{n-m}{n}} . AP^{\frac{m}{n}} = PR$,

& ex proprietate parabolæ conicæ $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{AL^{\frac{n-2m}{2n}}} . AP^{\frac{1}{2}} = PQ$. Igitur

$$PR : PQ :: AP^{\frac{m}{n}}, \frac{AP^{\frac{1}{2}}}{AL^{\frac{n-2m}{2n}}} :: AL^{\frac{n-2m}{2n}} : AP^{\frac{n-2m}{2n}};$$ sed AL : AP est

in qualibet data ratione majoris inæqualitatis; ergo etiam PR : PQ potest esse in qualibet data ratione majoris inæqualitatis; ergo QR non est minima præ PQ, PR; non igitur sese osculantur arcus ARM, AQM. Q. E. D.

17. Iis-

17. Ijſdem poſitis ſi $\frac{n}{m}$ ſit < 2, & > 1, parabolam AQM nequit oſculari in vertice parabola apolloniana, tametſi prædita ſit parametro minori quacumque data. Eodem inſtituto calculo perveniemus ad æqualitatem

$$\frac{AL^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-2n}{n}}} \cdot AL = LM^2.$$ Quare ut parabola conica tranſeat per punctum M, debet ejus parameter æquare $\frac{AL^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{2m-2n}{n}}}$, quæ eſt quantitas minima. Ne tamen putes parabolam apollonianam ARM hac parametro deſcriptam oſculari aliam in vertice. Nam ſumpta alia abſciſſa AP, actaque PQR, habebimus has æqualitates $a^{\frac{n-m}{n}} \cdot AP^{\frac{m}{n}} = PQ$, $\frac{AL^{\frac{2m-n}{n}}}{a^{\frac{m-n}{n}}} \cdot AP^2 = PR$; Ergo

$PQ : PR :: AP^{\frac{m}{n}} : AL^{\frac{2m-n}{2n}} \cdot AP^2 :: AP^{\frac{2m-n}{2n}} : AL^{\frac{2m-n}{2n}}$; ergo PQ : PR poteſt eſſe in qualibet ratione minoris inæqualitatis. Ergo arcus AQM, ARN ſeſe invicem oſculari non poſſunt. Ex his colligas velim, nullam parabolam, ſi excipias apollonianam, in vertice habere circulum oſculatorem, tametſi diametro præditus ſit aut minima, aut infinita; quare curvatura omnium parabolarum in vertice, excepta conica, eſt generis toto cœli diverſi a curvatura circulari. Hoc autem geometrice demonſtrandum curavi, quia analyſtæ ad unum omnes docent, curvam, cujus radius oſculator ſit aut minimus, aut infinitus, habere pro curva oſculante parabolam aliquam in vertice ab apolloniana diverſam. Quæ doctrina, quum vel maxime abhorreat a veritate, a geometria in perpetuum ejicienda eſt. Quinimo curvaturæ in vertice parabolarum diverſi ordinis ſunt generis omnino diverſi; quod ita demonſtrandum aggredior.

18. Poſito quod $\frac{n}{m} < \frac{p}{q}$, ajo parabolas, quibus conveniunt æquationes $a^{n-m}x^m = y^n$, $b^{q-p}x^p = y^q$ non poſſe ſeſe in vertice oſculari, licet a parameter primæ ſit infinite exigua, aut b parameter ſecundæ infinita. Prima parabola ſit ARM, ſecunda AQM, & ordinata communis ſit LM. Ex æquationibus erit $a^{n-m} \cdot AL^m = LM^n$, $b^{q-p} \cdot AL^p = LM^q$. Ergo $a^{\frac{n-m}{n}} \cdot AL^{\frac{m}{n}} = LM$, $b^{\frac{q-p}{q}} \cdot AL^{\frac{p}{q}} = LM$. Igitur $a^{\frac{n-m}{n}} \cdot AL^{\frac{m}{n}} = b^{\frac{q-p}{q}} \cdot AL^{\frac{p}{q}}$, ſive $\frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{b^{\frac{q-p}{q}}} = AL^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$, in qua, exiſten-

te $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$, si AL sit minima, debet esse aut a minima, aut b infinita: Verum hoc etiam supposito nulla habetur osculatio. Nam ducta qualibet ordinata PQR, habebimus $a^{\frac{n-m}{m}} . AP^{\frac{m}{n}} = PR$, $b^{\frac{q-p}{p}} . AP^{\frac{p}{q}} = PQ$; Ergo $PR : PQ :: a^{\frac{n-m}{m}} . AP^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{q-p}{p}} . AP^{\frac{p}{q}}$, sive $:: \frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{b^{\frac{q-p}{p}}} : AP^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$; atqui $\frac{a^{\frac{n-m}{m}}}{b^{\frac{q-p}{p}}} = AL^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$; Ergo $PR : PQ :: AL^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}} : AP^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}$, quæ esse potest in qualibet data ratione majoris inæqualitatis; ergo QR minima non est respectu rectarum PQ, PR, neque osculantes sibi invicem sunt arcus ARM, AQM.

19. Quandoquidem quilibet vertex diversarum parabolarum, diversi generis curvatura præditus est, commodum erit referre curvaturas curvarum ad diversas curvaturas, quæ habentur in parabolarum verticibus. Quamobrem ducta CH normali tangenti CG, (*Fig.* 1) in eamque demissa ordinata EK, oportet æquationem revocare inter CF, FE, quæ est hujusmodi nempe

$Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3$ &c. $= 0$ & transferre ad novas coordinatas CK, KE, vocatis scilicet $CK = t$, $KE = u$. Ponamus rationem ordinatæ BC ad subtangentem BG, seu minimæ FE ad minimam CF, seu subnormalis $BH : BC$ esse ut $a : -b$; igitur trianguli HBC latera BH, BC, CH erunt ut a, $-b$, $-\sqrt{aa+bb}$. Præposui signum $-$ quantitati radicali $\sqrt{a^2+b^2}$, quia quantitates a, b supposui diversis signis affectas, primam scilicet $+$, secundam $-$. Cæterum in accipiendo signo quantitatis radicalis hæc regula tenenda est; si duæ quantitates a, b idem signum præfixum habeant, radicali præfige signum $+$; præfige autem signum $-$, si ipsæ signis affectæ sint diversis. In calculo instituendo, quia posui b affectam signo $-$, etiam $\sqrt{aa+bb}$ eodem signo afficiam. Ex puncto F ducantur FL, FI novis coordinatis parallelæ. Similitudo triangulorum has præbet analogias

CH : CB :: CF : FL

$-\sqrt{aa+bb} : -b :: x : FL = \frac{-bx}{-\sqrt{aa+bb}}$

CH : BH :: FE : EI

$-\sqrt{aa+bb} : a :: y : EI = \frac{ay}{-\sqrt{aa+bb}}$

CH

$CH:BH::CF:CL$

$-\sqrt{a^2+b^2}:a::x.\ CL=\frac{ax}{-\sqrt{aa+bb}}$

$CH:CB:FE:FI$

$-\sqrt{aa+bb}:-b::y:FI=\frac{-by}{-\sqrt{aa+bb}}$;

atqui $FL+EI=KE$, seu $\frac{-bx+ay}{-\sqrt{aa+bb}}=u$, &

$CL-FI=CK$, seu $\frac{ax+by}{-\sqrt{aa+bb}}=t$. Ex quibus valores x,y determinabuntur hoc modo $x=\frac{at-bu}{-\sqrt{aa+bb}}$, $y=\frac{bt+au}{-\sqrt{aa+bb}}$. Si valores hujusmodi substituas in superiore æquatione, habebis æquationem inter t, & u, quam requiris.

20. Si coefficientes A, B ambo non desint in æquatione, quam hypothesin primum tractandam suscipio, constat fore $A=a$, $B=b$. Quum ex æquatione constet $Ax+By$ æqualem esse superioribus dimensionibus x, y, quum ad minima venimus, patet $Ax+By$ fore minimum præ alterutro rectangulo Ax, By, adeoque etiam præ $-Bx+Ay$; Ergo t erit minima respectu u. Ergo in æquatione, si excipias $Ax+By$, quæ æquat $-t\sqrt{AA+BB}$, licebit pro x substituere $\frac{-Bu}{-\sqrt{AA+BB}}$, pro y scribere $\frac{Au}{-\sqrt{AA+BB}}$. Igitur æquatio in hanc mutabitur

$$-t\sqrt{AA+BB}\ \begin{matrix}+CB^2\\-DAB\\+EA^2\end{matrix}\ \cdot\frac{uu}{AA+BB}\ \begin{matrix}+FB^3\\-GB^2A\\+HBA^2\\-IA^3\end{matrix}\ \cdot\frac{u^3}{AA+BB.\sqrt{AA+BB}}\ \&c.=0$$

21. Si coefficiens $CB^2-DAB+EA^2$ non fit $=0$, omittantur termini sequentes, & æquatio inter duos terminos primos scilicet $\frac{t.\sqrt{AA-BB}.\ \overline{AA+BB}}{+CB^2-DAB+EA^2}=uu$ exhibebit parabolam appollonianam, cujus vertex osculatur curvam in puncto dato. Si vero $CB^2-DAB+EA^2=0$, tum in paralogismum caderet, qui post secundum terminum continentem u^2 reliquos omitteret; nam tertius respectu secundi non evanescit, sed potius secundus respectu tertii. Quare æquatio proveniet

$\frac{\overline{AA+BB}^2.t}{FB^3-GB^2A+HBA^2-IH^3}=u^3$, quæ præbet parabolam cubicam, cujus

jus vertex curvam osculatur; Atque ita progrediendum est deinceps nullescentibus coefficientibus superiorum potestatum. Quæres utrum parabolarum osculantium parametri infinitæ esse possint. Infinitæ sine dubio erunt, quoties existente infinita aut A, aut B denominator fractionis respectu numeratoris nullescat; erunt autem minimæ, quoties utraque A, B minima existente numerator respectu denominatoris nullescat.

22. Si ambæ $A, B = o$, tum spectandus est secundus terminus $Cx^2 + Dxy + Ey^2$, qui est secundi ordinis. Omittamus casum, in quo nullus sit factor realis, qui quum exhibeat punctum conjugatum, nullum locum relinquit neque contactui, neque osculo. Si in prædicto membro duo insint factores reales inæquales, qui sint $ax + by$, $mx + ny$ facta divisione per $mx + ny$ proveniet

$$ax + by + \frac{Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3}{mx + ny} \text{ \&c. Substitue pro } x \ \frac{bu}{\sqrt{aa+bb}}, \text{ \&}$$

pro y substitue $\frac{-au}{\sqrt{aa+bb}}$ ubique, excepto in $ax + by$, pro quo scribendum

$$-t\sqrt{aa+bb}, \text{ \& fiet } -t\sqrt{aa+bb} + \frac{\overline{Fb^3 - Gab^2 + Ha^2b - Ia^3} \cdot u^2}{\overline{mb - na} \cdot \overline{aa + bb}} \text{ \&c.}$$

ex qua si coefficiens termini u^2 non $= o$, habes parabolam apollonianam osculantem curvam propositam. Si coefficiens u^2 sit $= o$, computato sequenti termino eadem methodo invenies parabolam cubicam; quod si etiam coefficiens u^3 sit $= o$, ad parabolas superiores quemadmodum antea devenies. Methodus hæc æque valet, quotiescumque in primo termino qui non deest in æquatione, existit factor simplex realis, qui non habeat æqualem. Etenim facta divisione per alterum factorem, qui ductus in $ax + by$ dat primum terminum æquationis, peractisque ut antea iisdem substitutionibus, semper inveniemus pro curva osculante æquationem ad parabolam hujus formæ $Mt = u^m$ existente m numero integro.

23. Quod si factores primi membri duo, aut plures fuerint æquales, res est altioris, ac difficilioris indaginis. Nam licet t debeat esse minima respectu u, tamen non possunt, quæmadmodum antea fecimus, omitti termini omnes, in quos ingreditur t, sed duntaxat illi, in quibus exponens t est æqualis, aut major numero factorum æqualium. Ut gradatim procedamus, proponamus æquationem $\overline{ax + by}^2 + Fx^3 + Gx^2y + Hxy^2 + Iy^3 + Kx^4$ &c. $= o$. Pro x substituto $\frac{-at + bu}{\sqrt{aa+bb}}$, pro y autem $\frac{-bt - au}{\sqrt{aa+bb}}$ proveniet redactis ad breviorem formam coefficientibus $tt + ctu^2 + du^3 + etu^3 + fu^4 + gtu^4 + bu^5$ &c. $= o$; nam manifestum est terminos ubi esset t^2, t^3 &c. respectu ad eos, qui scripti sunt, evanescere. Si $c = o$, non autem d, æquatio consistet in terminis $tt + du^3 = o$, quæ est ad parabolam secundam cubicam, & hæc est curva osculatrix. Si præterea tam d quam $e = o$, æquatio erit $tt + fu^4 = o$, quæ in duas potest re-

sol-

solvi nempe $t = \pm u^2 \sqrt{-f}$. Si f sit positiva, curva est imaginaria, & punctum est conjugatum. Si f sit negativa, duplex habetur parabola apolloniana curvam osculans una ad partem t positivæ, altera negativæ, cæterum utraque parabola eadem; atque ita progrediens nullescentibus terminas, in quibus adest t, parabolas osculantes determinabis.

24. Nunc ponamus c non $=0$, si neque $d=0$, patens est tu^2 minimam esse respectu u^3. Quare æquatio subsistet in terminis $tt+du^3=0$, ut antea. Verum si $d=0$, evanescente tu^3 respectu tu^2 æquatio consistet in terminis $tt+ctu^2+fu^4=0$, in qua si t, & u^2 ejusdem gradus ponantur, omnes termini inveniuntur ejusdem gradus. Si æquatio nullum habet factorem realem, indicat nullam esse curvam osculatricem, sed tantum ibi adesse punctum conjugatum. Si vero habeat duos factores reales, resolvetur in duas hujus formæ $t=Mu^2$, quæ indicant duos ramos curvæ, a duabus vulgaribus parabolis osculari; quæ duæ parabolæ in unam coeunt, quoties duo factores æquales sint. Si etiam $f=0$, evanescente tu^4 respectu tu^2 æquatio statuatur in terminis $tt+ctu^2+bu^5=0$. Si t, u^2 ejusdem gradus ponantur esse, u^5 respectu horum evanescet; quare æquatio duos tantum terminos complectetur $tt+ctu^4=0$, quæ divisa per t exhibet $t+cu^2=0$, quæ est ad parabolam apollonianam.

Si vero tt ponatur ejusdem gradus ac u^5, seu t ac $u^{\frac{5}{2}}$, tu^2 est infinite magna respectu reliquorum terminorum; ergo æquatio non potest subsistere. Ponamus t, & u^3 ejusdem gradus, tt respectu reliquorum terminorum evanescet, & æquatio versabitur inter ultimos duos nempe $ctu^2+bu^5=0$, seu $ct+bu^3=0$, quæ dat parabolam primam cubicam pro curva osculante alterum ramum. Idem dicas velim, si existente $b=0$ considerandus foret terminus u^6, atque ita deinceps.

25. Si c, & $d=0$ non autem e; si f non sit $=0$ evanescet tu^3 respectu u^4; Ergo æquatio $t^2=-fu^4$ quam paullo ante invenimus. Si $f=0$, evanescente tu^4 respectu u^5 tres termini erunt considerandi nempe $tt+etu^3+bu^5=0$. In hac alia non potest valere æquatio præter $tt+bu^5=0$, quæ exhibet parabolam osculantem. Si $b=0$ tres termini erunt considerandi, hoc est $tt+etu^3+ku^6=0$, qui omnes sunt homogenei, si t sit ejusdem gradus ac u^3. Æquatio vel nullum habet factorem realem, & indicat punctum conjugatum; vel duos factores reales habet, & ad duas parabolas erit formæ $t=Mu^3$, quæ duæ parabolæ duos osculantur curvæ ramos. Hæ autem in unam coeunt, si factores æquales sint. Si $k=0$, æquatio orietur $tt+etu^3+mu^7=0$, ex qua duæ eliciuntur æquationes nempe $tt+etu^3=0$ sive $t+eu^3=0$, quæ est parabola osculans unum

num ramum; tum $ttu^3 + mu^7 = o$, seu $tt + mu^4 = o$, quæ est parabola osculans ramum alterum; atque ita deinceps.

26. Quare in his casibus generalis æquatio prodibit $tt + Atu^p + Bu^q = o$, in qua p debet esse $< q$; si enim esset æqualis, aut major secundus terminus præ tertio evanesceret; p autem debet esse > 1, quia si esset æqualis, t non evanesceret respectu u. In æquatione si $q = 2p$, omnes termini sunt homogenei. Æquatio autem vel nullum habet factorem realem, & tunc indicat punctum conjugatum; vel duos habet factores inæquales, & tunc resolvitur in duas hujus formæ $t = Mu^p$, quæ dant duas parabolas osculantes; duæ autem parabolæ in unam conveniunt, si factores æquales sint. Si $2p > q$; æquatio sola resultat $tt + Bu^q = o$; quæ aut resolvitur in duas si q sit par, aut dat parabolam unam osculantem si q sit impar. Demum si $2p < q$; duæ valebunt æquationes hujus formæ $t + Au^p = o$, $At + Bu^{q-p} = o$, quæ præbent duas parabolas osculantes duos ramos curvæ in eodem puncto.

27. Si factor duplex $ax + by$ multiplicaretur per quamlibet aliam functionem integram x, y, eadem valeret methodus. Nam facta divisione, si substituantur pro x, y valores dati per t, u; manifestum est in divisore omnes terminos continentes t evanescere respectu ejus, qui complectitur solam u. Quare divisione peracta redibit æquatio habens eamdem formam quam superior.

28. Simili modo, si in primo æquationis membro factores æquales fuerint tres, perveniemus ad formulam $t^3 + At^2u^p + Btu^q + Cu^r = o$, in qua p non potest esse < 2, & est $p < q$, $q < r$. Si tam A, quam $B = o$, æquatio fiet $t^3 + Cu^r = o$, quæ dat speciem parabolæ osculantis. Si r foret divisibilis per 3, extracta radice cubica fiet $t = -u^{\frac{r}{3}} \sqrt[3]{C}$. Quum $\sqrt[3]{C}$ habeat unum valorem realem, & duos imaginarios, habebimus unam tantum parabolam osculantem curvam in puncto dato, in quo spectandum punctum conjugatum propter duos valores imaginarios $\sqrt[3]{C}$. Si $2p = q$, & $3p = r$, ex quibus nascitur tertia $3q = 2r$, existentibus t, u^p ejusdem gradus omnes termini sunt homogenei, neque ullus omitti potest. Formula vel habet unum factorem realem, & duos imaginarios & tunc simul cum puncto conjugato habebitur una parabola osculans formæ $t = Mu^p$; vel tres sunt factores reales, & tunc tres sunt parabolæ osculantes omnes formæ ejusdem; duæ autem, aut tres in unam coeunt, si duo, aut tres factores æquales sint. Si prædicta proportio inter exponentes locum non habet, unus, aut duo termini negligi poterunt, inter alios æquatione intercedente. Ut autem cognoscas inter quos terminos æquatio statuenda sit, hanc sequire methodum. Pone successive singula terminorum paria in eodem gradu; observa quid fiat reliquis terminis. Si in eodem gradu reperiantur esse, omitti non possunt, sed in æquationem ingredientur; si inveniantur minimi, hi omittantur & inter reliquos æquatio consistet; si unus ex illis respectu assumptorum infinitus proveniat, ea æquatio valere non potest, & reicienda est. Ita determinatis æquationibus parabolas omnes invenies, quæ curvam propositam osculantur in puncto dato. Eadem methodo procedendum, si factores æquales fuerint quatuor, quinque aut plures.

29.

29. Ex his, quæ hactenus tradita, atque explicata sunt, constat, nullum esse in curva punctum, in quo alicujus parabolæ vertex curvam non osculetur. Igitur diversæ curvaturæ genera jure optimo per diversa parabolarum genera possumus discriminare. In plura autem genera, prout res, ac methodus poscit, parabolas omnes tribuamus. In primo genere eas constituo, quæ continentur æquatione hujus formæ $t = Au^m$ existente m numero integro. Punctum, in quo hæc parabola curvam osculatur, est simplex. Si $m = 2$, curvatura comparabilis est cum curvatura circulari, neque quidquam habet singulare. Si $m = 3$, curva in eo puncto prædita est flexu contrario, & ex concava transit in convexam. Si $m = 4$, flexus contrarius apparet nullus; verum in hoc puncto solet spectari flexus contrarius duplex ita, ut curva transeat a convexa in concavam, tum a concava in convexam, quæ puncta flexus, ut ita dicam, invisibilis puncta *anguinea*, seu *serpentina* solent nuncupari. Si $m = 5$, iterum flexus contrarius visibilis, sed triplex spectatur, quia curva a concava fit convexa, tum iterum concava, iterumque convexa. Ita successive in casibus superioribus, ita ut numerus flexuum sit $m - 2$; si m sit par, punctum est serpentinum, & flexus invisibilis; si m sit impar, flexus contrarius apparet.

30. Secundi generis parabolæ præditæ sunt forma $t^2 = Au^m$, quæ ostendunt puncta dupla æquivalentia scilicet duobus punctis simplicibus. Si $m = 3$, (*Fig. 6*) prodibit cuspis primæ speciei, quæ a fig. *6* repræsentatur, in qua duo rami ad eamdem partem positi sibi mutuo convexitates obvertunt. Si $m = 4$, (*Fig. 7*) orietur forma figuræ 7., sed hæc nihil aliud est, nisi duplex parabola primi gradus. Generatim autem si m sit impar, rami parabolæ osculantis sunt ut in fig. *6*, si m par ut in fig. 7; verum in hoc secundo casu duplex est parabola formæ $t = Au^{\frac{m}{2}}$. Itaque punctum duplex in curva habetur, vel quum adest punctum conjugatum, vel quum curvam osculantur in eo duæ parabolæ generis primi, vel quum parabola osculans est generis alterius.

31. Parabolæ tertii generis exprimuntur ab æquatione $t^3 = Au^m$, punctum autem, ubi curvam hæ parabolæ osculantur est triplum. Si $m = 4$ figura est similis apollonianæ, si $m = 5$ adest flexus contrarius, si $m = 6$, provenit una parabola ordinis primi formæ $t = Au^2$, & propter duas alias æquationes imaginarias provenit punctum conjugatum duplum. Generatim si m sit impar, figura habet flexum contrarium, si par est similis apollonianæ. Verum si divisibilis sit m per 3, habebitur parabola generis primi simul cum puncto conjugato. Quare punctum triplum in curva habetur, vel cum parabola est generis primi simul cum puncto conjugato; vel quum tres adsunt parabolæ generis primi; vel quum una generis primi, alia generis secundi, vel quum una tantum generis tertii.

32. Ne tamen putes, methodum adhibitam demonstrare curvam reapse haberi, ejusque ramos ostendere. Hoc solum probat, eam parabolam osculari curvam, si curva adsit. Verum fieri potest, ut curva ejusque ramus imaginarius sit; quo in casu habebitur punctum conjugatum. Ostendamus hoc exemplo facili. Supponamus nos pervenisse ad æquationem $t^2 - \frac{2tu^2}{a} + \frac{u^4}{a^2} + \frac{u^6}{a^4} = 0$. Utentes me-

thodo hactenus usurpata, quum u^6 evanescat respectu reliquorum, æquatio consistet in terminis $t^2 - \frac{2tu^2}{a} + \frac{u^4}{aa} = o$, quæ habet duas radices æquales, nempe $t - \frac{u^2}{a} = o$. Si quis autem ex hoc inferret, haberi curvam in eo puncto, quod duplum est, ibiqui osculari a duabus parabolis apollonianis, quæ in unam coeunt, in errorem apertissimum laberetur, quia ibi nihil existit aliud præter punctum conjugatum duplum. Quod tibi constabit si æquationem propositam resolvas modo vulgari; nam invenies $t = \frac{u^2}{a} \pm \frac{u^3}{a^2}\sqrt{-1}$, quæ semper imaginaria est. Igitur ex nostra methodo hoc unice colligere potes, parabolam inventam esse osculantem, si curvæ sunt. Verum hæc potest esse imaginaria ratione eorum terminorum, qui propter exiguitatem omissi sunt. Quapropter nisi tibi constet curvam realem, ibi esse, oportet, ut per aliam methodum hoc investiges, antequam quidquam pronuncies.

33. Si æquatio proposita esset hujusmodi $t^2 - \frac{2tu^2}{a} + \frac{u^4}{a^2} + \frac{u^5}{a^3} = o$; tunc ut antea omisso ultimo termino inveniremus duas parabolas apollonianas osculantes, quæ in unam coeunt. Parabola apolloniana habet duos ramos, qui abscissam t complectuntur. Num propterea curva habet aut unum aut duplex par ramorum complectentium abscissam t? Qui hoc putaret, laberetur in paralogismum, quia duo rami ad partes u positivæ evadunt imaginarii, realibus existentibus duobus, qui ad partem u negativæ positi sunt. Nam si resolvas æquationem, invenies $t = \frac{u^2}{a} \pm \frac{u^2\sqrt{-u}}{a\sqrt{a}}$. Hæc si u sit positiva est imaginaria, si u sit negativa est realis, & duplex valor t duos ramos ostendit. Rami itaque A B, A C sese habebunt, ut in figura octava. Utrumque autem ramum osculatur eadem parabola apolloniana. Ex hoc exemplo apparet, cur possibilis sit cuspis secundi generis, in qua scilicet convexitas unius rami obversa est alterius cavitati, de quo diu multumque certatum est. Hoc non ideo accidit, quia parabolæ osculantes hanc figuram habere possint, certum enim est, hoc evenire non posse, quia una parabola non potest habere ramos ita constitutos; duæ habent semper duos ramos alios, qui conjunguntur cum hisce. Caussa cur hæc cuspis haberi possit in curva est, quia ratione terminorum sequentium duo rami ad partes ordinatarum positivarum fiunt imaginarii, dum reales sunt illi, qui jacent ad partes ordinatarum negativarum, aut viceversa.

34. Quandoquidem omnium parabolarum curvaturam in vertice esse proprii generis constat, videamus quænam sint curvaturæ earumdem parabolarum in aliis punctis. Ut brevitati consulam æquationem parabolarum æcumenicam ita expono $a^{n-1}p = q^n$ supposita n majore quam unitate. Quare sumptis coordinatis $p+x$, $q+y$, fiet $a^{n-1} \cdot \overline{p+x} = \overline{q+y}^n$, sive evoluto binomio in seriem

riem $a^{n-1}p+a^{n-1}x=q^n+nq^{n-1}y+\frac{n.\overline{n-1}}{2}q^{n-2}y^2+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}q^{n-3}y^3$ &c. detractaque prima ex hac secunda æquatione

$$a^{n-1}x=nq^{n-1}y+\frac{n.\overline{n-1}}{2.}q^{n-2}y^2+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}q^{n-3}y^3 \text{ \&c. sive}$$

$$a^{n-1}x-nq^{n-1}y-\frac{n.\overline{n-1}}{2}.q^{n-2}y^2-\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{2.3}q^{n-3}y^3 \text{ \&c.}=o.$$

Quando positis x, y minimis, y^3 evanescit respectu y^2, æquatio subsistet in terminis $a^{n-1}x-nq^{n-1}y-\frac{n.\overline{n-1}}{2}q^{n-2}y^2=o$. Quoniam autem ex æquatione parabolæ $q^{n-1}=\frac{a^{n-1}p}{q}$, $q^{n-2}=\frac{a^{n-1}p}{q^2}$, [illegible] $x-\frac{npy}{q}-\frac{n.\overline{n-1}}{2}.\frac{py^2}{q^2}=o$, sive $qx-npy-\frac{n.\overline{n-1}.py^2}{2q}=o$. Ut æquatio trasferatur ad abscissas sumptas in recta normali tangenti, ponendum est $x=\frac{qt-npu}{\sqrt{qq+n^2p^2}}$, $y=\frac{npt+qu}{\sqrt{q^2+n^2p^2}}$ existente t minima respectu u. Fiet autem æquatio

$$t\sqrt{q^2+n^2p^2}-\frac{n.\overline{n-1}.p}{2q}.\frac{q^2u^2}{q^2+n^2p^2}=o, \text{ aut}$$

$$\frac{t.\sqrt{q^2+n^2p^2}.\overline{q^2+n^2p^2}}{\frac{n.\overline{n-1}}{2}.pq}=u^2,$$ quæ est ad parabolam apollonianam. Igitur curvatura in omnibus punctis cujuscumque parabolæ, excepto vertice, est ejusdem generis ac curvatura verticis parabolæ apollonianæ, hoc est ac curvatura circularis.

35. Verum ut harum curvaturarum ideam efformemus clariorem, ponamus p esse minimam ita, ut punctum, in quo quæritur curvatura parabolæ, sit vertici infinite proximum. Patet ex natura parabolæ, p fore minimam, atque adeo nullescere respectu q. Ergo nascetur æquatio $\frac{q^2.t}{\frac{n.\overline{n-1}.p}{2}}=u^2$. Si p sit ejusdem gradus ac q^2, ut evenit in parabola apolloniana, parameter parabolæ osculantis finita est. Si p sit minima respectu q^2, quod accidit quotiescumque est $n>2$, parameter parabolæ evadit infinita. Quapropter si accipias minimum arcum A B, A (*Fig.* 9) est vertex parabolæ; tum sumas arcus B C, B c, qui ad arcum A B habeant minorem rationem quacumque data; tum ducas B H tangenti normalem;

postremo circa axem BH, parametro infinita, cujus valor dependet ab arcu AB; describis parabolam apollonianam DBd, arcus DBd osculabitur arcum CBc, & ordinatæ horum arcuum normales BH non different inter se nisi quantitate relate ad ipsas minima. Si vero p infinita sit respectu qq, quod accidit, quoties n fit < 2, tunc parameter parabolæ apollonianæ osculantis minima evadit. Itaque si accipias arcum minimum AB, (*Fig.* 10) tum sumas arcus BC, Bc, qui minimi sint respectu AB, parabola apolloniana, cujus vertex sit B, & parameter infinite parva dependens ex quantitate arcus AB, osculabitur in B parabolæ arcum CBc. Ex his colligas velim, puncta illa, in quibus arcus curvatura diversa est a curvatura verticis parabolæ apollonianæ, sive a curvatura circulari, esse puncta prorsus singularia. Etenim in quibuslibet aliis punctis, quantumvis volueris, proximis, curvatura est ejusdem generis, ac curvatura verticis parabolæ apollonianæ, seu circuli, tametsi radius circuli, aut parabolæ parameter augeatur, vel minuatur in infinitum.

CAPUT DECIMUM.

De figura linearum curvarum in spatio finito.

1. Facilius est cognoscere, & determinare positionem, & naturam ramorum in infinitum extensorum, quam figuram curvarum in spatio finito. Etenim ad hanc definiendam hæc una suppetit methodus, ut scilicet pro quacumque abscissæ valore singuli ordinatæ valores inveniantur, & reales secernantur ab imaginariis; quod identidem vires cognitæ analyseos excedit, præsertim si sit altioris gradus æquatio. Nam si determinatus valor abscissæ tribuatur, ordinata vicem tenebit incognitæ in æquatione, cujus gradus pendet a numero dimensionum, quem obtinet eadem ordinata. Juvabit sæpenumero mutare lineam, & initium abscissarum, ut in æquatione curvæ alterutra ex coordinatis, quæ tamquam ordinata habenda erit, minimam obtineat dimensionem, & expeditissima evadat resolutio. Postquam autem hoc perfeceris, quo pacto figura curvæ definiri possit, ostendam gradatim, incipiens a casu maxime simplici, ubi ordinata y unius est dimensionis.

2. Quotiescumque y linearem obtinet dimensionem, & æqualis statuatur functioni rationali x, manifestum est, curvam haberi ita continuam, ut cuicumque valori x una tantum y respondeat vel negativa, vel positiva. Si y æqualis sit functioni non solum rationali, sed etiam integræ x, quam voco P, docuimus Cap. 6 Num. 4, curvam præditam esse duobus ramis infinitis generis parabolici. Si P nullum habeat factorem simplicem realem, quod contingere non potest, nisi maximum exponens x in P sit par, nusquam secabit lineam abscissarum. Si vero adsint factores simplices reales, quot isti sunt, tot in punctis secabitur linea abscissarum; quibus determinatis da operam, ut quomodo inter hæc puncta progrediatur curva, cognoscas, atque ad maximas minimasque ordinatas, & ad diversa contactuum genera attende. Unico exemplo casum hunc maxime simplicem illustrabo.

3. Proponatur construenda curva æquationis $y = \frac{x.\overline{x+a}.\overline{x-b}}{aa}$. Duos ramos statim infinitos BF, CG (*Fig.* 1) determino generis parabolici, quorum sunt

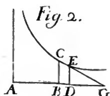


Fig. 2.

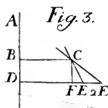


Fig. 3.

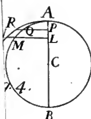


Fig. 4.

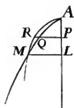


Fig. 5.


Fig. 7.

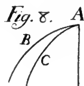


Fig. 8.

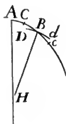


Fig. 9.



Fig. 10.

sunt asymptota rami parabolæ æquationis $y = \frac{x^3}{a^2}$. Primus habet ordinatas & abscissas positivas, alter negativas. Quoniam functio integra x tres habet factores simplices reales, hoc est x, $x+a$, $x-b$, facto A abscissarum initio, abscindo ad partes x positivæ $AB = b$, ad partes negativæ $AC = a$, curva transibit per tria puncta A, B, C. Quæramus tangentes in hisce punctis. Tangens puncti A efficiet angulum cum AB, cujus sinus est ad cosinum ut $b:a$; tangens puncti B concurret in angulo, cujus sinus ad cosinum ut $b.\overline{a+b}:a^2$; in puncto vero C sinus ad cosinum anguli ut $\overline{a+b}:a$. A puncto A usque ad B ordinatæ sunt negativæ, a B deorsum positivæ usque in infinitum, ab A ad C positivæ, tum usque in infinitum negativæ. Si abscindas $AK = \frac{-a+b+\sqrt{aa+ab+bb}}{3}$, & $AH = \frac{a-b+\sqrt{aa+ab+bb}}{3}$ invenies puncta K, H, quibus maximæ ordinatæ partium BDA, AEC respondent. Demum si seces $AL = \frac{a-b}{3}$, & ducas LI, in puncto I curva prædita erit flexu contrario, vertex autem parabolæ primæ cubicæ osculabitur curvam in puncto I. Reliquorum punctorum curvatura, nihil habet peculiare. Si $b = a$, punctum flexus I transiret in A. Si $b = o$, pars BDA evanescit, & ramus F (*Fig.* 2) tanget lineam CA; linea AL, cui respondet flexus contrarius erit $= \frac{a}{3}$, linea AH ubi maxima est ordinata, erit $= \frac{2a}{3}$.

4. Si y æquet constantem divisam per functionem rationalem x, quam voco Q, ut sit $y = \frac{A}{Q}$, vel Q continet factores simplices reales, vel secus. Si nullos habet, nullum erit curvæ asymptotum ordinatis parallelum. Si habet aliquos, tot erunt asymptota ordinatis parallela, quot factores reales. Hæc asymptota determina, tum quid inter hæc asymptota accidat curvæ, diligenter inquire, ut ejus figuram invenias. Exemplum habe in æquatione $y = \frac{a^3}{\overline{x-a}.\overline{x+b}}$, in qua, quum divisor habeat duos reales factores simplices, duo curva habebit asymptota parallela ordinatis. Sit A initium abscissarum, seca $AB = a$ (*Fig.* 3) ad partes x positivæ, ad partes negativæ $AC = b$, & per C, B duc MI, NL ordinatis parallelas, quæ erunt asymptota. Inter A, & B, pariter inter A, & C ordinata provenit negativa; quare nascetur ramus NFM, cui una minima ordinata convenit. Hæc determinabitur si CB dividatur bifariam in D; ordinata enim in hoc puncto est omnium minima. Post punctum B, item post punctum C ordinatæ inveniuntur positivæ; prope puncta B, C sunt infinitæ, tum decrescunt, & abscissis in infinitum auctis, ipsæ in infinitum minuuntur. Itaque orientur duo rami LK, IH, utrique est asymptotum KH, primo BL, alteri CI. Genera asymptotorum aliis determinanda relinquo.

5. Si $y = \frac{P}{Q}$; P, Q sunt functiones integræ, & rationales x, observandum est, quot factores reales adsint in quantitatibus P, Q. Quot sunt in P, tot habebn-

bentur puncta, in quibus curva lineam abſciſſarum ſecat; quot ſunt in Q, tot definiuntur puncta, per quae tranſeunt aſymptota parallela ordinatis. Exemplum ſit in aequatione $y = \frac{x\cdot\overline{x+a}\cdot\overline{x-b}}{\overline{x-a}\cdot\overline{x+b}}$. Sit A (*Fig.4*) initium abſciſſarum, abſcinde $AC = b = AE$, $AB = AD = a$. Per puncta E, B duc lineas parallelas ordinatis KG, IL; curva tranſibit per tria puncta D, A, C, & erit lineis KG, IL aſymptotica. Quoniam facta x vel poſitiva, vel negativa infinita, y infinita eſt poſitiva, & negativa, exiſtunt duo rami in infinitum recedentes, quibus erit aſymptotum rectilineum. Determinatur autem hoc aſymptotum, ſi abſcindatur $AF = 2a - 2b$, & ex puncto F agatur linea FH efficiens angulum BFH ſemirectum. Intra angulum GNH progreditur curva GH, cui utrumque crus eſt aſymptotum. Intra aſymptota IE, KB progreditur pars IACK, quae tranſit per puncta A, C. Demum per D tranſit pars, quae ad partem L accedit ad aſymptotum EL, ad partem M ad aſymptotum PFM.

6. In aequatione $y = \frac{a^4 + x^4}{a\cdot\overline{a^2+x^2}}$ propono aliud exemplum, in quo neque numerator, neque denominator fractionis habet ullum factorem ſimplicem realem; quare curva nuſquam ſecat lineam abſciſſarum, neque habet ullum aſymptotum ordinatis parallelum. Adverto $y = a$, ſi fiat vel $x = o$, vel $x = \pm a$. Sit initium abſciſſarum A (*Fig.5*); ad utramque partem abſcinde $AC = AD = a$. Ordina $AB = CE = DF = a$; curva tranſibit per puncta B, E, F. Si ſumatur x vel poſitiva, vel negativa minor, quam a, fiet $y < a$; imo ſecta $AG = AH = a\sqrt{-1+\sqrt{2}}$, ordinata fit omnium minima, & invenitur $= 2a\sqrt{2} - 2a$. In puncto A ordinata AB eſt maxima. Quapropter curva a B, ubi habet tangentem parallelam abſciſſis, eiſdem obvertit concavum, tum poſt flexum contrarium in aliquo puncto M abſciſſis obvolvit convexum, eiſdem ſemper appropinquans uſque ad I, tum recedit, & fertur ad punctum E. Idem dic de altero ramo BNKF. Demum poſt puncta E, F in infinitum recedit per duos ramos generis parabolici.

7. Si in aequatione y ad ſecundam poteſtatem aſcendat, ut nuſquam poteſtas prima reperiatur, tunc extracta radice aequatio hanc formam induet $y = \pm\sqrt{P}$, in qua P eſt functio rationalis x vel integra, vel fracta. Perſpicuum eſt y ubique habere duos valores aequales alterum poſitivum, alterum negativum. Quare linea abſciſſarum biſariam partietur chordas omnes parallelas, atque adeo erit diameter, imo axis ſi angulus ſit rectus. Curva non erit ſemper continua, quia pluribus in locis contingere poteſt, ut P evadat negativa, quo in caſu y, atque adeo curva ſit imaginaria. Caeterum quoad puncta, in quibus curva ſecat lineam abſciſſarum, aut habet aſymptota parallela ordinatis, eadem ac antea regula tenenda eſt. Exemplum ſufficiat aequatio $y = \pm\sqrt{\frac{aa\cdot\overline{a-x}}{x}}$. Per A (*Fig.6*) initium abſciſſarum duc parallelam ordinatis indefinitam KH, haec erit aſymptotum curvae. Abſcinde $AB = a$, per punctum B curva tranſibit, in quo puncto tangens erit normalis AB. Si x ſit minor $AB = a$, y, & curva

rea-

realis est, & quo x est minor, y est major. Abscinde $AD = \frac{3}{4}a$, cui respondet $y = DE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, in puncto E habebitur flexus contrarius. Quare curva obvertens abscissis concavum progredietur a B ad E; tum sese flectens, & obvertens convexum accedet ad asymptotum AH. Pars BFK prorsus similis existat ad plagam ordinatarum negativarum. Si x sit aut $> a$, aut negativa, ordinata y, & curva evadit imaginaria. Quod si æquatio proposita fuisset $y = \pm \sqrt{\frac{aa.\overline{x-a}}{x}}$, secta $AB = AC = AD = a$, (*Fig.* 7) ductisque per CD indefinitis HE, LF, quæ sint parallelæ abscissis, curva ab A ad B erit imaginaria; deinceps incipiens a B in infinitum progredietur per duos ramos BE, BF, quibus sunt asymptoti CE, DF. Ad plagam autem x negativæ, prædita est ramis duobus HG, LI sitis inter angulos HCG, LDI, quorum asymptota sunt crura angulorum.

8. Aliud exemplum præbeat æquatio $y = \sqrt{\frac{x.\overline{x-a}.\overline{2a-x}}{a}}$, (*Fig.* 8) in qua quum tres sint factores simplices $x, x-a, 2a-x$, in tribus punctis linea abscissarum secabitur. Sit A initium abscissarum, seca $AB = BC = a$. Si sit $x < a$, unus tantum ex tribus factoribus negativus est; ergo y, adeoque curva imaginaria. A puncto A ad punctum B nihil existit curvæ. Si x sit $> a$, $< 2a$, factores omnes sunt positivi; existente igitur y reali orietur ovalis BECF. Si $x > 2a$, duo primi factores sunt positivi, tertius negativus; ergo omnia imaginaria. Si x ponatur negativa, in A hinc inde descedunt duo rami infiniti AH, AK generis parabolici, qui primum concavi sunt ad abscissas, deinde convertuntur in convexos. Maximam ovalis ordinatam habebis, si abscindas $BD = \frac{a}{\sqrt{3}}$, flexum vero contrarium, si seces $AG = a\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}$.

9. Si in æquatione præter yy adsit y, resoluta æquatione secundi gradus, hujus formæ occurret æquatio $y = P \pm \sqrt{Q}$ in qua P, Q sunt functiones rationales x vel integræ, vel fractæ. Ut formam curvæ detegas, hanc sequere methodum. Pone $z = P$, $u = \sqrt{Q}$, ut sit $y = z \pm u$. Curvarum hisce æquationibus respondentium figuram detege. Eæ autem sint A E, C F, (*Fig.* 9) in quibus $AB = CD = x$, $BE = z$, $DF = DG = u$. Singulis ordinatis BE, adde, & deme EH, & $EK = DF$, & puncta H, K erunt in curva quæsita. Hoc si in singulis punctis efficies, curvæ figuram patefacies. Ex hoc operandi modo colligas velim, lineam AE dividere bifariam omnes parallelas KH. Exemplum sufficiat æquatio maxime simplex $y = \frac{a}{b}x \pm \sqrt{ab - xx}$. Æquatio $\frac{a}{b}x = z$ est ad lineam rectam, quæ ita construitur. Sume $AB = b$, $BC = a$ (*Fig.* 10) junge AC, hic erit locus; & existente $AK = x$, erit $KL = z = \frac{ax}{b}$. Altera æquatio $uu = ab - xx$, si coordinatarum angulus rectus est, dat circulum. Radio igitur $FG = \sqrt{ab}$ describe circulum, erunt $FH = x$, $HI = u = \sqrt{aa - xx}$.

Qua-

Quare sectis ubique $AK = FH$, duc ordinatam KL, in qua ad utramque partem sume $LM = LN = HI$, puncta M, N erunt in curva quæsita, quæ invenietur esse ellypsis conica. In hoc artificio fundata est methodus construendi locos geometricos, quam proposuit Jacobus Hermannus, quamque perfecit Vincentius Riccatus in primo Opusc. Tomo opusculo ultimo.

10. Alterum exemplum sufficiat æquatio $y = \frac{aa}{x} + a \pm \sqrt{\frac{aa.\overline{a-x}}{a}}$. Æquatio $\frac{aa}{x} + a = z$ est ad hyperbolam apollonianam, quæ ita describitur. Accipe $CG = GM = a$, (*Fig.* 11) & inter asymptota CG, CH describe hyperbolam. Produc HC in I, donec $CI = a$, & duc IL parallelam CG, erunt $IN = x$, $NQ = \frac{aa}{x} + a$. Secundæ æquationis $u = \sqrt{\frac{a^2.\overline{a-x}}{x}}$ curva descripta est N. 7. & exhibita est a fig. 6. Seca ubique $IN = AD$, (*Fig.* 6) ductaque NQ, accipe $QP = QO = DE$, puncta P, O erunt in curva quæsita, quæ discedet a puncto M, in quo tangetur a recta GM, & per duos ramos MPH, MOH progrediens accedet ad asymptotum CH. Si abscindas $IN = \frac{3}{5}a$, & ducas ordinatam NOP; in utroque puncto O, P tangens curvæ erit parallela abscissis. In O habebit minimam ordinatam NO, in P prædita erit flexu contrario.

11. Tertium exempium præbeat æquatio $y = \frac{xx}{a} \pm \sqrt{a.\overline{a+x}}$. Facta $xx = az$ habetur parabola FAG, (*F.* 12) cujus vertex A, parameter $= a$, tangens AB, in qua sumuntur abscissæ $= x$. Ad æquationem $u = \sqrt{a.\overline{a+x}}$ construendam abscinde $AC = a$, & vertice C describe eamdem parabolam CE, cujus vertex C, axis CAB. Demum singulis punctis t parabolæ FAG ad utramque partem accomoda tn, ts æquales ordinatæ ur; puncta n, s erunt in curva quæsita. Hæc prædita erit ramis duobus, quorum uterque initium habet in puncto F, in quo tangitur a CF. Alter est $FmlnDP$, qui secat rectam FH parallelam abscissis in punctis I, D, tum in infinitum progreditur per DP. Alter venit ad contactum parabolæ in puncto E, secat FD in H, & abit in infinitum.

12. Quod si y æqualis inveniatur duabus radicibus quadratis, eadem est tenenda methodus. Fac enim unam radicem $= z$, alteram $= u$. Duas curvas construe, utriusque abscissæ $= x$, ordinatæ vero in una $= z$, in altera $= u$. Tum singulis ordinatis unius curvæ adde, & deme ordinatas alterius, & puncta determinabis curvæ quæsitæ. Exemplum sit $y = \pm\sqrt{2ax - xx} \pm \sqrt{ax - xx}$. Describe circulum $AGBH$ (*Fig.* 13) æquationis $z = \sqrt{2ax - xx}$, cujus radius $CA = a$, erunt $AF = x$, $FG = z$. Item describe circulum AIC æquationis $u = \sqrt{ax - xx}$, cujus diameter $CA = a$. Tum singulis punctis G primi circuli ad utramque partem applica GL, $GM = FI$ ita, ut ordinatæ FG augeantur, & imminuantur per ordinatas FI, puncta L, M erunt in curva quæsita. Quæ curva duobus foliis continetur, nempe $ALDMA$, $AOENA$. Rami omnes tangunt circulum in A. Diameter autem ECD tangit curvam in punctis D, E. Si accipias $AP = \frac{2}{3}a$, & ducas ordinatam PSQ; PQ erit

ordinata omnium maxima. In puncto S tangens erit parallela abscissis, & curva prædita erit flexu contrario. Idem dic de curva posita ad plagam ordinatarum negativarum. Quadrans AD dividit bifariam omnes chordas ML, quæ continentur intra ramos ALD, AMD. Semicirculus autem AIC dividit bifariam cordas omnes OL, quæ continentur inter ramos ALD, AOE.

13. Alterum exemplum præbet æquatio $y = \pm\sqrt{xx-aa} \pm \sqrt{a.\overline{b+x}}$. Construe æquationem $u = \pm\sqrt{xx-aa}$, quæ est ad hyperbolam æquilaterem. Facto C (*Fig.* 14) centro sume $CB = CD = a$, & verticibus B, D describe hyperbolam æquilateram HBG, NDO. Tum specta æquationem $z = \pm\sqrt{a.\overline{b+x}}$, quæ est ad parabolam, atque hoc modo construitur. Abscinde $DA = b$, & vertice A, parametro $= a$ describe parabolam HAG, quæ secabit hyperbolam in quatuor punctis K, I, G, H, quæ jungantur lineis IK, GH secantibus axem in punctis F, E. Si singulis hyperbolæ ordinatis addantur, & detrahantur respondentes ordinatæ parabolæ, determinabuntur singula puncta curvæ describendæ. Per vertices hyperbolæ, & parabolæ agantur tangentes MBL, QDP, OAN. Curvæ figura est hujusmodi: supra puncta D, A curva est imaginaria, intra puncta A, D nodum haber transeuntem per punctum F, nempe NFQOFPN, qui tancitur a rectis ON, QP. Intra puncta D, B curva imaginaria. Demum post hæc puncta quatuor ramis in infinitum progreditur, qui initium habent in punctis M, L, ubi tanguntur a recta ML. Duo interni sese invicem, & axem secant in puncto E. Si $b = o$, & vertices D, A coinciderent, nodus desineret in punctum conjugatum.

14. Si y inveniretur æqualis quantitati rationali additis duabus radicibus, describatur curva, cujus ordinatæ æquales fiat quantitati rationali, addita una radice per methodum expositam; tum delineata altera curva, cujus ordinatæ æquales fint residuæ radici, hujus ordinatæ addantur, & demantur ex ordinatis primæ; atque ita determinantur puncta singula curvæ describendæ. Idem dicas velim, si y tribus radicibus esset æqualis. Imo aucto radicum numero eadem methodus gradatim valet.

15. Spectavi solas quantitates rationales, & radices secundas quantitatum rationalium. Verum eadem applicanda sunt quibuscumque radicibus quantitatum rationalium. Nam si impares fuerint, unum tantum valorem realem semper habebunt; si pares, vel duos æquales unum negativum, alterum positivum, vel duos imaginarios. Quare eo pacto tractantur, quo quantitates rationales, & radices secundæ.

16. Major difficultas occurrit, in invenienda figura curvæ, quum y invenitur æqualis radici, quæ aliam radicem includat. Nam nulla alia methodus suppetit nisi determinare veros valores y, suppositis pluribus valoribus x; atque hoc modo inspicere quo pacto curva progrediatur. Exemplum propone in formula maxime simplici $y = \pm\sqrt{aa + xx \pm \sqrt{a^4 - x^4}}$. Fiat

$x = o$, & provenit $y = \pm a\sqrt{2}$, $y = o$

$x = \pm a$ $\quad y = \pm a\sqrt{2}$

$x > \pm a$ $\quad y$ semper imaginaria

$x = \frac{1}{2}a$ $\quad y = \pm\frac{a}{2}\sqrt{5+\sqrt{15}}$, $y = \pm a\sqrt{5-\sqrt{15}}$, atque ita

Zz. in

in reliquis valoribus. Quod si facias $x = \pm \frac{a}{\sqrt{\sqrt{2}}}$, fiet $y = \pm a\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $y = \pm a$. Ordinata autem $= a\sqrt{1+\sqrt{2}}$ est omnium maxima. His inspectis figura curvæ sese manifestat. Posito A (*Fig.* 15) abscissarum initio, abscinde AB = AC = a. Ex punctis A, B, C ductis normalibus, seca AD = AE = BH = BK = CF = CG = $a\sqrt{2}$. Demum sumptis AI = AL = $\frac{a}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ fiant IM = IN = LO = LP = $a\sqrt{1+\sqrt{2}}$, in quibus seca IQ = IR = LS = LT = a. Curva ex A procedet ad Q, veniet ad contactum BH in H, tum per M transibit, quo in puncto maxima erit ordinata, demum veniet ad D, ubi tangetur a recta AD. In singulis autem plagis quatuor partes habebit similes, & æquales.

17. Quod si eveniat, ut æquatio tam altæ dimensionis sit & ejusmodi, quæ nullam resolutionem ex cognitis analyseos regulis admittat, nulla suppetit methodus cognoscendi, qua figura prædita sit in spatio finito. De proprietatibus curvarum ex æquatione deducendis egregie scripsit in introductione ad analysim infinite parvorum Leonardus Eulerus vir ingeniosissimus, cujus inventa magnam nobis attulisse utilitatem fatemur. Dignissimus pariter est, qui legatur, liber egregius hisce de rebus editus a Cramero, qui tamen longe diversa utitur methodo.

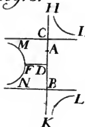
CAPUT UNDECIMUM.

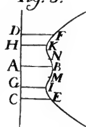
De resolutione, & constructione æquationum per intersectiones curvarum.

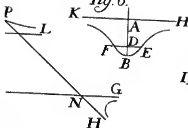
1. Libro superiore capite decimo criterium tutum exhibui, per quod cognoscimus, quibusnam in casibus tot sint in duabus curvis puncta intersectionis, quot in æquatione determinata radices reales, ut tuto, ac sine paralogismo per hanc methodum easdem radices determinemus. Criterium, quod potissimum lineis primi, & secundi gradus aptavi, augendum est, atque ad omnes omnino curvas transferendum. Curva, cujus æquatio contineat solam y linearem, conjuncta cum curva cujuscumque gradus, tot habet intersectiones, quot sunt radices reales. Quantitates P, Q, R &c. p, q, r &c. datæ ponuntur per x, & constantes. Sit æquatio $P + Qy = o$, & $p + qy + ry^2 \ldots . ty^m = o$. Quis non videt, quemcumque valorem realem positum pro x in P, Q præbere valorem realem y; ergo quælibet radix realis æquationis, quæ prodit eliminata y, posita in P, Q præbebit valorem realem; igitur non potest esse imaginaria illa ordinata, quæ æqualis est ordinatæ secundæ æquationis; tot igitur sunt intersectiones, quot radices reales. Quare si æquationem construas per curvam, in cujus æquatione y sit dimensionis linearis, quæcumque sit alia curva, radices omnes per intersectiones obtinebis.

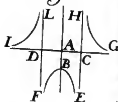
2. Hoc idem dicere non licet de æquatione continente quadratum yy, ut $P + Qy + Ry^2 = o$. Nam plures sunt valores x, qui introducti in quantitates


Fig. 2.
G
C
H
E
L
I
A
F

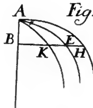

Fig. 3.
H
C
I
M
A
F D
N
B
L
K

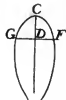

Fig. 5.
D
F
H
K
N
A
B
M
G
I
C
E


Fig. 6.
P
L
K
H
A
D
F
E
B
G
N
H


Fig. 7.
L
H
I
A
G
D
B
C
F
E


H


A
Fig. 9.
B
E
K
H


C
G
D
F

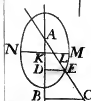

A
N
K
L
M
D
E
B
C


Fig. 10.
F
H
I
G

Fig. 12.

Fig. 14.

P, Q, R, æquationem præbent, quæ utramque radicem habet imaginariam. Quare contingere poteſt, ut ordinatæ duæ æquales, quæ in duabus curvis reſpondent eidem abſciſſæ reali, ſint imaginariæ, ac proinde ut nulla ibi habeatur interſectio realis, ubi realis eſt abſciſſæ valor. Conſtructio itaque, quæ per has curvas peragitur dubia eſt, quum numerus interſectionum minor ſit numero radicum realium. Verum ſi per methodum toties uſurpatam, eliminando ſcilicet poteſtates y incipiendo ab altioribus devenire poſſis ad æquationes duas, in quibus y linearem teneat dimenſionem, atque hujuſmodi æquationes nullum habeant factorem communem, accidere non poterit, ut ordinatæ æquales ſint imaginariæ. At ſi alterutrum accidat, de conſtructione dubitare debemus.

3. Quamquam methodus ejiciendi poteſtates y incipiendo ab altioribus, & inveniendi æquationes duas continentes ſolam y explicata eſt ſæpius; tamen non pigebit hic addere exemplum, ne quid obſcurum relinquatur.

I. $P+Qy+Ry^2=o$

II. $p+qy^3+ry^4=o$

III. $Rp-Pry^2+\overline{Rq-Qr}.y^2=o$.

IV. $R^2p-P.\overline{Rq-Qr}y+P.\overline{Rr-Q.\overline{Rq-Qr}}.y^2=o$
$R^2p-P.\overline{Rq-Qr}\,y+My^2=o$

V. $PM-R^3p+\overline{QM+PR.\overline{Rq-Qr}}.y=o$
$m+Ny=o$

VI. $PN+\overline{QN-Rm}.y=o$

Aſſumo duas æquationes, in quarum prima y aſcendit ad ſecundam, in altera ad quartam poteſtatem; Primam multiplicatam per ry^2 detraho a ſecunda multiplicata per R, & oritur tertia A. tertia multiplicata per R demo primam ductam in $\overline{Rq-Qr}.y$, ut oriatur quarta, quæ ſimplicior fiet, ſi facias $PRr-Q.\overline{Rq-Qr}=M$. A prima multiplicata per M deduco quartam ductam in R, ut oriatur quinta, quæ ſimplicior evadet facta $PM-R^3p=m$, $QM+PR.\overline{Rq-Qr}=N$. Quintam multiplicatam per Ry detraho a prima multiplicata per N, ut demum oriatur ſexta. Si in æquatione quinta fuerit $N=o$, prodibit etiam $m=o$, ex qua æquatione determinantur omnes valores reales x. Hi ſi introducantur in æquationem primam, aut quartam, data reperietur y in æquatione ſecundi gradus, atque adeo accidere poterit, ut ſit imaginaria. In hoc caſu plures eſſe poſſunt radices reales x, quam interſectiones, neque conſtructio numerum radicum realium tuto determinat. Si non ſit $N=o$, adverte, utrum in æquationibus quinta, & ſexta factor communis reperiatur. Si adſit, quum ad inveniendum valorem y radix realis, quæ oritur ex hoc factore æquato o, ponenda ſit in æquatione ſecundi gradus, prodire poteſt y imaginaria, & dubitandum de conſtructione. Si nullus ſit duarum æquationum factor communis, tot erunt interſectiones reales curvarum, quot radices reales æquationis, quæ eliminata y exoritur, & per interſectiones numerus radicum realium tuto determinatur.

4. Quod dictum eſt de æquatione includente y^2, idem dicendum de illis, quæ continent y^3, y^4, y^5 &c., quarum curvæ conjunctæ cum alia cujuſcumque gra-

lati quadrati radice, duæ curvæ adhibendæ ſunt, quarum gradus unitate ſuperet gradum a radice indicatum. Ita in æquatione gradus 11 auferatur maximum quadratum 9, ut reſiduus ſit numerus 2, qui eſt minor 3 radice quadrati 9; æquatio itaque conſtruitur per duas curvas alteram gradus tertii, alteram gradus quarti. In æquatione vero gradus decimitertii, dempto a 13 quadrato maximo 9, remanet 4, qui eſt major 3 radice 9; duæ curvæ igitur adhibendæ erunt ambæ gradus quarti.

8. Ut hæc regula utilitatis laudem aliquam ſibi vindicet, analyſtæ doceant oportet, quo pacto æquationes omnes cujuſcumque gradus ſervata regula conſtruantur. Quantum ſpectat ad æquationem ſexti gradus, ad quam reducetur æquatio gradus quinti facta multiplicatione per x, res caret omni difficultate. Nam ſit æquatio $x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=o$ conſtruenda per duas alteram ſecundi, alteram tertii gradus. Fiat $x^2=y$, factaque opportuna ſubſtitutione orietur $y^3+ay^2x+by^2+cyx+dy+ex+f=o$, quæ eſt tertii gradus, neque difficilis conſtructionis, quia x linearem ſolum obtinet dimenſionem. Si adhibuiſſes ſubſtitutionem $x^3=y$, quæ pertinet ad æquationem tertii gradus, orietur $y^2+ayx^2+byx+cy+dx^2+ex+f=o$, quæ pariter eſt tertii gradus. Verum ſi æquatio propoſita ſecundo termino careret, quod ſemper obtinere poſſumus, & $a=o$, ultima æquatio eſſet ſecundi gradus, & ad ſectionem conicam pertineret. Igitur utroque modo ſexti gradus æquatio conſtruitur per duas curvas ſecundi, & tertii gradus.

9. Progredior ad æquationem gradus noni, ad quam facta multiplicatione per xx, aut x reducitur æquatio gradus ſeptimi, & octavi. Hæc debet conſtrui per duas curvas tertii gradus. Sit æquatio $x^9+ax^8+bx^7+cx^6+dx^5+ex^4+fx^3$ &c. $=o$. Pone $x^3=y$, ut oriatur $y^3+ay^2x^2+by^2x+cy^2+dyx^2+eyx+fy$ &c. $=o$, quæ eſt quarti gradus. Verum ſi ſecundus terminus arceatur, & $a=o$, fit gradus tertii, & conſtructio peragitur.

10. Æquationes decimi, & undecimi gradus reducuntur ad duodecimum, multiplicando per x^2, & x. Æquatio duodecimi ex regula tradita conſtruenda eſt per duas curvas tertii, & quarti gradus. Æquationem ſumemus ſecundo termino carentem, nempe $x^{12}+ax^{10}+bx^9+cx^8+dx^7+ex^6+fx^5$ &c. $=o$. Ponamus $x^3=y$, ut fiat $y^4+ay^3x+by^3+cy^2x^2+dy^2x+ey^2+fyx^2$ &c. $=o$ quæ eſt quarti gradus prout optamus. Si ſubſtitutio facta fuiſſet $x^4=y$, prodiiſſet $y^3+ay^2x^2+by^2x+cy^2+dyx^3+eyx^2+fyx$ &c. $=o$ quæ pariter eſt quarti gradus. Quare hoc modo non obtinemus duas curvas unam tertii, aliam quarti gradus, ſed ambas quarti.

11. Hæ ſervata regula tradita conſtruuntur, ſed ſuperiores non item. Æquatio gradus decimi ſexti ſecundo termino carens ſit $x^{16}+ax^{14}+bx^{13}+cx^{12}+dx^{11}+ex^{10}+fx^9$ &c. $=o$, quæ conſtruenda eſſet per duas quarti. Fiat $x^4=y$ ut oriatur

y^4+

$y^4 + ay^3x^2 + by^3x + cx^3 + dy^2x^3 + ey^2x^2 + fy^2x$ &c. $= 0$ quæ est æquatio gradus quinti propter terminos ay^3x^2, dy^2x^3. Quapropter æquatio decimi sexti gradus hac methodo tractata non construitur per duas curvas gradus quarti. Difficultas autem vel maxime augetur, si methodus applicetur æquationibus superioribus, ut gradus vigesimi, vigesimi primi, trigesimi, & reliquis. Neque methodus alia adhuc tradita est, per quam æquationes gradum duodecimum superantes generatim resolvantur per intersectionem earum curvarum, quas exigit regula proposita. Quare illi analystæ nisi generalem hanc methodum doceant, frustra petunt, ut regula ab ipsis statuta custodiatur.

12. Verum hoc nihil mihi molestum accidit, quia utrum superior analystarum regula sit omnium optima, vehementer ambigo. Namque ea fundatur in hoc principio; ea constructio maxime simplex judicanda est, quæ peragitur per curvas, quarum æquationes sint maxime simplices, & in infimo gradu positæ sint. Verum simplicitas constructionis nullo modo videtur dependere a simplicitate æquationis earum curvarum, per quas peragitur. Certe æquatio parabolæ $ax = yy$ simplicior est æquatione circuli $2ax - xx = yy$. Attamen quis umquam in constructione præferet parabolam circulo? Etenim non simplicitas æquationis attendenda est, sed facilitas descriptionis. Quum autem facilius, & tutius delineetur circulus, quam parabola, circulus eligendus est ad constructionem, imo ob hanc caussam circulus sæpe præponitur lineæ rectæ, licet hujus æquatio ista sit in primo gradu. Quæ quum ita sint primum illæ curvæ seligendæ sunt ad constructionem, quæ tuto instrumento possint delineari; deinde si his careamus, illæ, cujus puncta singula facilius determinantur in praxi.

13. Existunt problemata ejusmodi conditiones includentia, quæ determinatam curvam ad elegantem sui constructionem videntur postulare. Hoc in præsentia unico exemplo præstat explicare. Solutum dedimus libro secundo per duas sectiones conicas se intersecantes hoc problema. Intra angulum rectum BCD (*F.* 1.) dato puncto A ducere lineam AMN ita, ut pars MN intercepta inter latera anguli datæ sit æqualis. Si naturam problematis consideres, videbis, illud ad elegantiam constructionis conchoidem Nicomedis quodammodo postulare. Demitte AB normalem in BC, in eaque producta accipe BF, BE æqualem datæ MN. Puncto B iter faciente per lineam BC, describant puncta F, E conchoidem nicomedeam, quæ secabit lineam DC in N; duc AMN, hæc erit linea quæsita, & MN ex natura conchoidis datam æquabit. Licet conchois sit curva quarti gradus, tamen quum facillime per instrumentum describatur, constructio essecta nihil videtur illi concedere, quæ perficitur per conicas sectiones. Nihil hic dicam de radicum numero, sed tantum paucis attingam, quam late pateat genus hoc constructionis. Etenim tametsi linea CD non sit perpendicularis CB, tametsi ea non recta sit, sed curva; tamen ejus intersectio cum conchoide nicomedea problematis solutionem præbebit. Imo etiamsi linea BC non recta, sed curva fuerit, genus constructionis non deficiet; quia si punctum B moveatur super curvam BC, non describetur a punctis F, E conchois nicomedea, sed ejusmodi curva delineabitur, quæ intersecans lineam DC determinabit puncta, quæ jungenda sunt cum A ad problema solvendum.

14. Verum licet aut non adsint, aut nobis cognitæ non sint curvæ hujusmodi, quæ expeditissimam problematis solutionem perficiant, & necessario confugiendum sit ad æquationem analyticam, quæ ex datis conditionibus invenitur; tamen arbitror non esse attendendum gradum curvarum, sed earum facilem delinea-

lineationem per puncta singula. Hanc ob rem puto, seligendam esse curvam ejusdem gradus, in quo est æquatio construenda, & conjungendam cum linea recta. Hoc obtinebis si ultimum terminum æquationis, qui datus est, facias $=y$, ut facta substitutione y in uno tantum termino reperiatur, in quo & linearem dimensionem tenet, neque per x multiplicatur. Hujus curvæ, dato quocumque valore x, ordinatæ singulæ per solas lineas rectas, & circulos determinantur, adeoque etiam puncta singula per quæ curva transeat. Hac curva delineata agatur recta parallela abscissis, in dato intervallo, atque hæc radices omnes æquationis suppeditabit.

15. Facili exemplo theoriam illustrabo. Inveniendæ sint radices æquationis $x^5 - 2a^2x^3 + a^4x - a^4b = o$, quæ ex resolutione problematis orta est. Pono $b = y$, atque ita æquationem dispono $y = \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^3}{aa} + x$. Curvam quinti gradus, cui æquatio convenit, inventis punctis singulis delineo. Ea autem hanc formam habet. Ad plagam abscissarum positivarum progrediens habet omnes ordinatas positivas, ad plagam oppositam habet negativas. In A (*Fig.* 2) habet flexum contrarium, secat lineam abscissarum ad angulum semirectum, ejusque curvatura cohæret cum curvatura verticis parabolæ primæ cubicæ. Ad utramque partem progrediens recedit a linea abscissarum usque ad certum terminum, tum iterum accedens, & sese flectens in R, S, ubi $AI = AL = a\sqrt{\frac{3}{5}}$, ad ejus contactum venit in B, C, ubi $AB = AC = a$; tum per duos ramos BD, CE in infinitum recedit. Jam vero, hac descripta, ponamus AM parallelam ordinatis $= b$, & parallelam abscissis duc MN. Interceptæ inter punctum M & puncta sectionis cum curva, ut MP, MQ, MN dabunt reales æquationis radices.

16. Genus hoc constructionis magnam affert utilitatem in determinandis limitibus, quibus a realibus separantur radices imaginariæ. Nam si inveniantur valores maximarum, & minimarum ordinatarum, limites statim sunt determinati. In exemplo adducto maximæ ordinatæ habentur quum $AF = AG = \frac{a}{\sqrt{5}}$, quo valore in æquationem introducto obtinemus maximas ordinatas FH, GK $= \frac{16a}{25\sqrt{5}}$. Itaque si sit $b > \frac{16a}{25\sqrt{5}}$, una tantum radix realis habetur, reliquæ omnes quatuor imaginariæ. Si $b = \frac{16a}{25\sqrt{5}}$, duæ ex imaginariis reales fiunt, & æquales; quare tres radices reales, quarum duæ æquales. Si $b < \frac{16a}{25\sqrt{5}}$, tres radices omnes inæquales. Demum si $b = o$, quinque sunt in hoc tantum casu radices, una $= o$, duæ æquales positivæ, duæ æquales negativæ, omnes $= a$. Idem dicendum, si b foret negativa. Hæc satis esse arbitror, ut analysees studiosi intelligant, quid sibi curandum sit in æquationum constructione.

CA-

CAPUT DUODECIMUM.

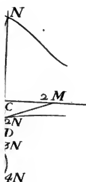
Superiorum graduum problemata aliquot tum determinata, tum indeterminata ſolvuntur.

1. PRoblema primum. Ex puncto A (*Fig.* 1) poſito in circumferentia circuli, cujus diameter eſt A B, ductis infinitis chordis A F, biſecentur arcus A F in D, & ex punctis D demittantur D G normales diametro A B, quæ ſecent chordas in E, quæritur curva tranſiens per omnia puncta E. Quoniam ducto radio C D, qui chordas A F ſecat bifariam, & ad angulos rectos, triangulum A G E eſt ſimile A H C, atque hoc ſimile eſt D G C, erit A G E ſimile D G C; ergo A G: G E:: D G: C G. Jam vero vocetur radius C A $= a$, A G $= x$, G E $= y$; erit ex natura circuli D G $= \sqrt{2ax - xx}$; C G autem $= a - x$. Habemus itaque $x : y :: \sqrt{2ax - xx} : a - x$, ſive $\sqrt{x} : \sqrt{2a - x} :: y : a - x$; ergo $\frac{\overline{a-x}.\sqrt{x}}{\sqrt{2a-x}} = y$, ſive $\frac{a^2x - 2ax^2 + x^3}{2a - x} = y^2$, quæ eſt æquatio curvæ, cujus conſtructionem dedimus Cap. 7. num. 22.

2. Problema ſecundum. Iiſdem poſitis ex D (*Fig.* 2) biſecante arcum A F, parallela diametro A B agatur D E ſecans chordam in E; quæritur locus omnium ſectionum E. Juncta ex centro C D, quæ & bifariam & ad angulos rectos dividet chordam A F, ducantur normales diametro E G, D I. Triangulum A E G eſt ſimile A C H, hoc eſt ſimile D C I; ergo A E G ſimile D C I; igitur A E: A G:: D C: D I. Quare vocatis C A $=$ C D $= a$, A G $= x$, E G $=$ D I $= y$, A E $= \sqrt{xx + yy}$, erit $\sqrt{x^2 + yy} : x :: a : y$; ergo $a^2x^2 = x^2y^2 + y^4$, ſive $x^2 = \frac{y^4}{a^2 - y^2}$. Ducta diametro M N normali A B per M, N agantur R P, S Q parallelæ A B. Curva quarti gradus noſtræ æquationi reſpondens prædita erit quatuor ramis, qui omnes in infinitum hinc inde abeunt, & habent pro aſymptotis rectas R P, S Q.

3. Problema tertium. Deſcriptis ſuper A B (*Fig.* 3) infinitis triangulis, in quibus angulus A ad angulum B ſit in data ratione $1 : m$, invenire curvam tranſeuntem per apices C triangulorum. Demittatur in baſim normalis C E, & diviſa A B bifariam in D, vocetur D E $= x$, C E $= y$, A D $=$ B D $= a$, B E $= a - x$, A E $= a + x$, A C $= \sqrt{\overline{a+x}^2 + y^2}$, angulus A $= \mu$, B $= m\mu$. Ex trigonometricis $y : a - x :: Sc.m\mu : Cc.m\mu$, ſive poſitis valoribus tam ſinus, quam coſinus $m\mu$, $y : a - x :: \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^m - (\overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^m}{\sqrt{-1}} :$ $\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^m + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^m$;

atqui



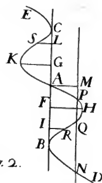


Fig. 2.

atqui $\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2} : y :: r : Sc.\mu = \frac{r\,y}{\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2}}$, &

$\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2} : a+x :: r : Cc.\mu = \frac{r.\overline{a+x}}{\sqrt{\overline{a+x}^2+y^2}}$; ergo substitutis his valoribus, expurgataque analogia

$$y : a-x :: \frac{\overline{a+x+y\sqrt{-1}}^m - (\overline{a+x-y\sqrt{-1}}^m}{\sqrt{-1}} : \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^m + \overline{a+x-y\sqrt{-1}}^m.$$

4. Analogia hæc, si m sit numerus integer, [illegible] æquationem curvæ quæsitæ; elatis enim formulis ad potestatem integram m, imaginaria abeunt, & sese offert æquatio curvæ. Exempla aliquot proferamus. Sit $m = 2$; fit $y : a-x :: 2y.\overline{a+x} : \overline{a+x}^2 - y^2$, ex qua æquatio $yy = -aa + 2ax + 3xx$ ad hyperbolam, de qua loquuti sumus lib. 2. cap. 7. num. 23. Si $m = 3$, oritur $y : a-x :: 3\,\overline{a+x}^2.y - y^3 : \overline{a+x}^3 - 3.\overline{a+x}.y^2$, ex qua $y^2.\overline{a+2x} = -a^3 + 3ax^2 + 2x^3$, quæ est æquatio tertii gradus. Si $m = 4$, fit $y : a-x :: 4.\overline{a+x}^3.y - 4.\overline{a+x}.y^3 : \overline{a+x}^4 - 6.\overline{a+x}^2.y^2 + y^4$, ex qua æquatio quarti gradus

$y^4 + y^2.\overline{(-2a^2 - 12ax - 10x^2} = 3a^4 + 4a^3x - 6a^2x^2 - 12ax^3 - 5x^4$, atque ita deinceps in aliis casibus.

5. Quod si m non fuerit numerus integer, sed fractus, vocetur $= \frac{m}{n}$ existentibus m, n numeris integris inter se primis; tum hac methodo progredi licet. Analogiæ, quæ habetur num. 3., primus, & tertius terminus multiplicetur per $\sqrt{-1}$, tum componendo, ac dividendo proportio ita disponatur

$$a-x+y\sqrt{-1} : a-x-y\sqrt{-1} :: \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}} : \overline{a+x-y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}}.$$

Omnes termini eleventur ad potestatem n, ut oriatur

$$\overline{a-x+y\sqrt{-1}}^n : \overline{a-x-y\sqrt{-1}}^n :: \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^m : \overline{a+x-y\sqrt{-1}}^m;$$

ergo dividendo, & componendo fiet

$$\overline{a-x+y\sqrt{-1}}^n - (\overline{a-x-y\sqrt{-1}}^n : \overline{a-x+y\sqrt{-1}}^n + \overline{a-x-y\sqrt{-1}}^n ::$$
$$\overline{a+x+y\sqrt{-1}}^m - (\overline{a+x-y\sqrt{-1}}^m : \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^m + \overline{a+x-y\sqrt{-1}}^m,$$

cujus analogiæ si primus, & tertius terminus dividatur per $\sqrt{-1}$, obtinebis formulam, ex qua in singulis valoribus m, n abibunt imaginaria. Ad exemplum

plum pone $n=2$; $m=3$, & invenies

$2.\overline{a-x}\ y : \overline{a-x}^{2} - yy :: 3.\overline{a+x}^{2}.y - y^{3} : \overline{a+x}^{3} - 3.\overline{a+x}.y^{2}$, ex qua provenit æquatio quarti gradus

$y^{4} + y^{2}.2a^{2} - 4ax - 10xx = -a^{4} + 4a^{3}x + 6a^{2}x^{2} - 4ax^{3} - 5x^{4}$.

6. Quod si angulus A non ad internum CBA, sed ad externum CBF debeat esse ut $1:m$, tunc valebit hæc proportio $y : a-x :: Sc.$CBE$: Cc.$CBE; atqui $Sc.$CBE$=Sc.$CBF$=Sc.m\mu$, & $Cc.$CBE$=-Cc.$CBF$=-Cc.m\mu$, ergo erit $y : a-x :: Sc.m\mu : -Cc.m\mu$, sive

$$y : a-x :: \frac{\overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{m} - (\overline{a+x-y\sqrt{-1}}^{m}}{\sqrt{-1}} :$$

$$-(\overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{m} - (\overline{a+x-y\sqrt{-1}}^{m}$$, ex qua in singulis casibus m integri æquationem eruemus. Si $m=2$, erit $y : a-x :: 2y.\overline{a+x} : -(\overline{a+x}^{2} + y^{2}$, ex qua æquatio $yy = 3aa + 2ax - xx$, quæ est ad circulum, cujus centrum B, radius BA, quod etiam ab elementis eruere potuisses. Si $m=3$, exurgit proportio

$y : a-x :: 3.\overline{a+x}^{2}.y - y^{3} : -(\overline{a+x}^{3} + 3.\overline{a+x}.y^{2}$, ex qua æquatio tertii gradus $y^{2}.\overline{2a+x} = 2a^{3} + 3a^{2}x - x^{3}$; ita in reliquis casibus.

7. Si m sit numerus fractus, fiat $=\frac{m}{n}$. In superiore analogia antecedentes multiplicentur per $\sqrt{-1}$, mutentur signa consequentium, demum componendo & dividendo invenietur

$$x-a+y\sqrt{-1} : x-a-y\sqrt{-1} :: \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}} : \overline{a+x-y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}}.$$

Eleventur omnes termini ad potestatem n, ut fiat

$$\overline{x-a+y\sqrt{-1}}^{n} : \overline{x-a-y\sqrt{-1}}^{n} :: \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{m} : \overline{a+x-y\sqrt{-1}}^{m}.$$

Demum dividendo & componendo, tum antecedentibus divisis per $\sqrt{-1}$ exurget analogia

$$\frac{\overline{x-a+y\sqrt{-1}}^{n} - (\overline{x-a-y\sqrt{-1}}^{n}}{\sqrt{-1}} : \overline{x-a+y\sqrt{-1}}^{n} + \overline{x-a-y\sqrt{-1}}^{n} ::$$

$$\frac{\overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{m} - (\overline{a+x-y\sqrt{-1}}^{m}}{\sqrt{-1}} : \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{m} + \overline{a+x+y\sqrt{-1}}^{m},$$

ex qua in singulis casibus æquationem determinabis. Si $n=2$, $m=3$, fiet proportio $2y.\overline{x-a} : \overline{x-a}^{2} - y^{2} :: 3y.\overline{a+x}^{2} - y^{3} : \overline{a+x}^{3} - 3y^{2}.\overline{a+x}$, ex qua ori-

oritur æquatio quarti gradus

$$y^4 + y^2 . 2x^2 - 4ax - 10aa = -x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x - 5a^4.$$

8. Angulus externus CBF æquat duos internos CAB, ACB; ergo $m\mu = \mu + ACB$, five $ACB = \overline{m-1}.\mu$. Igitur folutio problematis propofiti exhibet folutionem alterius. Data AB quæritur curva tranfiens per apices omnium triangulorum ACB, in quibus angulus CAB fit ad ACB in data ratione $1:m-1$. Nam hæc eadem eft cum curva tranfeunte per vertices triangulorum, in quibus angulus internus CAB eft ad externum CBF in data ratione $1:m$.

9. Problema quartum. Dato circuli quadrante AEB (*Fig.* 4) ductoque ubicumque radio CE, qui determinat arcum BE, cujus cofinus CD, finus DE, abfcindatur arcus BF, qui ad BE fit ut $1:m$, & in radio CF fecetur CG, quæ data fit per CD, aut DE; quæritur curva tranfiens per omnia puncta G. Radio CB agantur normales GH, FK. Vocetur $CH = x$, $GH = y$, $CG = z = \sqrt{xx+yy}$; præterea radius CB, feu finus totus $= a$, arcus $FB = \mu$, $EB = m\mu$. Ex formulis jam probatum habemus

$$Cc.m\mu = \frac{\overline{Cc.\mu + \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{m} + \overline{Cc.\mu - \sqrt{-1}.Sc.\mu}^{m}}{2a^{m-1}}; \text{ atqui}$$

$$z:a::x:Cc.\mu = \frac{ax}{z},\ z:a::y:Sc.\mu = \frac{ay}{z}; \text{ ergo}$$

$$Cc.m\mu = \frac{a^m}{z^m}.\frac{\overline{x+y\sqrt{-1}}^{m} + \overline{x-y\sqrt{-1}}^{m}}{2a^{m-1}}; \text{ ergo vocato } Cc.m\mu = p, \text{ qui}$$

in hypothefi datur per z, fiet $\frac{pz^m}{a} = \frac{\overline{x+y\sqrt{-1}}^{m} + \overline{x-y\sqrt{-1}}^{m}}{2}$. Quare fi m fupponatur effe numerus integer, elatis binomiis ad poteftatem integram m, imaginaria abibunt, & fubftituto pro p ejus valore dato per z, & pro z pofita $\sqrt{xx+yy}$, æquatio quæfita obtinebitur.

10. Si $m = 2$, fiet $\frac{pz^2}{a} = xx - yy$. In hac hypothefi ponamus $p = \frac{z^2}{a}$, & fiet $\frac{z^4}{a^2} = xx - yy$, feu $z^2 = a\sqrt{xx-yy}$; demum $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2-y^2}$.

Æquationi huic quarti gradus curva refpondens vocari folet lemnifcata, quæ conftat ramis quatuor fimilibus & æqualibus CGB, C2GB, C3G2B, C4G2B, (*Fig.* 5) claufis intra circulum radij $= a$, & fefe interfecantibus ad angulum femirectum in centro C.

11. Si adhibuiffes formulam finus, vocato $DE = q$, (*Fig.* 4) inveniffes

$$\frac{qz^m}{a} = \frac{\overline{x+y\sqrt{-1}}^{m} - (\overline{x-y\sqrt{-1}}^{m}}{2\sqrt{-1}}. \text{ Si poneres } m = 2, \ \& \ q = \frac{zz}{a}, \text{ fie-}$$

ret

ret $\frac{z^4}{a^2} = 2xy$, seu $\overline{x^2+y^2}^2 = 2a^2xy$, quæ pariter est æquatio quarti gradus. Quod si poneres $p = \frac{zz}{a}$, adeoque $q = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - z^4}$; fieret

$\frac{z^2\sqrt{a^4-z^4}}{a^2} = 2xy$, sive $\overline{x^2+y^2}\sqrt{a^4 - \overline{x^2+y^2}^2} = 2a^2xy$, sive

$a^4.\overline{x^4+2x^2y^2+y^4} - \overline{x^2+y^2}^4 = 4a^4x^2y^2$; vel $a^4.\overline{x^2+y^2}^2 = \overline{x^2+y^2}^4$;

demum $a^2.\overline{x^2-y^2} = \overline{x^2+y^2}^2$, quæ eadem [illegible] antea.

12. Quod si m non fuerit [illegible] integer sed fractus, vocetur $= \frac{m}{n}$, ut formula, ad quam pervenimus, hæc fit $\frac{pz^{\frac{m}{n}}}{a} = \overline{x+y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}} + \overline{x-y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}}$. Vocetur præterea $DE = Sc.\frac{m}{n}\mu = q$. Ex nostris formulis habemus

$$Sc.\frac{m}{n}\mu = \frac{\overline{Cc.\mu+\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{m}{n}} - \overline{Cc.\mu-\sqrt{-1}.Sc.\mu}^{\frac{m}{n}}}{2a^{\frac{m}{n}-1}.\sqrt{-1}}$$

sive ut antea substitutis valoribus $\frac{qz^{\frac{m}{n}}\sqrt{-1}}{a} = \frac{\overline{x+y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}} - \overline{x-y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}}}{2}$. Hæc primum addatur, deinde detrahatur a superiore, ut fit

$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a}.\overline{p+q\sqrt{-1}} = \overline{x+y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}}$$
$$\frac{z^{\frac{m}{n}}}{a}.\overline{p-q\sqrt{-1}} = \overline{x-y\sqrt{-1}}^{\frac{m}{n}}$$

quæ eleventur ad potestatem integram n, ut habeamus.

$$\frac{z^m}{a^n}.\overline{p+q\sqrt{-1}}^n = \overline{x+y\sqrt{-1}}^m$$
$$\frac{z^m}{a^n}.\overline{p-q\sqrt{-1}}^n = \overline{x-y\sqrt{-1}}^m$$

Istæ æquationes de more addantur, & subducantur, ut oriantur

$\frac{z^m}{a^n}$

$$\frac{z^m}{a^n}\cdot\overline{\left(p+q\sqrt{-1}\right)^n+\left(p-q\sqrt{-1}\right)^n}=\left(x+y\sqrt{-1}\right)^m+\left(x-y\sqrt{-1}\right)^m$$

$$\frac{z^m}{a^n}\cdot\overline{\left(p+q\sqrt{-1}\right)^n-\left(p-q\sqrt{-1}\right)^n}=\left(x+y\sqrt{-1}\right)^m-\left(x-y\sqrt{-1}\right)^m,$$ in quibus quum p, q dentur per z, elevatis binomiis ad potestates integras, æquatio curvæ, eliminatis imaginariis, reperietur.

13. Si ponamus $m=1$, $n=2$, ex prima æquatione habebimus $\frac{z}{a^2}\cdot\overline{pp-qq}=x$. Ponamus in hac hypothesi $p=z$, & $qq=aa-zz$; ergo $\frac{z}{a^2}\cdot\overline{2zz-aa}=x$, substitutoque pro z ejus valore $\sqrt{xx+yy}$, fiet $\sqrt{xx+yy}\cdot\overline{2x^2+2y^2-a^2}=a^2x$, quæ est æquatio sexti gradus. Si adhiberes secundam æquationem, proveniret $\frac{z}{aa}\cdot 2z\sqrt{aa-zz}=y$, sive $\overline{2x^2+2y^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}=a^2y$, quam eamdem esse cum superiore, facile demonstrabis.

14. Problema quintum. Sit circulus AFB, (*Fig. 6*) quem tangat in A indefinita AK, datumque sit punctum E, ex quo ducatur quælibet EK secans circulum in F, tangentem in K. Per F ducatur FI parallela tangenti, ex K agatur KI tangenti normalis, quæ duæ lineæ concurrant in I. Quæritur curva transiens per omnia puncta I. Age diametrum AB, in quam cadant normales ED, FG. Vocetur radius circuli $=a$, $DB=b$, $ED=c$, $CG=x$, $GI=y=AK$; ergo $GF=\sqrt{aa-xx}$. Quoniam est
AK: DE :: AH: DH erit componendo
DE+AK: DE :: AD: DH, seu analytice
$c+y:c::2a+b:DH=\frac{2ac+bc}{c+y}$; ergo
$CH=\frac{2ac+bc}{c+y}-a-b=\frac{ac-ay-by}{c+y}$; atqui HG:GF :: HA: AK,
hoc est $x+\frac{ay+by-ac}{c+y}:\sqrt{aa-xx}::a+\frac{ay+by-ac}{c+y}:y$, vel
$cx+xy+ay+by-ac:2ay+by::\sqrt{aa-xx}:y$; ergo
$\overline{2a+b}\sqrt{aa-xx}=cx+xy+ay+by-ac$; demum
$\frac{\overline{2a+b}\sqrt{aa-xx}-cx+ac}{a+b+x}=y$, quæ est æquatio quarti gradus.

15. Curva, quæ nascitur, pro diversa puncti E positione diversam admodum figuram habet. Quæ omnibus hisce curvis conveniunt, breviter attingam. Ducta tangente BM, curvæ omnes continentur inter tangentes AK, BM; omnes transeunt per punctum A, in quo tanguntur ab AK; omnes in aliquo puncto ad contactum veniunt rectæ BM. Si recta per punctum E ducta pa-

ral-

rallela tangenti A K fecet, aut tangat circulum, hæc erit curvæ afymptotum; fecus curva carebit afymptoto, & intra fpatium finitum claudetur.

16. Aliquot cafus ex fimplicioribus evolvamus. Si punctum E (*Fig.* 7) cadat extra circulum in diametro A B producta, ex eo ducatur circuli tangens E P, quæ producta puncti A tangentem fecabit in Q. Huic tangenti age normalem Q R, & parallelam P R. Curva tota, eft extra circulum. Ex A progreditur ad R, ubi tangitur a Q R, tum veniet in B; fimilis ramus pofitus eft ad alteram partem diametri. Si punctum fit in diametro ad alteram partem producta ut in 2 E, facta ut fupra præparatione, curva A 2 R B invenietur tota intra circulum. Recedente in infinitum puncto E, aut 2 E, curva confundetur cum circulo. Ad habendas autem harum curvarum æquationes, fatis eft ponere in æquatione generali $c = o$, & in fecunda fpectare b ut negativam, & majorem quam $2a$.

17. Si punctum E caderet in B, evanescit tam c, quam $b = o$; ergo æquatio curvæ $\frac{2a\sqrt{aa - xx}}{a + x} = y$, quæ elata ad quadratum, quum fit divifibilis per $a + x$, habebimus $x = -a$, quæ æquatio docet tangentem BM componere curvam quarti gradus, quæ proinde conftabit & linea primi & linea tertii gradus. Hujus autem æquatio facta divifione prodit $\frac{2a\sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x}} = y$. Figura autem eft hujufmodi. Ex A (*Fig.* 8) progreditur extra circulum, & concavum obvertit lineæ BM, tum poft flexum contrarium convexa ad eamdem accedit tamquam ad afymptotum Æqualis ramus exiftit ad alteram partem diametri A B. Hæc curva vocatur verforia. Si punctum E cadat in centro C, fiet $c = o$, $b = -a$; ergo æquatio curvæ in hac mutatur $\frac{a\sqrt{aa - xx}}{x} = y$. Curvam tangent rectæ A K, B M (*Fig.* 9) in punctis A, B, & conftabit duobus ramis æqualibus pofitis ex utraque parte lineæ C N parallelæ A K, primum concava verfus C N, deinde convexa habebit eamdem C N pro afymptoto. Rami duo fimiles & æquales ad alteram partem diametri A B jacebunt. Reliquos cafus lectoribus evolvendos relinquo.

18. Problema fextum. Ex mediis proportionalibus inter datas a, b, quarum numerus eft $= m$, invenire eam, quæ tenet fedem n^{efimam}; ut fi $m = 10$, $n = 7$, invenire feptimam ex decem mediis proportionalibus inter a, b. Vocata prima ex mediis proportionalibus $= x$, infpice fequentem feriem $a, x, \frac{x^2}{a}, \frac{x^3}{a^2} \ldots\ldots \frac{x^n}{a^{n-1}} \ldots\ldots \frac{x^m}{a^{m-1}}, \frac{x^{m+1}}{a^m} = b$. Vides in hac exponentes x effe numeros indicantes fedes mediorum proportionalium; ergo quæ pofita eft in fede n^{efima} eft $= \frac{x^n}{a^{n-1}}$. Vocetur hæc $= z$, ut habeatur $x^n = a^{n-1} z$; atqui $x^{m+1} = a^m b$, ergo $x^n = a^{\frac{mn}{m+1}} b^{\frac{n}{m+1}}$, five $a^{\frac{m-n+1}{m+1}} b^{\frac{n}{m+1}} = z$, quæ formula exhibet mediam proportionalem quæfitam.

19. Ut

19. Ut ad constructionem veniamus, ita disponamus formulam $a^{m-n+1}b^n = z^{m+1}$. Si m esset numerus impar, & $m+1$ par, posita $zz = ay$, fiet $a^{m-n+1}b^n = a^{\frac{m+1}{2}} y^{\frac{m+1}{2}}$, aut $a^{\frac{m-2n+1}{2}} b^n = y^{\frac{m+1}{2}}$, ex qua si inveniatur y, invenietur etiam z, quæ est media proportionalis inter a, y. Si $\frac{m+1}{2}$ sit item par, eadem methodo utere, ut formulam traducas ad tertiam propotionalem post a, y; atque ita deinceps, donec devenias ad exponentem imparem. Quamobrem satis est formulam construere in hypothesi $m+1$ imparis. Multiplica illam per z, ut fiat $a^{m-n+1}b^n z = z^{m+2}$; exponens $m+2$ erit par. Fac $z^2 = ay$, ut fiat $a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z = y^{\frac{m+2}{2}}$, existente $\frac{m+2}{2}$ numero integro. Ad axem AD (*Fig.* 10) describe parabolam ABM æquationis $a^{\frac{m-2n}{2}} b^n z = y^{\frac{m+2}{2}}$, erunt $AD = z$; tum describe parabolam apollonianam ABN æquationis $z^2 = ay$. Parabolæ sese secabant in puncto B; ex hoc demitte ordinatam BD, erit $AD = z$ media proportionalis quæsita. BD vero $= y$ erit tertia proportionalis post a, & hanc z. Q. E. Inv.

20. Problema septimum. Datum arcum circularem in plures æquales partes dividere. Si numerus partium, in quas arcus dividendus est, non esset primus, expediret dividere numerum in suos factores, qui sint m, n &c.; tum arcum dividere in partes m, unum ex his in partes n, & sic deinceps; ita problema solvetur per æquationes gradus inferioris. Quare partium numerus $= n$ ut primus spectetur. Advoco formulam cosinus arcus multipli, quæ vocato radio $= r$, & arcu dato $= \mu$, est hujusmodi

$$Cc.\mu = \frac{\overline{Cc.\frac{\mu}{n} + \sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{n}}^{\,n} + \overline{Cc.\frac{\mu}{n} - \sqrt{-1}.Sc.\frac{\mu}{n}}^{\,n}}{2r^{n-1}}.$$

Vocetur $Cc.\mu = a$, $Cc.\frac{\mu}{n} = x$, $Sc.\frac{\mu}{n} = y$, ut sit $yy = rr - xx$, & hæc nascetur æquatio $a = \frac{\overline{x+y\sqrt{-1}}^{\,n} + \overline{x-y\sqrt{-1}}^{\,n}}{2r^{n-1}}$. Si duo binomia ad potestatem n eleventur, omnia imaginaria abibunt, & y ad potestatem parem elevatam invenies. Quare pro y^2 substituto ejus valore, proveniet æquatio gradus n, quæ per curvam ejusdem gradus sectam a linea recta non difficulter construetur.

21. Contrahamus formulam ad exemplum, & sit $n = 5$. Elevatis binomiis ad quintam potestatem, substitoque valore y^2, proveniet æquatio gradus quinti $r^4 a = 16x^5 - 20r^2x^3 + 5r^4x$. In hac spectemus tamquam ordinatam a, & con-

struа-

struamus curvam æquationi respondentem. Initium abscissarum sit C. Sume $CA = CB = r$, abscinde CE, CD, CG, CF, (*Fig.* 11) quæ fiant æquales $\pm \frac{r}{2}\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}$; curva transibit per quinque puncta C, E, D, G, F. Deinde descripto quadrato KH per C agatur 2C3C perpendicularis AB. Seca $2CL = 3CM = \frac{\sqrt{5} - r}{2}$, $2CN = 3CI = \frac{\sqrt{5} + r}{2}$; curva tanget rectas KI, HN in punctis L, N, M, I, & transibit per puncta K, H. Descripta autem curva seca $AO = a$, & duc OV parallelam AB, quæ curvam secabit in quinque punctis. Abscissæ autem incipientes a puncto C dabunt cosinus arcuum $\frac{\mu}{5}$, $\frac{4\omega + \mu}{5}$, $\frac{8\omega + \mu}{5}$, $\frac{12\omega + \mu}{5}$, $\frac{16\omega + \mu}{5}$, denotante ω quadrantem circumferentiæ. Scio, eidem cosinui duplicem respondere arcum, ducto sinu vel positivo vel negativo, sed in singulis casibus non est difficile determinare, quinam ex duobus arcubus accipiendus sit. Curva descripta ultra puncta H, K per duos ramos infinitos progredietur. Qui rami inserviunt inveniendo cosinui logarithmi subquintupli. Namque problema hoc eamdem prorsus æquationem suppeditat, quod breviter sufficiat indicavisse. Idem prorsus constructionis genus valet, quum in plures partes arcus dividendus est.

22. Problema octavum. In recta positione data datis duobus punctis C, B, (*Fig.* 12) & extra ipsam puncto A, ducere ex hoc lineam AMN, ut secta in ea MN æquali datæ, & ducta in CB normali NS, rectangulum CSB æquet rectangulum ex data in NS. Quoniam MN debet æquare datam, manifestum est, punctum N esse in conchoide nicomedea, cujus polus A, & intercepta inter curvam & BC ducta ex polo A æquat datam. Describatur itaque conchois nicomedea EN, punctum N erit in hac curva. Ut alia curva determinetur, quæ per intersectionem conchoidis determinet punctum N, dividatur CB bifariam in D, eidemque ducatur normalis DF, in quam cadat normalis NT. Vocetur $CD = BD = a$, $DT = NS = x$, $TN = DS = y$; ergo $CS = a + y$, $BS = a - y$; igitur rectangulum $CSB = aa - yy$; sed ex conditione hoc debet æquare $NS = x$ in datam $= b$; ergo $aa - yy = bx$, seu $b . \frac{aa}{b} - x = yy$, quæ est ad parabolam apollonianam hoc pacto describendam. Seca DF, quæ sit tertia proportionalis post b, a. Vertice F, parametro $= b$ describe parabolam, quæ transibit per puncta B, C. Punctum intersectionis N parabolæ & conchoidis illud ipsum erit, quod quæritur. Tot igitur erunt solutiones, quot in punctis parabola conchoidem secat.

23. Problema nonum. Lineis rectis AC, AD (*Fig.* 13) sese ad angulos rectos decussantibus determinare in recta positione data PQ punctum M, ut, juncta AM, intercepta CMD eidem perpendicularis sit æqualis datæ. Quoniam CD & debet æquare datam, & debet esse normalis lineæ AM transeunti per punctum A, perspicuum est, punctum M reperiri in curva sexti gradus, quæ a nobis descripta est Cap. *6*. Prob. *6*. num. *19*. Hæc itaque curva si describatur, secabit rectam positione datam PQ in puncto M. Hoc erit punctum requisitum, ut proprietas curvæ patefacit. Curva descripta & linea PQ possunt secare sese vel in sex punctis, vel in quatuor, vel in duobus, vel nusquam;

qua-

quare problema modo sex, modo quatuor, modo duas, modo nullam solutionem recipiet. Eadem constructio locum habebit, licet P Q non fuerit recta, sed curva quæcumque, ut si fuerit circulus descriptus centro dato R, & dato radio R M. Quo in casu ita problema proponi potest. Rectis A C, A D secantibus sese normaliter, datoque puncto R, determinare punctum M ita, ut R M æquet datam, & intercepta C D normalis A M alii datæ æqualis sit: quod problema ad summum octo recipere potest solutiones.

24. Problema decimum. In anguli recti latere A T (*Fig.* 14) dato puncto A, & ubicumque puncto R, ita agere A O, ut producta in N, donec O N = O T, recta R N fiat æqualis datæ. Quandoquidem O N debet æquare T O, punctum N erit in curva, de qua loquuti sumus Cap. *6.* Prob. *9.* num. 22. Quare ea curva describatur. Tum centro R intervallo dato circulus describatur, qui secabit curvam in puncto N, linea A N, hæc erit linea requisita satisfaciens problemati. Si circulus curvam secet in punctis A 2 N T, tum linea A 2 O non est producenda, sed ejus pars 2 N 2 O æquabit T 2 O. Si punctum N non in circumferentia circuli, sed in alia quacumque linea recta vel curva deberet reperiri, hujus intersectio cum curva A T N præberet problematis solutionem. Hæc autem tria problemata eum ob finem proposui, ut cognoscat Analysta, multa esse problemata, quæ ad elegantem sui solutionem certas quasdam curvas postulare videntur. Cæterum exercitatione & industria opus est, ut problemata ad elegantem, facilemque solutionem perducantur.

25. Dum hæc thypis parabamus, prodiit tomus tertius Operum Comitis Jacobi Riccati, qui plura opuscula continet. Legi in appendice opusculi duodecimi artificium construendi problemata tertium, & quartum gradum superantia, quod propter elegantiam, qua sæpenumero solutionem adhornat, non videtur esse omittendum. Artificium in eo positum est, ut pro illis expressionibus, quæ si retinerentur in calculo, efferrent ad potestates altiores secunda, aliæ incognitæ substituantur, atque ita multiplicatis incognitis deveniatur ad æquationem secundi gradus. Hac obtenta per vestigia analysis regredientes, ope sectionum conicarum, quas novimus delineare, describemus altiores curvas, quæ solutionem problematis exhibent. Ut elegantior evadat solutio, attendendum est, ne numerus substitutionum, & numerus incognitarum in ultima æquatione magis, quam par est, augeatur. Hoc enim numero crescente semper complicatior fit solutio. Quæ hic generatim tradita sunt vix intelligi possunt, nisi dilucide per exempla declarentur. Quare sit.

26. Problema undecimum. Data prima ex continue proportionalibus determinare secundam ita, ut summa secundæ & ultimæ æquet datam. Prima vocetur $= a$, secunda $= x$, summa secundæ, & ultimæ $= b$; ergo ultima $= b - x$

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX
a	x	$\frac{x^2}{a}$		.	.	.	.	.
		y	$\frac{xy}{a}$	$\frac{y^2}{a}$	.	.	.	.
			$\frac{y^2}{x}$		.	.	.	.
			t	$\frac{tx}{a}$	$\frac{ty}{a}$	.	.	.
				$\frac{ty}{x}$	$\frac{tt}{a}$	.	.	.
				$\frac{tt}{y}$		.	.	.
				z	$\frac{zx}{a}$	$\frac{zy}{a}$	$\frac{zt}{a}$	$\frac{zz}{a}$
					$\frac{zy}{x}$	$\frac{tz}{x}$	$\frac{zz}{x}$	
					$\frac{zt}{y}$	$\frac{zz}{y}$		
					$\frac{zz}{t}$			

Quoniam a eſt prima continue proportionalium, x ſecunda, erit tertia $\frac{xx}{a}$. Si hanc retinerem in calculo, neceſſario expreſſio quartæ proportionalis includeret tertiam poteſtatem. Quare pono $\frac{xx}{a}=y$, & ſpectans y tamquam tertiam proportionalem invenio quartam, quæ per a, x, y duplici modo exprimi poteſt, tum per $\frac{xy}{a}$, tum per $\frac{yy}{x}$; deinde quintam $=\frac{yy}{a}$, in quibus formulis nihil ſuperat poteſtatem ſecundam. Sed ſi his retentis calculum produceremus, tertia & ſuperiores poteſtates obviam venirent. Quare quartam proportionalem facio $=t$, atque determino quintam & ſextam, prout in tabula ſuperiore notatur. Si ponam quintam $=z$, determino ſequentes uſque ad nonam. Atque ita deinceps calculum promovere poteris, quouſque libuerit.

27. Nunc quo pacto hujuſmodi ſubſtitiones eleganter ad conſtructionem perducant declarandum. Si ponas quintam proportionalem eſſe ultimam, & æqualem $b-x$, aſſume ejus expreſſionem maxime ſimplicem $\frac{yy}{a}$, quæ non eget niſi una ſubſtitutione; ergo erit $yy=a.\overline{b-x}$, quæ eſt ad parabolam. Præterea ſubſtitutio dat $xx=ay$, quæ pariter eſt ad parabolam ejuſdem parametri. Itaque oritur hæc conſtructio. Poſita parametro A B $=a$, (*Fig.* 15.) deſcribatur parabola A D, cujus tangens ſit A B; deinde ſecta A C $=b$, vertice C, axe C A de-

describe parabolam CD ejusdem parametri, quæ secabit priorem in D. Ordina DE, abscissa $AE = x$ erit secunda in proportione continua. Ad methodum illustrandam præmisi solutionem hujus problematis, quod cæteroquin non superat gradum quartum. Si velis sextam proportionalem esse æqualem $b - x$, assume ejus expressionem $\frac{tt}{x}$, ut fit $tt = bx - xx$, quæ est ad circulum. Primum delinea parabolam AD (*Fig.* 16) æquationis $xx = ay$, quam dat substitutio. In tangenti AB sitæ erunt $AE = x$; huic normales sint ordinatæ $ED = y$. Fac ubique ut $AB = a : AE = x$, ita $DE = y : FE = t$, & per omnia puncta F transeat nova curva AF; demum sumpta $AC = b$, super diametrum AC describe circulum AFC, qui secabit curvam AF in puncto F, ex quo demissa FE determinabit AE secundam proportionalem quæsitam. Adnota quomodo curva AF inserviens solutioni problematis delineetur ope parabolæ apollonianæ primum descriptæ. Hoc problema ad methodum indicandam unice sibi proposuit Comes Riccatus, qui hanc ipsam tradit solutionem.

28. Idem problema alio modo solves, si alia usurpata expressione facias $\frac{zx}{a} = b - x$, quæ exhibet hyperbolam inter asymptota. Primum ut supra describamus parabolam AD æquationis $xx = ay$. Deinde quum sit $yy = az$, fiat ut $a : y :: y : z$. Quare sumpta EF (*Fig.* 17) tertia proportionali post AB, DE per omnia puncta F transeat curva gradus superioris. Postremo ducta $AG = a$, & clauso parallelogrammo ACHG, productisque ejus lateribus in M, N describatur hyperbola inter asymptota transiens per punctum C, quæ secabit curvam AF in puncto F. Ordina FE, erit AE secunda proportionalis quæsita. Si octava propotionalis simul cum secunda debeat $= b$, invenies æquationem $\frac{zz}{x} = b - x$, quæ est ad circulum diametri $= b$. Si vero velis nonam cum secunda $= b$, invenies $\frac{zz}{a} = b - x$, quæ est ad parabolam. Quapropter intersectio harum curvarum, & curvæ AF determinabit secundam quæsitam.

29. Quamquam in solutione superiorum problematum dedimus operam, ut æquatio ultimo prodiens non contineat nisi duas indeterminatas, tamen methodus non deficeret, si tres pluresve contineret, licet non parum de sua elegantia deperderet. Exemplum præbeamus in septima proportionali, quæ exprimitur per $\frac{zy}{a}$; igitur habebimus $zy = a . \overline{b - x}$; ergo $y : a :: b - x : z$. Descriptis ut antea curvis AD, AF ordinatarum y, z, fiat ubique ut $RP = y : AB = a :: CB = b - x : RS$. Per omnia puncta S transeat curva MSC, quæ secabit AF in F; ex quo puncto demitte ordinatam FE, abscissa AE erit secunda proportionalis quæsita.

30. Problema duodecimum Circuli arcum datum in quinque partes secare. Problema hoc idem est ac septimum; sed ad præsens artificium indicandum præstat novam ejusdem solutionem adornare. Arcus secandus sit BH (*Fig.* 18), quem divide in quinque partes in punctis D, E, F, G. Ex puncto B duc circuli diametrum BCA, & ex A age chordas AD, AE, AF, AG, AH, quas produc quousque opus fuerit. Ex punctis D, E, F, G duc DM, EN,

FP, GQ ita, ut sint respective æquales chordis AD, AE, AF, AG; demum duc radium CD. Palam est, triangula omnia ACD, ADM, AEN, AFP, AGQ esse similia, quia omnia ex constructione isoscelia sunt, & habent angulos ad basim æquales. Præterea ajo, ME = AB, NF = AD, PG = AE, QH = AF. Ut hoc demonstretur, intellige ductas chordas æquales BD, DE, EF &c. Æqualia sunt quoad omnia triangula ADB, MDE, quia AD = MD, BD = ED, & angulus BAD = EAD; ergo AB = ME. Eodem modo triangula ADE, NFE habent AE = NE, DE = FE, & angulos in A, N æquales; ergo AD = NF. Similis demonstratio valet de aliis.

31. His præmissis venio ad analysim. Sit radius $CA = a$, $AD = x$, ultima chorda AH, quæ data est, $= b$. Similitudo triangulorum dat

CA : AD :: AD : AM

$$a : x :: x : AM = \frac{x^2}{a}$$

sed $ME = 2a$ ex demonstratis; ergo

$$AE = \frac{x^2 - 2a^2}{a}.$$ Item est

AC : AD :: AE : AN

$$a : x :: \frac{x^2 - 2a^2}{a} : AN = \frac{x \cdot \overline{x^2 - 2aa}}{aa};$$

sed NF = AD; ergo

$$AF = \frac{x \cdot \overline{xx - 3aa}}{a^2}.$$

Quoniam istæ formulæ ad tertiam dimensionem ascendunt, ut deprimantur, usurpanda est prima substitutio. Ea autem sit $xx - 3aa = ay$. Quare fiet $AN = \frac{x \cdot \overline{y + a}}{a}$, & $AF = \frac{xy}{a}$. Producens analysim ex aliis triangulis similibus eruo

AC : AD :: AF : AP

$$a : x :: \frac{xy}{a} : AP = \frac{x^2 y}{a^2}$$

& dempta AE = PG fit

$$AG = \frac{x^2 y}{a^2} + \frac{2a^2 - x^2}{a}.$$

Ut hæ formulæ deprimantur, non est opus novam substitutionem advocare, sed sufficit pro xx ponere ejus valorem $ay + 3aa$; quo facto habebimus $AP = \frac{y^2 + 3ay}{a}$, & $AG = \frac{yy + 2ay - aa}{a}$. Devenimus jam ad ultimum triangulum, quod præbet

AC : AD :: AG : AQ

$$a : x :: \frac{yy + 2ay - aa}{a} : AQ = \frac{x \cdot \overline{yy + 2ay - aa}}{a^2}$$

Ab hac demamus $QH = AF = \frac{xy}{a}$,

& habebimus $AH = \frac{x \cdot \overline{yy + ay - aa}}{a^2}$. Quum hæc formula tertiam potestatem includat, utamur secunda substitutione, nempe $yy + ay - aa = az$; ergo $AH = \frac{xz}{a} = b$, quæ ultima est æquatio pertinens ad hyperbolam inter asymptota.

32. Analysis sequentem præbet constructionem. Ita describantur curvæ, quas suppeditant duæ substitutiones, ut indeterminata y, quæ utrique communis est, sit earum abscissa. Parabola primæ substitutionis, cujus æquatio est, xx

$xx - 3aa = ay$, ita describitur. Sectis $AB = BC = CD = DE = a$, vertice A, (*Fig.* 19) parametro $= a$, axe AE describatur parabola AN. Erunt $DM = y$, $MN = x$. Alia parabola æquationis $yy + ay - aa = az$, hoc modo construitur. Divisa CD bifariam in F, ei perpendicularis agatur $FG = \frac{5a}{4}$, & vertice G, parametro $= a$, diametro GF, describatur parabola GH, quæ erit eadem cum superiore; sed diverso loco posita, erunt ut antea $DM = y$, $MP = z$ negativæ ad partem G, positivæ ad oppositam. Per duas hasce curvas tertia delineetur curva, cujus abscissæ $= x$, ordinatæ scilicet parabolæ AN, (*Fig.* 20) ordinatæ vero $= z$, ordinatæ alterius parabolæ GK. Curva hujusmodi progressum habebit. Facto initio abscissarum in A seca $AB = BC = AD = AE = a$. Excita perpendicularem $AF = \frac{5a}{2}$. Curva discedens ex F secabit abscissas in G, & ultra excurrens converso itinere iterum secabit in K, deinde in infinitum progredietur. Huic ramo posito ad partem abscissarum positivarum respondet ramus alius similis, & æqualis situs ad plagam abscissarum negativarum. Descripta hac curva nihil aliud restat, nisi ut hæc conjungatur cum curva ultimæ æquationis $xz = ab$. Quapropter inter asymptota AC, AV describantur hyperbolæ oppositæ KIV, MLN rectanguli ab. Istæ in quinque punctis K, I, M, L, N secabunt curvam descriptam. Ex his demittantur normales, quæ determinabunt radices AO, AP, AQ, AR, AS. Ex his quæ inter positivas est omnium maxima ipsa est chorda, quæ quæritur. Hæc solutio diversa est ab ea, quam tradidit Jacobus Riccatus. Methodus produci potest, ut in plures quam quinque partes arcus dividatur.

CAPUT DECIMUM TERTIUM.

De inventione curvarum ex datis proprietatibus linearum, quæ a pluribus sectionis punctis definiuntur.

1. Quotiescumque data est proprietas, quæ aut ad coordinatas x, y pertineat, aut ad easdem reduci possit, per methodos, quas hactenus docuimus, possumus naturam curvæ determinare. Verum si proprietas data uni eidemque lineæ curvam secanti conveniat, & versetur inter lineas desinentes in plura sectionum puncta, nova aperienda est methodus, qua naturam curvæ, aut potius curvarum investigemus. Hujus generis esset quæstio. Data linea AB (*Fig.* 1) invenire curvam ejus naturæ, ut perpendiculares AM eam secantes in punctis M, 2M exhibeant vel summam $BM + B2M$, vel rectangulum $BM.B2M$ constans. Idem dicendum si lineæ secantes non essent parallelæ, sed discederent a dato puncto B (*Fig.* 2)

2. Hoc notandum est sedulo, proprietatem convenientem secantibus BM, B2M, talem esse debere, ut si pro BM ponatur B2M, & simul BM pro B2M, ea nullam prorsus mutationem patiatur. Ita accidit expositis proprietatibus, si reciprocentur secantes BM, B2M, eadem remanet summa, idem rectangulum. Quod si quæreretur curva, in qua duplex BM simul cum B2M esset constans, ineptum

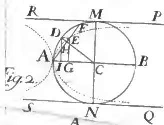
eptum esset quæsitum, quia accepta BM pro B2M & viceversa, eadem non proveniret quantitas. Idem dic si quærerem curvam, in qua $\frac{B2M}{BM}$ esset constans. Huisce regulæ ratio est, quia in curva proprietas singulis ejus punctis debet eodem modo convenire. Ita proprietas exhibita ab æquatione $aa - xx = yy$, communis est omnibus coordinatis, atque adeo omnibus punctis circuli. Quapropter si proprietas, quæ data est per secantes pertinet ad unam eamdemque curvam, omnibus ejus punctis communis sit necesse est. Hoc autem non accideret, si præcepta reciprocatio fieri non posset, quia quæ æquatio habetur relate ad punctum M, eadem non valeret relate ad punctum 2M. Hæc animadversio statuit limites, quibus quæstiones proponendæ debent contineri.

3. Notandum est deinde proprietatem involventem secantes BM, B2M exprimi posse non minus per constantes, quam per quantitates variabiles quidem, sed quæ eædem prorsus sint respectu secantium BM, B2M. Quare si istæ parallelæ ponantur, & desinentes in AB, (*Fig.* 1) sumpto quolibet puncto fixo A, proprietas dari poterit per AB abscissam communem duabus ordinatis BM, B2M. Si vero secantes (*Fig.* 2) discedant a dato puncto B, sumpta qualibet BA positione data, proprietas dari poterit, aut per angulum ABM communem secantibus BM, B2M, aut per quantitates ab hoc angulo dependentes, ut sunt sinus, cosinus, aliæque. His prænotatis agemus primum de secantibus parallelis, deinde de illis, quæ a dato puncto procedunt.

4 In primo casu si puncta sectionum duo sint, quis non videt, secantes BM, B2M (*Fig.* 1) esse ordinatas duas, quibus eadem est abscissa AB: ergo valor ordinatæ $= y$ expressus per abscissam $= x$ duplex sit oportet, atque adeo y debet in æquatione curvæ dimensionem secundam tenere. Formetur itaque æquatio $yy - 2my + n = o$, in qua m, n dari debent per x, & per constantes, prout proprietas exiget. Resolvatur æquatio, & inveniantur duo valores y, nempe $y = m + \sqrt{mm - n}$, $y = m - \sqrt{mm - n}$. Ex istis valoribus efforma æquationem, quam proprietas postulat, & per hanc determina aut m, aut n, & colloca in æquatione supposita, & habebis omnes curvas data proprietate gaudentes.

5. Sint primo determinandæ curvæ in quibus rectangulum BM, B2M sit constans, aut datum per AB $= x$. Voca $= P$ quantitatem, quam rectangulum debet æquare. Duos valores inventos y simul multiplica, ut habeas $mm - mm + n = n = P$. Ergo si in æquatione substituas P, quicumque sit valor m habebis curvam propositæ proprietati satisfacientem; nempe $yy - 2my + P = o$. Hoc facilius deducere potuisses. Nam quum ultimus terminus æquationis n sit rectangulum ex duabus radicibus, si hoc supponatur $= P$, etiam $n = P$. Quare si P sit constans, rectangulum ex duabus ordinatis BM, B2M constans erit, in qua suppositione si $m = a + bx$, æquatio erit ad hyperbolam, quæ referetur ad asymptota. Proprietatem hanc convenire hyperbolæ ordinatis in asymptotum desinentibus supra demonstravimus. Verum eadem proprietas non hyperbolæ tantum, sed infinitis curvis convenit, quarum æquationes habentur, si pro m quælibet functio x ponatur. Maxime autem simplex esse videtur, si fiat $m = \frac{x^2}{a}$; oritur enim curva tertii gradus, cujus æquatio $xx = \frac{yy + P}{2y} a$.

6. Quod



ig. 2.

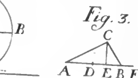


Fig. 3.

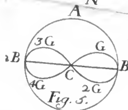


Fig. 5.

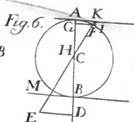


Fig. 6.

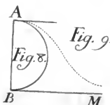


Fig. 8.

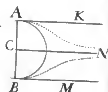
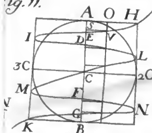


Fig. 9.



ig. 11.

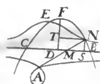


Fig. 12.

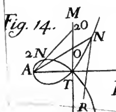


Fig. 14.

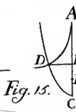


Fig. 15.

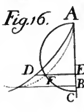
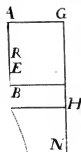


Fig. 16.



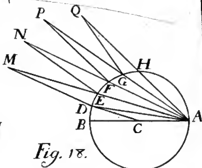
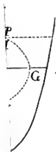


Fig. 18.



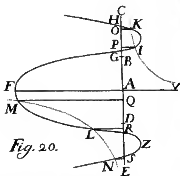


Fig. 20.

6. Quod si $P = a + bx + cx^2$; rectangulum ex duabus ordinatis BM, B2M hanc quantitatem æquabit. Si in hac hypothesi fiat m aut constans, aut æqualis $f + gx$, æquatio nascens poterit spectare ad omnes sectiones conicas pro coefficientium diversitate; quod si $a + bx + cx^2$ possit resolvi in duos factores reales, linea abscissarum in duobus punctis curvam secabit. Quare rectangulum ex duabus ordinatis erit ad rectangulum ex duabus interceptis inter ordinatam & duo puncta sectionum abscissæ cum curva in ratione data. Proprietatem hanc convenire sectionibus conicis jam ostendimus. Nunc vero liquet, eam propriam esse infinitarum curvarum, quarum æquationes habebis, si m alio modo supponas datam per x. Sed alias proprietates spectemus.

7. Quærantur curvæ, in quibus duarum ordinatarum summa BM + B2M aut constans sit, aut data per communem abscissam AB. Hæc quoque quæstio facile resolvitur. Nam quum coefficiens secundi termini mutato signo æquationis assumptæ summæ radicum æquale sit, debebit $2m$ = BM + B2M. Quam summam pono $= P$. Verum hoc idem colligimus summatis radicibus inventis, quum earum summa sit $= 2m$. Quare curvarum quæsitarum æquationes hac formula continentur $yy - Py + n = o$ existente n quomodocumque data per x. Si P constans sit, & fiat $n = a + bx + cx^2$, æquatio erit ad unam ex sectionibus conicis, nempe ad ellypsim, si c sit positiva; ad hyperbolam, si c sit negativa; ad parabolam, si $c = o$. Idem dicas si sit $P = f + gx$. Sed hæc proprietas communis est & infinitis aliis curvis, quarum maxime simplex est parabola secunda cubica, quam obtines si $P = 2a$, $n = aa - \frac{x^3}{a}$. Nam æquatio fit $a . \overline{y - a}^2 = x^3$; quæ ita construitur. Sit A (*Fig.* 3) initium, AC linea abscissarum. Parallelam ordinatis pone AF $= a$, ductaque FG parallela AC, vertice F describe parabolam secundam cubicam, in qua cubi abscissarum FG sint æquales quadratis ordinatarum CG ductis in a. Ducta qualibet BM2M summa BM + B2M $= 2a$. Quare in C ubi curva secat AE, erit CD $= 2a$. Infra autem quoniam EN fit negativa, erit E2N − EN $= 2a$.

8. Quæramus nunc curvas, in quibus $\frac{1}{BM} + \frac{1}{B2M} = \frac{1}{P}$, quæ P (*Fig.* 1) data sit per x, & constantes. Adhibitis speciebus supra positis erit

$$\frac{1}{m + \sqrt{mm - n}} + \frac{1}{m - \sqrt{mm - n}} = \frac{1}{P},$$ sive redactis ad eamdem denominationem fractionibus $\frac{2m}{n} = \frac{1}{P}$; ergo $2mP = n$. Quare æquatio proveniet $y^2 - 2my + 2mP = o$. Si sit $P = a$, & m ponatur $= x$, proveniet æquatio $yy - 2xy + 2ax = o$, quæ est ad hyperbolam, atque hoc modo construitur. Existente A (*Fig.* 4) initio, AB linea abscissarum sume AE $= a$, & duc parallelam ordinatis EC $= a$; junge AC, quam produc in D, ut AC = CD; centro C, semidiametris CD, CE describe hyperbolam MD2M; ducta ubicumque BM2M erit ubique $\frac{1}{BM} + \frac{1}{B2M} = \frac{1}{a}$. Quod si supponatur $P = b + cx + dx^2$, oritur æquatio $yy - 2my + 2mb + 2mcx + 2mdx^2 = o$, quæ, si m sit constans, esse potest ad omnes sectiones conicas, pro diversitate coeffi-

efficientium. Has autem proprietates habent sectiones conicæ communes cum curvis infinitis.

9. Investigandæ sint curvæ, in quibus $BM^2 + B2M^2 = P$. Erit itaque $\overline{m + \sqrt{mm - n}}^{\,2} + \overline{m - \sqrt{mm - n}}^{\,2} = P$, sive $4m^2 - 2n = P$, sive $2m^2 - \frac{P}{2} = n$; ergo æquatio proveniet $y^2 - 2my + 2m^2 - \frac{P}{2} = o$. Ponatur $P = 2aa$, & $m = \frac{ax}{f}$, ut fiat $yy - \frac{2axy}{f} + \frac{2a^2x^2}{f^2} = a^2$, quæ est ad ellypsim, atque hoc modo construitur. Accipe $AF = f$, $FD = a$, (*Fig.* 5) cui sit æqualis, & parallela AE, junge AD, atque duabus semidiametris conjugatis AD, AE describe ellypsim EDM. Ducta qualibet BM2M erit semper $BM^2 + B2M^2 = 2.AE^2$. Hinc pulcherrimam discimus proprietatem ellypsis. Sit quælibet ellypsis, cujus semidiametri coniguatæ duæ AD, AE. Duc DF æqualem, & parallelam AE, & junge AF. Ex hac ducta qualibet BM2M parallela AE erit semper $BM^2 + B2M^2 = 2.AE^2$. Quare si AD, AE æquales sint, & angulum rectum faciant, ellypsis mutatur in circulum, cui proprietatem hanc convenire cognoscimus. Si ponas $P = 2a + 2bx + 2cx^2$, & $m = f + gx$ omnes sectiones conicæ obtinentur, quibus proprietas hæc convenit. Infinitæ aliæ curvæ orientur, si speciei m alium tribuas valorem.

10. Conditio sit, ut $\frac{1}{BM^2} + \frac{1}{\overline{B2M}^2} = \frac{1}{P}$; ergo

$$\frac{1}{\overline{m + \sqrt{m^2 - n}}^{\,2}} + \frac{1}{\overline{m - \sqrt{m^2 - n}}^{\,2}} = \frac{4m^2 - 2n}{nn} = \frac{1}{P}\text{; igitur}$$

$2m = \pm\sqrt{\frac{n^2}{P} + 2n}$. Quapropter æquatio curvæ hæc erit

$y^2 \pm y\sqrt{\frac{n^2}{P} + 2n} + n = o$. Æquatio hæc liberata ab irrationalitate continebit y elevatam ad gradum quartum. Verum ad obtinendam conditionem propositam, necessarium est curvæ duos ramos accipere, qui oriuntur sumpto signo superiori, vel duo qui resultant ex signo inferiori. Eliminato vero radicali provenit æquatio $y^4 + n^2 = \frac{n^2y^2}{P}$. Si P sit constans, & $= aa$, maxime simplex æquatio habetur posita $n = ax$, ex qua positione resultat quarti gradus æquatio $y^4 = x^2 . y^2 - aa$. Hæc est constructio. In abscissis sume $AE = 2a$, (*Fig.* 6) parallelam ordinatis $AG = a$; sit CH parallela abscissis; abscinde

AD

$AD = a\sqrt{2}$, claude parallelogrammum AF. Curva HM asymptotica ad CH veniet in punctum F, in eoque tanget EF, tum per ramum F 4 M in infinitum recedet. Quatuor rami similes, & æquales in quatuor angulis existent; Si agatur BM 2 M, erit $\frac{1}{BM^4} + \frac{1}{B2M^2} = \frac{2}{EF^4} = \frac{1}{a^2}$.

11. Demum inquiratur curva, in qua $BM^3 + B2M^3 = P$ seu

$$\overline{m + \sqrt{m^2 - n}}^3 + \overline{m - \sqrt{mm - n}}^3 = 8m^3 - 6mn = P;$$ ergo $n = \frac{4}{3}m^2 - \frac{P}{6m}$. Curvæ itaque requisitæ hac æquatione continentur $y^2 - 2my + \frac{4}{3}m^2 - \frac{P}{6m} = 0$. Si debeat esse $\frac{P}{m} = a + bx + cxx$, & m ponatur constans, æquatio $yy - 2my + \frac{4}{3}mm \frac{-a - bx - cx^2}{m} = 0$ ad sectiones conicas spectabit. Si P debeat esse constans, & m fiat $= x$, simplicissima orietur curva tertii gradus hac proprietate donata, nempe

$$x \cdot y^2 - 2xy + \frac{4}{3}x^2 = \frac{P}{6}.$$

12. Sufficiant exempla hæc ad methodum indicandam, si de una proprietate tantum agatur. Verum si curva quæratur, in qua duæ ex prædictis proprietatibus locum habeant, tunc non plures curvæ, sed ad summum una problemati satisfaciet. Dixi ad summum; nam si utraque proprietas præbere debeat quantitatem constantem, æquatio proveniet determinata, & non ad curvam, sed ad puncta pertinebit. Verum si aut utraque, aut alterutra proprietas data sit per x, reperietur curva determinata, cui utraque convenit. Exemplum unum satis sit. Inquiritur curva, in qua $\frac{1}{BM} + \frac{1}{B2M} = \frac{1}{Q}$, & $\frac{1}{BM^2} + \frac{1}{B2M^2} = \frac{1}{P}$. Ex dictis paullo ante prima proprietas postulat, ut $2mQ = n$, secunda ut $2m = \sqrt{\frac{nn}{P} + 2n}$; ergo ejecta m; erit

$$\frac{n}{Q} = \sqrt{\frac{nn}{P} + 2n}, \text{ seu } \frac{n^2}{Q^2} = \frac{n^2}{P} + 2n,$$ ex qua $n = \frac{2PQ^2}{P - Q^2}$; ergo

$2m = \frac{2PQ}{P - Q^2}$; igitur æquatio curvæ est $y^2 - \frac{2PQy}{P - Q^2} + \frac{2PQ^3}{P - Q^2} = 0$, quæ, datis P, Q per x, determinata est. Si $Q = a$ sit constans, & $P = ax$, æquatio erit $yy - \frac{2a^2xy}{ax - aa} + \frac{2a^3x}{ax - aa} = 0$ sive $y^2x - ay^2 - 2axy + 2a^2x = 0$, quæ est æquatio tertii gradus.

12. A duabus ordinatis progredior ad tres. Initio autem monere opus est, duas ex tribus ordinatis imaginarias esse posse, ita tamen ut si simul conjungantur,

prout proprietas postulat, quantitatem exhibeant realem. Hoc autem contingere in duabus non potest, quia aut ambæ reales sunt, & curvam exhibent, aut ambæ imaginariæ, ac proinde curva imaginaria. Quare quum de tribus ordinatis agitur, si curvam invenias, pronunciare nequis, omnes reales esse, sed ex aliis fontibus inquirendum est, utrum curva tres ordinatas reales habeat, an duas imaginarias, & unam realem. In hujusmodi quæstionibus assumenda est æquatio tertii gradus $y^3 - 3ly^2 + 3my - n = o$. Si summa trium ordinatarum data sit aut absolute, aut per x, & sit $= P$, huic facienda est æqualis $3l$. Si producta omnia ex binis ordinatis debeat $= P$, fiat $3m = P$. Demum si productum ex tribus debeat esse $= P$, fiat $n = P$. Reliqui coefficientes determinati quomodocumque per x, præbebunt curvam proposita proprietate gaudentem.

13. Proprietates istæ facili negotio abs[illegible] si data esset proprietas ordinatarum, quam [illegible] per l, m, n nesciamus, oporteret, resolvere æquationem [illegible] gradus, ut tres ordinatæ per tres radices exprimerentur. His enim [illegible] per analysim fiet determinatio necessaria ad inveniendas curvas. Ad resolutionem faciendam primum eiciendus terminus secundus facta $y = z + l$, & proveniet æquatio

$$\begin{matrix} z^3 - 3l^2z - 2l^3 \\ \;\;+ 3mz + 3ml \\ \qquad\quad - n \end{matrix} = o,$$

vocatisque $l^2 - m = A$, & $2l^3 - 3ml + n = B$ fiet $z^3 - 3Az - B = o$, cujus resolutio, vocatis

$\sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{BB}{4} - A^3}} = p$, $\sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{BB}{4} - A^3}} = q$, dabit tres valores z

$p + q$, $p.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + q.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $p.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + q.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$;

quibus si addamus l, habebimus tres valores y, nempe $p + q + l$,

$p.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + q.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + l$, $p.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + q.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + l$.

His adhibitis ex data proprietate curvas determinabis.

14. Quamquam analysis hæc difficilior evadat, tamen, ad exemplum, inquiramus curvas, in quibus quadrata trium ordinatarum simul sumpta æquent P datum vel absolute, vel per x. Radices inventæ ad quadrata eleventur, ut hæc habeamus ordinatarum quadrata

$$pp + 2pq + qq + 2l.\overline{p+q} + l^2$$

$$pp.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + 2pq + qq.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} - l.\overline{p+q} + l.\overline{p\sqrt{-3} - q\sqrt{-3}} + ll$$

$$pp.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + 2pq + qq.\frac{-1-\sqrt{-3}}{3} - l.\overline{p+q} + l.\overline{-p\sqrt{-3} + q\sqrt{-3}} + ll;$$

quorum summa $= 6pq + 3ll$; atqui $pq = \sqrt[3]{\frac{BB}{4} - \frac{BB}{4} + A^3} = A = ll - m$; ergo summa quadratorum $= 9ll - 6m$; quod alia etiam methodo facilius invenire potuissem; igitur $9ll - 6m = P$, seu $\frac{3}{2}ll - \frac{1}{6}.P = m$; igitur pro-

ve-

veniet $y^3 - 3ly^2 + \overline{\frac{9ll}{2} - \frac{p}{3}}.\, y - n = 0$, in qua quum duæ l, n possint infinitis modis determinari per x, infinities infinitæ adsunt curvæ problemati satisfacientes.

15. Si curva duabus ex nostris proprietatibus prædita sit oporteat, tum ex tribus l, m, n duæ determinationem accipient, reliqua indeterminata remanebit; quare infinitæ curvæ supererunt proprietates duas continentes. Si tres proprietates datæ requirantur, omnes coefficientes l, m, n definientur, quare curva una dumtaxat obtinebitur. Excipe tamen casum, in quo proprietates non per x datæ sint, sed omnes absolute. Nam tunc æquatio determinata nascetur, quæ non ad curvam erit, sed ad puncta ad summum tria.

16. Quæ dicta sunt hactenus applica quatuor, quinque, pluribusque ordinatis. Nam si harum summarum, aut summa rectangulorum ex binis, aut ternis, aut quaternis data esse debeat, facillimam problema accipit solutionem; immo solvetur quotiescumque proprietas per has summas exprimi possit. Verum si nesciamus, quo pacto per has exprimatur, quum altiorum æquationum resolutio non sit in potestate, problemata proposita vires cognitæ analyseos superabunt. Sed de his satis.

17. Ex proprietates inspiciendæ sunt, que conveniunt secantibus non parallelis, sed ab uno eodemque puncto discendentibus. Quamobrem opus est spectare curvas alio prorsus modo, ac fecimus hactenus, diversaque æquatione earum naturam exprimere. Sit curva DME (*Fig. 7*) & punctum quodlibet B, ex quo ducantur ad curvam rectæ BM. Ex eodem B ducatur quælibet positione data BC, oportet, naturam curvæ exprimere per æquationem inter $BM = z$, & quantitatem dependentem ab angulo $CBM = \mu$, ut sunt $Sc.\mu$. $Cc.\mu$, $Tc.\mu$ &c. Primum modus tradendus est, quo, ducta ordinata orthogonali MN, vocatisque $BN = x$, $MN = y$, ex æquatione inter z, μ inveniri possit æquatio inter x, y & viceversa. Adverte fore $z = \sqrt{xx + yy}$, $\frac{Sc.\mu}{r} = \frac{y}{\sqrt{xx+yy}}$, $\frac{Cc.\mu}{r} = \frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$, $\frac{Sc.\mu}{Cc.\mu} = \frac{Tc.\mu}{r} = \frac{y}{x}$. Quare pro his quantitatibus dependentibus ab angulo μ, & z, substitue illas, quæ datæ sunt per x, y, & ab æquatione inter z, μ transibis ad illam, quæ intercedit inter x, y. Tum substituto pro $\sqrt{xx+yy}$ ejus valore z invenies, $\frac{z.Sc.\mu}{r} = y$, $\frac{z.Cc.\mu}{r} = x$. Hos valores pone in æquatione inter x, y, & invenies æquationem inter z, & $Sc.\mu$, ac $Cc.\mu$.

17. Ad exemplum sit datus circulus DME, cujus centrum C, & radius $CD = b$. Accipiatur quodlibet punctum B, & agatur per centrum recta BDC. Vocetur $BD = a$, oporteat invenire æquationem inter $BM = z$, & quantitates dependentes ab angulo $B = \mu$. Vocatis $BN = x$, $MN = y$, erit $DN = x - a$; ergo æquatio circuli proveniet $\overline{2b + 2a}.\, x - xx - aa - 2ab = yy$. Pro x scribe $\frac{z.Cc.\mu}{r}$, & pro y pone $\frac{z.Sc.\mu}{r}$, & invenies

$$\overline{2b+2a}.\,\frac{z.Cc.\mu}{r} - \frac{z^2.\overline{Cc.\mu}^2}{rr} - aa - 2ab = z^2.\frac{\overline{Sc.\mu}^2}{rr}\text{, seu}$$

$\overline{2b+2a}.\frac{z.Cc.\mu}{r}-aa-2ab=z^2.\frac{\overline{Sc.\mu}^2+\overline{Cc.\mu}^2}{rr}=z^2$, seu

$z^2-\frac{2z.Cc.\mu}{r}.\overline{b+a}+aa+2ab=o$, quæ est æquatio circuli requisita.

18. Si proprietas exigat, ut secantes sint duæ, accipienda est æquatio secundi gradus $zz-2mz+n=o$, in qua m, n datæ sint per angulum B, qui communis est duabus secantibus BM, B2M; tum alterutra determinanda ex data proprietate, altera indeterminata remanente, ex cujus diversa determinatione diversæ oriuntur curvæ problemati satisfacientes. Primum exemplum inquirat curvam, cujus secantes duæ ab eodem puncto discedentes præbeant rectangulum absolute constans. Quum hoc rectangulum $=n$; fiat $n=aa$; ergo $zz-2mz+aa=o$. Si fiat $m=\frac{b.Cc.\mu}{r}$, æquatio erit $zz-2bz.\frac{Cc.\mu}{r}+aa=o$, quæ, ut colligere potes ex numero superiore, est ad circulum. Verum hoc deducamus reducendo æquationem inventam ad aliam, quæ est inter x, y. Pone in æquatione $\sqrt{xx+yy}$ pro z, & $\frac{x}{\sqrt{xx+yy}}$ pro $\frac{Cc.\mu}{r}$, & habebis $xx+yy-2bx+aa=o$, quæ in hunc modum construitur. Abscinde BC $=b$, & CD $=\sqrt{bb-aa}$, atque hoc radio, & centro C circulum describe DME, erit ubique BM. B2M $=aa$. Circulum quoque invenies si ponas $m=\frac{b.Sc.\mu}{r}$.

19. Quod si debeat n esse $=\frac{-bb.rr}{\overline{Sc.\mu}^2}$, quæ quantitas negativa indicat puncta sectionum posita esse ad diversas partes puncti, a quo procedunt secantes, quarum una erit proinde positiva, altera negativa, atque adeo earum rectangulum negativum, proveniet æquatio $zz-2mz-\frac{b^2r^2}{\overline{Sc.\mu}^2}=o$. Si poneres $m=a$, substitutis valoribus proveniet æquatio $xx+yy-2a\sqrt{xx+yy}-bb.\frac{xx+yy}{xy}=o$, quæ expurgata, & liberata a radicalibus, fiet æquatio sexti gradus. Verum si facias $m=a.\frac{r.Cc.\mu}{\overline{Sc.\mu}^2}$, substitutis opportunis valoribus proveniet æquatio $xx+yy-\frac{2ar^2x.\overline{xx+yy}}{r^2y^2}-\frac{b^2.\overline{x^2+y^2}}{y^2}=o$, sive

$y^2-2ax-bb=o$, seu $yy=2a.\overline{x+\frac{bb}{2a}}$, quæ est ad parabolam, atque hoc modo construitur. Describatur parabola AM, (*Fig.* 8) cujus parameter $=2a$. In ejus axe sume AB $=\frac{bb}{2a}$. Si per punctum B ducas quamlibet MB2M, erit rectangulum BM. B2M ad quad. bb in ratione duplicata sinus totius ad sinum anguli

guli MBC. Si fuerit $b = a$, punctum B erit parabolæ focus.

20. Si duarum fecantium fumma debeat $= 2a$, orietur æquatio $zz - 2az + n = 0$. Quomodocumque determinetur n per angulum μ, curva huic æquationi refpondens habebit duarum fecantium fummam conftantem. Si $n = \frac{abr}{Cc.\mu}$, fubftitutis valoribus, inter x, y orietur æquatio $xx + yy - 2a\sqrt{xx+yy} + \frac{ab\sqrt{xx+yy}}{x} = 0$, quæ in hanc tranfit $x^4 + x^2y^2 = a^2.\overline{2x - b}^2$, quæ eft æquatio quarti gradus.

21. Si non fumma, aut rectangulum fecantium, fed alia functio daretur, hæc, ut antea docui, invenitur expreffa per m, n, atque ex hifce fpeciebus una per alteram determinetur, & in æquatione fubftituatur. Ita æquationem invenies continentem curvas omnes propofita proprietate gaudentes. Ad exemplum, fi quadrata fecantium debeant $= P$ datam aut abfolute, aut per quantitates anguli μ; inveniemus $n = 2m^2 - \frac{P}{2}$; unde æquatio $zz - 2mz + 2m^2 - \frac{P}{2} = 0$. Si P, & m ponatur conftans, æquatio, quæ, eliminata z, afcendet ad quartum gradum, erit ad duos circulos. Cafum hunc omittendum non cenfui, ut fit in exemplum cautionis, qua fecantes duæ accipiendæ funt, quum curva ordinis fuperioris, aut coalefcat ex curvis ordinis inferioris, aut fecus, fecatur in pluribus quam in duobus punctis. Difponatur æquatio in hunc modum $zz - 2mz + mm = \frac{P}{2} - mm$. Extrahatur radix quadrata $z - m = \pm\sqrt{\frac{P}{2} - mm}$. Si $\frac{P}{2} = mm$, haberemus $z = \sqrt{xx+yy} = m$, quæ eft ad circulum, cujus radius $= m$, dum a centro difcedunt z. Quod apprime evidens eft; nam utraque fecans $= m$; ergo fumma quadratorum $= 2mm = P$. Verum fi $\frac{P}{2} > mm$, ut fi $\frac{P}{2} = 5mm$ fieret $z = \sqrt{xx+yy} = m \pm 2m$; quæ eft ad duos circulos, quorum alter habet radium $= 3m$, alter radium $= -m$. Defcribantur itaque circuli duo, nempe FM, (*Fig. 9*) cujus radius BF $= 3m$, & G2M, cujus radius BG $= m$. Si agatur quælibet fecans BM tranfiens per punctum B, fecat duos circulos in punctis M, 2M, 3M, 4M. Quænam ex quatuor fecantibus illæ duæ funt, quarum quadratorum fumma $= 10mm$, ut conditio poftulat? Si accipias fecantes definentes in ejufdem circuli peripheriam, proprietatem minime invenies. Nam $BM^2 + B4M^2 = 18mm$, & $B2M^2 + B3M^2 = 2mm$. Ergo accipiendæ funt fecantes BM, B2M, quæ definunt in circumferentias duorum circulorum. Reapfe $BM^2 + B2M^2 = 10mm$.

22. Ad alterum exemplum pono $P = 4aa$, & $m = \frac{a.Sc.\mu}{r}$, ut fubftitutis his valoribus, æquatio fiat $zz - \frac{2az.Sc.\mu}{r} + \frac{2aa.\overline{Sc.\mu}^2}{r^2} - 2aa = 0$, five

$zz - \frac{2az.Sc.\mu}{r} - \frac{2aa.\overline{Cc.\mu}^2}{rr} = 0$. Nunc tranfeo ad æquationem datam

per

per x, y, & invenio $xx + yy - 2ay - \frac{2aaxx}{x^2 + y^2} = 0$ five $\overline{x^2 + y^2 - 2ay}^2 \cdot \overline{x^2 + y^2} - 2aaxx = 0$. Quæ eſt ad curvam quarti gradus præditam conditione, ut duarum ſecantium quadrata æquent $4aa$.

23. Quæ hactenus dicta ſunt, de duabus ſecantibus oſtendunt, quomodo ſolvendæ ſunt quæſtiones pertinentes ad tres, quatuor, pluresquæ ſecantes, quoties proprietas propoſita exprimatur per coefficientes terminorum æquationis, quæ aſſumitur. Hujus autem generis problemata omittenda non erant, quia peculiarem methodum ad ſui ſolutionem expoſcunt.

FINIS TOMI PRIMI.

Vidit

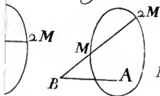


Fig. 2.

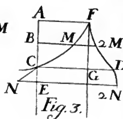


Fig. 3.

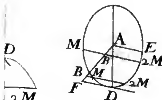


Fig. 5.

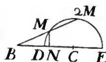


Fig. 7.

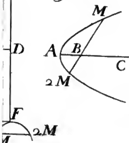


Fig. 8.

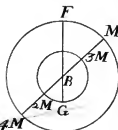


Fig. 9.

Vidit D. Johannes Maria Vidari Clericus Regularis Sancti Paulli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino D. Vincentio Cardinali Malvetio Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 26. Martii 1763.

A. R. P. Carolus Maria Offredi Ord. Theatinorum Pub. in Univ. Bonon. Professor, & S. Off. Revisor ordinarius videat pro S. O. & referat.

F. Seraphinus Maria Maccarinelli S. O. Bonon. Inq. Coadiutor.

30. Martii 1763.

Egregium opus inscriptum = *Institutiones Analyticæ collectæ a Vincentio Riccato Soc. Jesu, & Hieronymo Saladino Monacho Cœlestino., Tomus Primus* = de mandato Reverendissimi Patris Seraphini Mariæ Maccarinelli S. O. Bononiæ Inquisitoris Coadiutoris attente perlegi, nihilque in eo occurrit Fidei, aut bonis moribus contrarium: quapropter dignum censeo, ut publica luce donetur. In quorum fidem &c.
Ex Ædibus S. Bartholomei Apost. Clericorum Regularium Bononiæ tertio Kal. Aprilis 1763.

D. Carolus Maria Offredi C. R. in Bononiensi Archigymn. Pub. S. T. Lector & S. O. Revisor Ord.

Die 31. Martii 1763.

Stante suprascripta attestatione.

INPRIMATUR

F. Seraphinus Maria Maccarinelli S. O. Bononiæ Inquisit. Coadiutor.